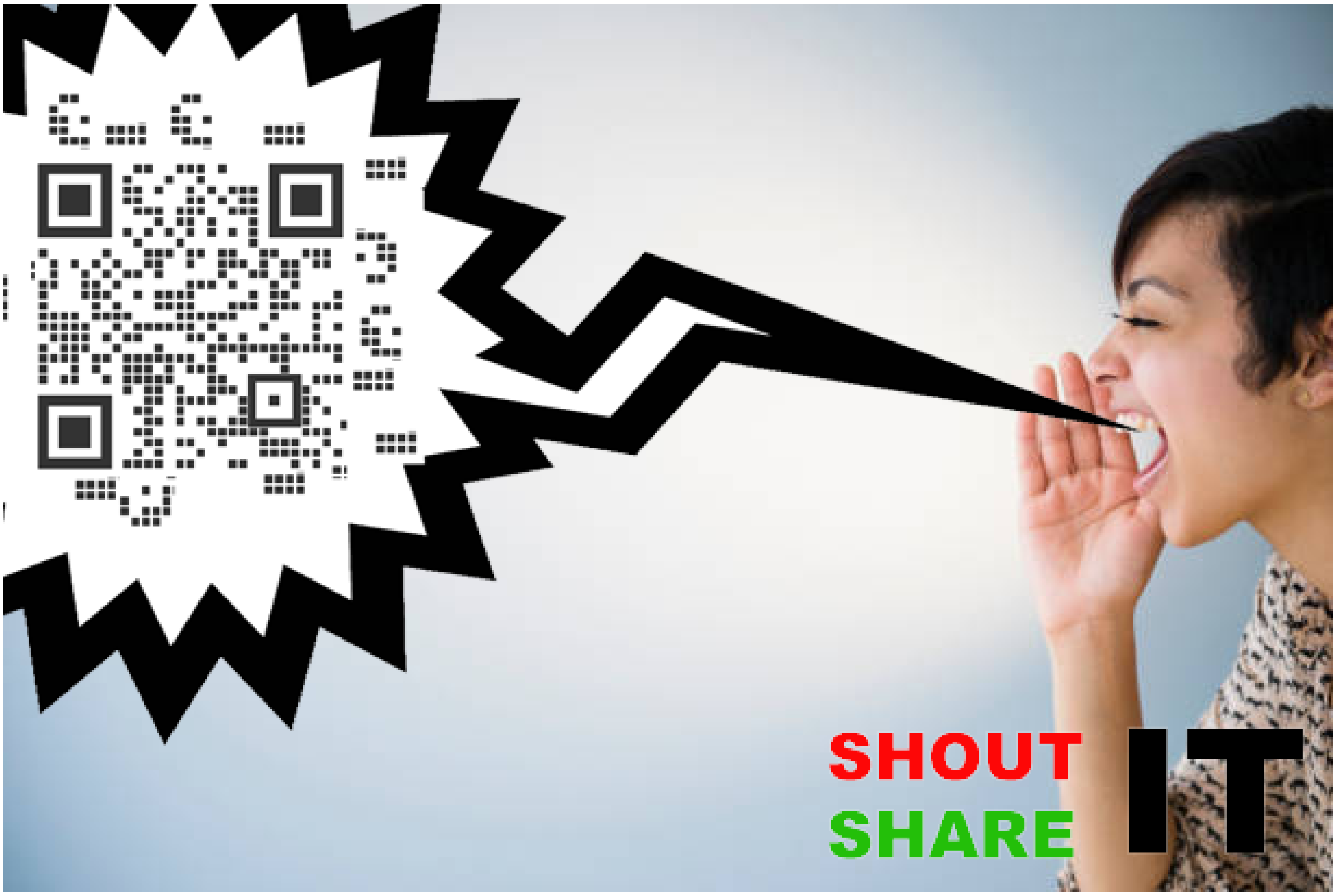
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

41


SHOUT
SHARE
IT

Louvain. — Imprimerie F. Ceuterick
60, rue Vital Decoster, 60

QK1
.S66
1922
v.41

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

> *Nulla unquam inter fidem et rationem*
> *vera dissensio esse potest.*
> CONST. DE FID. CATH., C. IV.

QUARANTE-ET-UNIÈME ANNÉE, 1921-1922

9.00

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(MM. F. WILLAERT et H. DOPP)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1922

MISSOURI BOTANICAL
RECEIVED
APR 26 1923
GARDEN LIBRARY

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

LETTRE
DE
S. S. LE PAPE BENOIT XV
AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

A nos chers Fils, Membres de la Société scientifique de Bruxelles

BENOIT XV, PAPE

SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Votre illustre Société fut de la part de nos prédécesseurs l'objet d'un amour paternel ; nous ressentons aussi pour elle une bienveillance toute particulière, nous qui voyons croître chaque jour son importance et son utilité. Aujourd'hui, en effet, plus que jamais, c'est le devoir des meilleurs de mettre tout en œuvre pour sauver les principes chrétiens d'un tel déluge d'erreurs et pour éclairer des lumières de la religion tous les genres d'études. Votre zèle à poursuivre ce but nous est prouvé par le livre (le tome XXVI de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES et le tome XXVIII des ANNALES) dont vous avez voulu nous faire un précieux présent, et votre lettre collective si respectueuse nous a montré la déférence avec laquelle vous accueillez tout ce que le Saint-Siège ordonne pour le progrès de la vie catholique. Aussi louons-nous de grand cœur votre activité, et puisque, après la guerre, vous avez repris votre ardeur première, poursuivez avec confiance votre entreprise, afin qu'en tenant compte des progrès de la science, vous puissiez montrer qu'aucune découverte moderne véritable n'est en conflit avec l'enseignement de l'Église. En effet, les vérités doivent être entre elles dans l'accord le plus parfait, puisque toutes procèdent du Maître unique de la Science. Ainsi vous parviendrez à mériter de l'Église autant que de la société civile, car l'éclat d'une érudition solide peut apporter à la Sainte Foi des avantages très appréciables. De notre côté, nous aurons à cœur d'implorer pour vous le secours d'en-haut. Trouvez-en le gage dans la bénédiction apostolique que nous vous accordons très volontiers, à vous, très chers fils, et à tous ceux qui participent en quelque façon à vos labeurs.

Donné à Rome, près de Saint-Pierre, le 26 juin de l'an 1920, de notre pontificat le sixième.

BENOIT XV, PAPE.

LISTE

DES

Membres de la Société scientifique de Bruxelles

ANNÉE 1922

Liste des Membres fondateurs

S. É. le cardinal Dechamps (1), , archevêque de	Malines.
François de Cannart d'Hamale (1)	Malines.
Charles Dessain	Malines.
Jules van Havre (1)	Anvers.
Le chanoine Maes (1)	Bruges
Le chanoine De Leyn (1)	Bruges.
Leirens Eliaert (1)	Alost.
Frank Gillis (1)	Bruxelles.
Joseph Saey	Bruxelles.
Le Cher de Schoutheete de Tervarent (1)	Saint-Nicolas.
Le Collège Saint-Jean-Berchmans	Bruxelles.
Le Collège Notre-Dame de la Paix	Namur.
Le Duc d'Ursel, sénateur (1)	Bruxelles.
Le Pce Gustave de Croy (1)	Le Rœulx (Hainaut).
Le Cte de T'Serclaes (1)	Gand.
Auguste Dumont de Chassart (1)	Mellet (Hainaut).
Charles Hermite (1), memb. de l'Instit.	Paris.
L'École libre de l'Immaculée-Conception	Vaugirard (Paris).
L'École libre de Sainte-Geneviève	Versailles.

---

(1) Décédé.

Le Collège Saint-Servais	Liége.
Le Cte de Bergeyck (1).	Beveren-Waes.
L'Institut St-Ignace	Anvers.
Philippe Gilbert (1), correspondt de l'Institut	Louvain.
Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège Saint-Jean-Berchmans . .	Louvain.
Le Collège Saint-Joseph	Alost.
Le chanoine de Wouters (1) . . .	Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie (1), memb. de l'Inst. .	Paris.
S. É. le cardinal Haynald (1), archevêque de Kalocsa et Bàcs . . .	Kalocsa (Hongrie).
S.É. le cardinal S. Vannutelli (1) .	Rome.
S. G. Mgr Du Rousseaux (1), évêque de	Tournai.
S. É. le cardinal Goossens (1), archevêque de	Malines.
R. Bedel	Marseille.
S. G. Mgr Belin (1), évêque de . .	Namur.
Eugène Pécher (1)	Bruxelles.
S. É. le cardinal Ferrata (1) . . .	Rome.
S. É. le cardinal Nava di Bontife . .	Catane.
S. É. le cardinal Rinaldini (1) . . .	Rome.
S.É. le cardinal Granito di Belmonte	Rome.
Éd. Goedseels	Uccle.
Xavier Francotte	Liége.

Liste des Membres honoraires

S. A. R. Charles-Théodore (1), duc en Bavière.	Possenhofen.
Antoine d'Abbadie (1), membre de l'Institut	Paris.
E. H. Amagat (1), membre de l'Instit.	Saint-Satur (France).

---

(1) Décédé.

Andoyer, membre de l'Institut	Paris.
Joachim Barrande (1)	Prague.
Barrois, membre de l'Institut	Lille.
Mgr Baunard (1), recteur honoraire de l'Université catholique	Lille.
A. Béchamp, correspondant de l'Instit.	Paris.
Aug. Béchaux, correspond. de l'Instit.	Paris.
Le Prince Boncompagni (1), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
J. Boussinesq, membre de l'Institut	Paris.
É. Branly, membre de l'Institut	Paris.
L. de Bussy (1), membre de l'Institut.	Paris.
L. de Launay, membre de l'Institut	Paris.
Dr H. Desplats (1)	Lille.
P. Duhem (1), membre de l'Institut	Bordeaux.
J. H. Fabre (1), correspond. de l'Inst.	Sérignan (France).
Dr Fiessinger, correspondant de l'Académie de Médecine	Paris.
Le docteur Foerster (1)	Aix-la-Chapelle.
J. Gosselet (1), membre de l'Institut.	Lille.
G. Grand'Eury (1), corresp. de l'Inst.	Malzéville (France).
J. N. Haton de la Goupillière, membre de l'Institut	Paris.
P. Hautefeuille (1), memb. de l'Inst.	Paris.
Dr Heis (1)	Munster.
Charles Hermite (1), memb. de l'Inst.	Paris.
G. Humbert (1), membre de l'Institut	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières (1), membre de l'Institut	Paris.
Camille Jordan, membre de l'Instit.	Pont-Authon (Fr.).
A. de Lapparent (1), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences	Paris.
H. Le Chatelier, membre de l'Instit.	Paris.
G. Lemoine, président de l'Académie des Sciences	Paris.
F. Le Play (1), membre de l'Institut.	Paris.

---

(1) Décédé.

Dr W. LOSSEN (1)	Heidelberg.
Le général J. NEWTON (1)	New-York.
D.-P. ŒHLERT (1), correspond. de l'Inst.	Laval (France).
Louis PASTEUR (1), membre de l'Inst.	Paris.
R. P. PERRY, S. J. (1), de la Société Royale de Londres	Stonyhurst.
É. PICARD, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences	Paris.
Victor PUISEUX (1), membre de l'Inst.	Paris.
P. PUISEUX, membre de l'Institut	Paris.
Paul SABATIER, membre de l'Institut	Toulouse.
A. BARRÉ DE SAINT-VENANT (1), membre de l'Institut	Paris.
R. P. A. SECCHI, S. J. (1), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Cte DE SPARRE, correspondant de l'Institut	Lyon.
Paul TANNERY (1)	Pantin (France).
Pierre TERMIER, membre de l'Institut	Paris.
Leonardo Torres QUEVEDO, correspondant de l'Institut	Madrid.
R. P. A. VERSCHAFFEL, correspondant de l'Institut	Hendaye (France).
R. P. E. WASMANN, S. J.	Valkenburg. (P.-B.).
Aimé WITZ, correspond. de l'Institut	Lille.
WOLF (1), membre de l'Institut	Braine (France).
R. ZEILER (1), membre de l'Institut	Paris.

Liste générale des Membres de la Société scientifique de Bruxelles (1922)

ABAURREA (Luis), Molviedro, 6. — Séville (Espagne).

D'ADHÉMAR (Vte Robert), 14, Place de Genevières. — Lille (Nord - France).

---

(1) Décédé.

Agniel (G.), ingénieur à la C^{ie} des Mines de Vicoigne et de Nœux. — Verquin (Pas-de-Calais — France).

Alliaume (Maurice), professeur à l'Université, 130, rue de Bruxelles. — Louvain.

Andoyer, membre de l'Institut, professeur d'astronomie à l'Université. — Paris.

André (J.-B.), inspecteur général au Ministère de l'Intérieur, 127, avenue Brugman. — Bruxelles.

Annycke (Abbé Théophile), professeur à l'Université catholique, 7, rue Lestiboudois. — Lille (Nord — France).

Arduin (Abbé Alexis), à N.-D. d'Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).

Ariès (Colonel), correspondant de l'Institut, 9 boulevard du Roi. — Versailles (Seine-et-Oise — France).

Asselberghs (Étienne), docteur en sciences, professeur de géologie à l'Institut Agronomique de Gand, 61, rue Hobbema. — Bruxelles.

Baeckelmans (Abbé Louis), professeur de sciences à l'Institut Ste-Marie, 160, chaussée de Haecht. — Schaerbeek (Bruxelles).

Baeckeroot (Abbé Georges), professeur de géographie à l'École libre des hautes études commerciales, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord-France).

Bagnall (R. S.), Maître de Forges, 5, Hygham Place. — Newcastle-on-Tyne (Angleterre).

Baivy (D^{r} Zénon), rue Louise. — Namur.

Barrois, membre de l'Institut, 41, rue Pasçal. — Lille (Nord — France).

Baseil (Abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe.

Bastin (F.), 104, chaussée de Malines. — Anvers.

Battez (D^{r} Gustave), agrégé des Facultés de médecine, professeur à l'Université catholique, 91, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Baudhuin (Fernand), docteur en droit, diplômé de l'École des Sciences politiques et sociales de Louvain, 83, rue Juste-Lipse. — Louvain.

Beaujean (Charles), directeur général de la Caisse Générale d'Épargne et de Retraite, 20, rue de l'Église. — Rixensart.

Béchaux (Aug.), correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas. — Paris.

Bellette (Paul), conservateur du Musée de Douai. — Douai.

Belpaire (Abbé Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, directeur du Collège St-Rombaut. — Malines.

Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.

Berlingin (Melchior), ingénieur-directeur des Établissements de la Société de la Vieille-Montagne. — Viviez (Aveyron-France).

Bernard (Louis), professeur à l'École libre des hautes études industrielles, 8 rue des jardins. — Lille (Nord-France).

Bertrand (Abbé G.), astronome, observatoire d'Abbadia. — Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Besson (Dr A.), professeur suppléant à l'Université catholique, 17, square Rameau. — Lille (Nord — France).

de Béthune (Bon Gaston), officier d'artillerie, répétiteur à l'École militaire, 151, chaussée de Haecht. — Bruxelles.

Beyls (Mgr R.), vice-recteur de l'Université, 6, rue St-Michel. — Louvain.

Bibot (Dr), 55, rue Lucien Namèche. — Namur.

de Bien (Ferdinand), 150, rue du Trône. — Bruxelles.

Biot (Auguste), docteur en sciences physiques et mathématiques, 40, rue Liévin de Winne. — Gand.

Biourge (O.), professeur à l'Université, 20, rue du Canal. — Louvain.

Blondel (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.

Blondel (G.), professeur au Collège de France, 31, rue de Bellechasse. — Paris.

de la Boëssière-Thiennes (Mis), 19, rue aux Laines. — Bruxelles ; ou, château de Lombise, par Lens (Hainaut).

Boine (Dr J.), 134, avenue des Alliés. — Louvain.

Bolsius (R. P. Henri), S. J., 18a, Kerkstraat. — Oudenbosch (Pays-Bas).

Boone (Abbé Clément), professeur à l'Institut Sainte-Marie. — Schaerbeek (Bruxelles).

Bosmans (R. P. Henri), S. J., Collège St-Michel, 24, boulevard St-Michel. — Bruxelles.

Bouckaert, 131, boulevard Lambermont. — Bruxelles.

Boulangé (Henri), maître de conférences à l'Université catholique, 8, rue Gauthier de Châtillon. — Lille (Nord — France).

Boule (Abbé L.), professeur de biologie, directeur de la section agricole de l'Institut catholique, 31, rue de la Fonderie. — Toulouse (Haute-Garonne). — Fr.).

Boussinesq (J.), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université, 22, rue Berthollet. — Paris.

Du Boys (Paul), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, 19, rue Oudinot. — Paris.

Branly (Édouard), membre de l'Institut, professeur à l'Institut catholique, 31, avenue de Tourville. — Paris.

Braun (Alexandre), sénateur, 102, rue du Prince-Royal. — Bruxelles.

Brifaut (Valentin), membre de la Chambre des Représentants, 131, rue de Stassart. — Bruxelles.

de Broqueville (B^{on} Charles), ministre d'État. — Bruxelles.

Brouckmans (Aloïs), 171, chaussée de Charleroi. — St-Gilles (Bruxelles).

Brunhes (Jean), professeur au Collège de France, 1, Grand'-Rue. — Bellevue (Seine-et-Oise — France).

Bruylants (G.), professeur à l'Université, Membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain

Bruylants (P.), professeur à l'Université, 39, boulevard de Tirlemont. — Louvain.

Bruynoghe (R.), professeur à l'Université, 96, rue Vital Decoster. — Louvain.

Cabeau (Abbé Charles), professeur au Collège St-Joseph. — Virton.

Camboué (R. P. Paul), S. J., missionnaire catholique. — Tananarive (Madagascar).

Capart (Jean), membre correspondant de l'Académie Royale de Belgique, professeur à l'Université de Liége, conservateur et secrétaire des Musées Royaux du Cinquantenaire, 8, avenue Roger Van den Driessche. — Woluwe-Saint-Pierre.

Capellen-Smolders (Guillaume), commissaire d'arrondissement, rue de Namur. — Louvain.

Cappe de Baillon (P.), professeur à l'Université catholique, 73, rue des Stations. — Lille (Nord — France).

Cappuyns (Alphonse), ingénieur expert-chimiste, 139, rue Victor Beauduin. — Tirlemont.

Caratheodory (Costa), 77, Passage Bakergian. — Smyrne (Grèce).

Carlier (Joseph), ingénieur, 4, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Caron (Hubert), professeur suppléant à l'Université catholique, Allée des Jardins. — St-André-lez-Lille (Nord — France).

Carpentier (Abbé A.), professeur de botanique à l'Université catholique, 11, rue de Toul. — Lille (Nord — France).

Carpentier (Fritz), docteur en sciences naturelles, assistant à l'Université de Liége, 10, rue Vivegnis. — Liége.

Carton de Wiart (B^{on} Edmond), directeur de la Société Générale, 13, avenue des Gaulois. — Bruxelles.

Carton de Wiart (C^{te} Henri), ministre de l'Intérieur et Chef de Cabinet, 137, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Casarès (Jésus), 93, Calle San Andrès.— La Coruña (Espagne).

Casteels (L.), docteur en sciences physiques et mathématiques, assistant à l'Observatoire Royal, 11, avenue Houzeau. — Uccle (Bruxelles).

Caufriez (Henri), ingénieur en chef, directeur d'administration au Ministère des Chemins de Fer, directeur général de la Société nationale des Chemins de fer vicinaux, 28, avenue Albert-Élisabeth, ou, 14, rue de la Science. — Bruxelles.

Charles (R. P. Jean), S. J., Institut St-Ignace, 37, Courte rue Neuve. — Anvers.

Charles (R. P. Pierre), S. J., 11, rue des Récollets. — Louvain.

Charron (E.), docteur ès sciences physiques, professeur à l'Université catholique, 13, rue de Toul. — Lille (Nord — France).

Claerhout (Abbé J.), curé de Caster, par Anseghem.

Claes (F.), conservateur du Musée du Steen, 12, rue St-Vincent. — Anvers.

Claeys Bouuaert (A.), sénateur, 6, rue d'Orange. — Gand.

Cocheteux (Chan.), curé de St-Jacques, 13, rue Thérésienne. — Bruxelles.

Cogels (J.-B.-Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.

Colegio de Estudios superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — Bilbao (Espagne).

Colens, ingénieur et secrétaire général du Département des Chemins de fer, Marine, Postes et Télégraphes, 40, rue Juste-Lipse. — Bruxelles.

Collangettes (R. P.), S. J., professeur de physique à l'Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).

Collantes (Pedro), 2ª calle del Puente de Alvarado, 39, — Mexico (Mexique).

Collège Notre-Dame de la paix, 57, rue de Bruxelles. — Namur.

Collège Saint-François-Xavier, 30, Park Street. — Calcutta (Indes anglaises, via Brindisi).

Collège Saint-Ignace. — Sarria (Barcelone. — Espagne).

Collège Saint-Jean-Berchmans, 35, Place de Meir. — Anvers.

Collège Saint-Jean-Berchmans, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.

Collège Saint-Jean-Berchmans, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Collège Saint-Servais, 92, rue Saint-Gilles — Liége.

Collège de la Sainte-Trinité, Vieux-Marché. — Louvain.

Collin (Abbé Henri), professeur à l'Institut catholique de Paris, École des Carmes, rue de Vaugirard. — Paris (XV^e^).

Conroy (Charles-C.), P. O. Box, 281. — Pasadena (Californie).

Convent (Alf.), docteur en médecine. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

Cooreman (Gérard), membre de la Chambre des Représentants, 161, avenue Louise. — Bruxelles.

Coppens (A.), professeur à l'Université de Louvain, ingénieur en chef du service des recherches de la Fabrique Nationale d'Armes de guerre, 5, rue Renkin. — Liége.

Cousot (D^r^ Georges), membre de l'Académie Royale de médecine. — Dinant.

Crame (Auguste), colonel d'artillerie retraité, 42, rue des Moines. — Gand.

Crooy (S. G. Mgr), évêque de Tournai.

Crousse (D^r^), 13, rue du Méridien. — Bruxelles.

Cuylits (Charles), directeur de l'asile d'aliénés. — Tournai.

Cuylits (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

Cuylits (Joseph), avocat, 30, rue du Japon. — Uccle (Bruxelles).

Daels (D^r^ Frans), professeur à l'Université, 103, rue Neuve Saint-Pierre. — Gand.

Daubresse (Paul), ingénieur, professeur à l'Université, 98, rue de Paris. — Louvain.

Davelooze (Abbé A.), professeur de sciences au Collège. — Courtrai.

David (P.), docteur en droit et en sciences politiques. — Stavelot ; ou, 50, boulevard Piercot. — Liége.

David (D^r^ Alphonse), maître de conférences à l'Université catholique, 14, rue Saint-Jacques. — Lille (Nord — France).

Davignon (V^te^ Henri), Directeur de la *Revue Générale*, 76, rue de Trèves. — Bruxelles.

De Backer (D^r^ Paul), assistant à l'Université, 67, Coupure. — Gand.

De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.

Debaisieux (Paul), professeur à l'Université, 7, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

De Becker (Mgr Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.

Deboucq (Léon), ingénieur en chef, directeur du 5e arrondissement des Mines, 12, rue Chapelle-Beausart. — Mont-sur-Marchienne.

De Brabandère (Victor), avocat près la Cour d'appel, 57, rue du Marteau. — Bruxelles.

Dechevrens (R. P. Marc), S. J., directeur de l'Observatoire Saint-Louis. — Saint-Hélier (Jersey — Iles de la Manche. — Angleterre).

Declercq (J.), professeur à l'Université, 38, rue Neuve Saint-Pierre. — Gand.

De Jace (Charles), Recteur de l'Université, 272, boulevard d'Avroy. — Liége.

Dejardin (L.), directeur général honoraire des Mines, 138, avenue Defré. — Uccle.

De Jonghe (E.), professeur à l'Université de Louvain, 28, avenue Longchamp. — Uccle (Bruxelles).

De Lantsheere (Dr J.), oculiste, 11, rue Traversière. — Bruxelles.

Delassus (Dr Agile), professeur à l'Université catholique, doyen de la Faculté libre de médecine, 46, boulevard de la Liberté. — Lille (Nord — France).

Delattre (Dr Antoine), prosecteur d'anatomie à l'Université catholique, 116, rue d'Isly. — Lille (Nord — France).

De Launay, membre de l'Institut, professeur à l'École Nationale supérieure des Mines, 55, rue de Babylone. — Paris.

Delépine (Abbé Gaston), professeur de géologie à l'Université catholique, 13, rue de Toul. — Lille (Nord — France).

Delépine (Dr Joseph), assistant de clinique chirurgicale à l'Université catholique, 15, rue de Puebla. — Lille (Nord — France).

DELÉTREZ (Dr A.), membre titulaire de l'Académie Royale de Médecine, 259, avenue de Tervueren. — Bruxelles.

DELEVAL (Henri), ingénieur aux Ateliers métallurgiques de Tubize, 1, rue de Bruxelles. — Tubize.

DELFOSSE (Dr), 105, avenue du Prince d'Orange. — Bruxelles.

DELMARCEL (G.), professeur à l'Université de Louvain, 232, avenue Molière. — Ixelles.

DELMER (Alexandre), ingénieur au Corps des Mines, 15, rue Gérard, Cinquantenaire. — Bruxelles.

DELVIGNE (R. P. René), S. J., professeur à la Faculté des Sciences, Collège N.-D. de la Paix, 57, rue de Bruxelles. — Namur.

DELVOSAL (Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, astronome adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, 84, rue Rouge. — Uccle (Bruxelles).

DEMANET (Abbé Félix), professeur au Collège de Belle-Vue. — Dinant.

DEMANET (Chan. S.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, 23, rue de Bériot. — Louvain.

DEMANET (M.), ingénieur, 161, avenue Molière. — Bruxelles.

DE MEULEMEESTER (D.), chargé de cours à l'Université, 10, boulevard de Kerckhove. — Gand.

DE MUNNYNCK (R. P.), O. P., professeur à l'Université, Albertinum. — Fribourg (Suisse).

DE MUYNCK (Chan. R.), professeur à l'Université, 8, place Saint-Jacques. — Louvain.

DE NEYER (Abbé Léon), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur de mathématiques à l'Institut Saint-Louis, boulevard Botanique. — Bruxelles.

Depape (Abbé Georges), maître de conférences à l'Université catholique, 60, rue du Port. — Lille (Nord — France).

Deploige (Mgr), professeur à l'Université, Président de l'Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Deroitte (D^{r} Victor), ancien médecin de la colonie de l'État à Gheel, inspecteur adjoint des asiles et des colonies d'aliénés du Royaume, 192, avenue Albert. — Bruxelles.

Descamps-David (Baron), ministre d'État, professeur à l'Université de Louvain, 40, rue Belliard. — Bruxelles.

De Smedt (Abbé), chargé de cours à l'Université, 95, rue de Namur. — Louvain.

Desplats (D^{r} René), 181, rue Nationale. — Lille (Nord — France).

Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.

De Vadder (Victor), avocat à la Cour d'appel, 14, rue Blanche. — Ixelles (Bruxelles).

De Veer (R. P.), S. J., directeur der Vereenigingen G. en W., Abstederdijk, 303. — Utrecht (Pays-Bas).

Devisé (R. P. R.), S. J., 11, rue des Récollets. — Louvain.

De Vos (Abbé Joseph), curé de Heestert (Flandre Occidentale).

De Wildeman (E.), directeur du Jardin Botanique de l'État, 122, rue des Confédérés. — Bruxelles.

D'Halluin (D^{r} Maurice), professeur suppléant à l'Université catholique, 8, rue Nicolas Leblanc. — Lille (Nord — France).

D'Hoop (E.), ingénieur, 80, rue Gachard. — Ixelles.

Diderrich (N.), membre du Conseil colonial, 64, rue Royale. — Bruxelles.

Dierckx (R. P. Fr.), S. J., professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 57, rue de Bruxelles. — Namur.

Dochain-Defer (Félix), industriel. — Couillet.

Dopp (R. P. Henri), S. J., docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Dorlodot (J.), ingénieur civil des Mines, 57, rue de l'Abbaye. — Bruxelles.

de Dorlodot (Chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université, 42, rue de Bériot. — Louvain.

Drion (B^on^ Adolphe), avocat. — Gosselies.

Dubois-Verbrugghen (D^r^ É.), 53, rue Marie-Thérèse. — Bruxelles.

Dubois (Ernest), directeur de l'Institut supérieur de commerce, membre du Conseil colonial, 36, rue de Vrière. — Anvers.

Dubois (Vital), docteur en géographie, directeur de l'École normale. — Virton.

Du Bost, sénateur, 50 ,avenue des Arts. — Bruxelles.

Dufrane (D^r^ C.), chirurgien à l'hôpital, 36, rue d'Havré. — Mons.

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, Château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).

Dumez (Abbé Robert), docteur en sciences naturelles, professeur au Petit Séminaire. — Roulers (Flandre Occidentale).

Duplat (G.), avocat à la Cour d'appel, 48, rue aux Laines. — Bruxelles.

Dupont (D^r^ Émile), médecin principal, directeur de l'hôpital militaire de Bruxelles, 12, rue Goffart. — Bruxelles.

Dupret, sénateur, 148, rue Royale. — Bruxelles.

Dupriez (Léon), professeur à l'Université, 194, rue de Bruxelles. — Louvain.

Dupuis (Henri), ingénieur, administrateur de la Société anonyme des Usines de Montcherret. — Acoz (Hainaut)

Duquenne (D^r^ Louis), 15, rue Lonhienne. — Liége.

Dusausoy (Clément), professeur émérite de l'Université de Gand. — Virginal (Brabant).

Dusmet y Alonso (José-Marie), docteur en sciences naturelles, 19, Claudio Coello. — Madrid.

Duthoit (E.), professeur à l'Université catholique, 141, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Dutilleux (Maurice), ingénieur, 3, place François-Bossuet. — Bruxelles.

Dutordoir (Hector), ingénieur en chef, directeur du service technique provincial, 217, boulevard du Château. — Gand.

Dutordoir (Augustin), 217, boulevard du Château. — Gand.

École libre de l'Immaculée Conception. — Vaugirard Paris).

École libre Sainte-Geneviève. — Versailles.

Egan (R. P. Michel), S. J., M. A., F. R. U. I., 35, Lower Leeson Street. — Dublin (Irlande).

Fabry (Louis), correspondant de l'Institut, astronome à l'Observatoire, 49, chemin des Chartreux. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

Fallon (R. P. Valère), S. J., docteur en sciences politiques et sociales, professeur de philosophie morale, 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Favereau de Jenneret (B^on^), président du Sénat, 10, rue Belliard. — Bruxelles.

Favrelle (Maurice), 14, rue des Pyramides. — Lille (Nord — France).

Fernandès (D^r^ Rob.), 1, rue du Pôle. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

Ferrata (S. É. le cardinal). — Rome.

Fiessinger (D^r^), membre correspondant de l'Académie de médecine, 4, rue de la Renaissance. — Paris.

Petit Séminaire épiscopal de Floreffe.

de Fooz (Guillaume), ingénieur civil des Mines, docteur en sciences physiques et mathématiques, 52, boulevard Albert. — Gand.

Fouarge (D^r^ Léopold), 79, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Fournier (Dom Grégoire), O. S. B., abbaye du Mont César. — Louvain.

François (D^r^ Adhémar), 97, rue Belliard. — Bruxelles.

Francotte (Xavier), membre de l'Académie Royale de Médecine, professeur à l'Université, 15, quai de la Grande-Bretagne. — Liége.

Gaillard (R. P. José), S. J., Collège St-Michel, 24, boulevard Saint-Michel. — Bruxelles.

Georgetown College Observatory (Rev. Director of the). — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

Gerard (Ernest), secrétaire général honoraire du Ministère des Chemins de fer, 21, avenue de la Renaissance. — Bruxelles.

Gilbert (Paul), ingénieur. — Heer-Agimont (Namur).

Gillain (Abbé Jules), ingénieur agricole, professeur de sciences au Collège St-Joseph. — Virton.

Gillès de Pélichy (B^on Ch.), membre de la Chambre des Représentants. — Gits-lez-Roulers ; ou, rue Fossé-aux-Loups. — Bruges.

Gillet (R. P. Charles), S. J., St Albert's Seminary, Karbala Tank road. — Ranchi (Behar and Orissa) — British India.

Gillet (Joseph J. E.), docteur en sciences, professeur à l'Athénée royal de Bruxelles, 106, rue Saint-Bernard. — Bruxelles.

Gillon (G.), professeur à l'Université, 5, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Glorieux, docteur en médecine, 236, avenue de Tervueren. — Woluwe-Saint-Lambert.

Goedseels (Édouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique, avenue Circulaire. — Uccle (Bruxelles).

Goedseels (Joseph), avocat près la Cour d'appel, conseiller juridique à l'armée belge, 152, chaussée d'Ixelles. — Bruxelles.

Goedseels (D^r Léon), 13, rue Crespel. — Bruxelles.

Goffinet (H.), avocat à la Cour d'appel, 36, rue des Deux-Églises. — Bruxelles.

Gollier (Théophile), professeur à l'Université de Liége, 92, rue Africaine. — Bruxelles.

Gonzalez de Castejon (Miguel), comte d'Aybar, lieutenant-colonel d'État-Major, intendant général de la Maison Royale d'Espagne, Real palacio. — Madrid.

Goris (Ch.), docteur en médecine, membre titulaire de l'Académie Royale de Médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.

Goubau (R.), docteur ès sciences, professeur à l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

Granito di Belmonte (S. É. le cardinal). — Rome.

de Greeff (R. P. Henri), S. J., professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 57, rue de Bruxelles. — Namur.

Grégoire (Chan. Victor), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, membre associé de la Linnean Society de Londres, 42, rue de Bériot. — Louvain.

Greindl (Bon Léon), lieutenant-général retraité, 19, rue Tasson-Snel. — Bruxelles.

Grinda (Jésus), inspecteur général des chaussées, canaux et ports, 24, rue Sagasta. — Madrid.

de Grossouvre (A.), correspondant de l'Institut, ingénieur en chef des Mines en retraite, 7, rue Mayet-Genetry. — Bourges (Cher — France).

Groussau (C.), député du Nord, professeur à l'Université catholique de Lille, 26, rue St-Louis. — Versailles.

Guermonprez (Dr), professeur à l'Université catholique, membre correspondant de l'Académie Royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 63, rue d'Esquermes. — Lille (Nord — France).

Hachez (F.), professeur à l'Université de Louvain, 19, rue de Pavie. — Bruxelles.

Hagen (R. P. Jean), S. J., directeur de l'Observatoire du Vatican. — Rome.

Haibe (Dr Achille), directeur de l'Institut provincial de Bactériologie, membre correspondant de l'Académie Royale de médecine de Belgique, rue Louise. — Namur.

Hallez (E.), ingénieur-directeur au Charbonnage du Grand-Hornu. — Hornu (Hainaut).

Hamonet (Chan.), professeur à l'Institut catholique, 5, place du Château. — Le Mans (Sarthe — France).

Harmant (Émile), ingénieur, membre du Conseil supérieur du Travail, 121, rue de Pâturages. — Wasmes (Hainaut).

Haton de la Goupillière (J.-N.), membre de l'Institut, directeur honoraire de l'École des Mines 9, rue du Lycée. — Pau (Basses-Pyrénées — France).

Hauptmann (Max), directeur de la Banque commerciale de Belgique, 71, rue Royale. — Bruxelles.

Havenith (J.), adjoint d'État-Major, 2, place Quetelet.— Bruxelles.

Havet (Dr J.), professeur à l'Université, 87, rue des Flamands. — Louvain.

Hebbelynck (Mgr A.), recteur magnifique honoraire de l'Université de Louvain. — Meirelbeke (Gand).

Helleputte (G.), ministre d'État, 10, place St-Antoine. — Louvain.

de Hemptinne (Alexandre), professeur à l'Université de Louvain, 51, rue Basse des Champs. — Gand.

Henrard (Dr Étienne), 11, rue Joseph II. — Bruxelles.

Henrard (Dr Félix), 38, rue Washington. — Bruxelles.

Henry (Albert), docteur en droit, directeur général au Ministère de l'Agriculture, 216, avenue Rogier. — Bruxelles.

Henseval (Dr Maurice), professeur à l'Université, correspondant à l'Académie Royale de médecine, Institut d'hygiène, rue Kluyskers. — Gand.

Heylen (S. G. Mgr), évêque de Namur.

Heymans (Dr F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 3, quai de la Biloque. — Gand.

Houdmont (Dr Hippolyte), 3, rue de l'Abondance. — Schaerbeek (Bruxelles).

Iniguez y Iniguez (Francisco), cathedrático de astronomia en la Universidad central, ex-director del Observatorio astronomico, calle de Atocha, 57 y 59. — Madrid.

Institut Saint-Ignace, 37, Courte rue Neuve. — Anvers

Institut Saint-Louis, 38, boulevard Botanique. — Bruxelles.

Jacobs (Fernand), président de la Société belge d'astronomie, 344, avenue Louise. — Bruxelles.

Janne (Henry), ingénieur civil des Mines, docteur en sciences physiques et mathématiques, répétiteur à l'Université, 142, avenue de l'Observatoire. — Liége.

Janssen (A.), docteur en droit, 81, rue d'Arlon. — Bruxelles.

Janssens (Chan. F. A.), professeur à l'Université, 20, rue du Canal. — Louvain.

Javaux (Dr), 79, rue des Éburons. — Bruxelles.

Joly (Albert), juge au Tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse Tour. — Bruxelles.

Joly (Léon), conseiller au Conseil des Mines, 58, avenue Brugman. — Bruxelles.

Jordan (Camille), membre de l'Institut, professeur honoraire de l'École polytechnique, 46, rue de Varennes. — Paris.

Kaisin (Félix), professeur à l'Université, 38, rue de Bériot. — Louvain.

Kersten (Joseph), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Kieffer (Abbé J. Jacques), docteur en philosophie naturelle, professeur au Gymnase épiscopal. — Bitche (Moselle — France).

Kirsch (R. P. Alexandre-M)., C. S. C., Université de Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

Kirsch (Mgr J. P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).

de Kowalski (Dr Joseph), ministre de Pologne près le St-Siège, 56, Via Nomentana. — Rome.

Kowalski (J.), docteur en sciences naturelles, 97, rue de Paris. — Nantes.

Ladeuze (Mgr Paulin), recteur magnifique de l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.

LAGAE, professeur de mathématiques supérieures. — Drèves-Thuin.

LAGASSE DE LOCHT (Charles), directeur général honoraire des Ponts et Chaussées, ayant rang de Secrétaire général, président de la Commission royale des monuments et des sites, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

LAGASSE DE LOCHT (Édouard), ingénieur. — Reckheim (Limbourg).

LAGASSE DE LOCHT (Victor), ingénieur civil des Mines et ingénieur électricien, 36, rue Capouillet. — Bruxelles.

LAMBIN (A.), ingénieur en chef, directeur des Ponts et Chaussées, 181, avenue de Tervueren. — Woluwe-St-Pierre (Bruxelles).

LAMBIOTTE (Omer), directeur-gérant des Charbonnages Élisabeth. — Auvelais (prov. de Namur).

LAMBO (R. P. Charles), S. J., supérieur de l'Institut St-Ignace, 37, Courte rue Neuve. — Anvers.

LAMBOT (Oscar), professeur à l'Athénée royal d'Ixelles, 56, avenue Malou. — Bruxelles.

LAMINNE (S. G. Mgr Jacques), Évêque titulaire d'Inschilla, auxiliaire de S. G. Mgr l'Évêque de Liége, 14, rue de l'Évêché. — Liége.

LANGE (R. P. René), S. J., 11, rue des Récollets. — Louvain.

LANNOY (R. P. Jules), S. J., Collège Saint-Michel, 14, rue des Ursulines — Bruxelles.

DE LAPPARENT (Jacques), professeur de pétrographie à la Faculté des sciences de Strasbourg, 12, quai Koch. — Strasbourg (Alsace — France).

DE LAUBIER, industriel, 6, rue de la Gare. — Roubaix.

LEBIZAY (Major A. E. M.), professeur d'Artillerie à l'École militaire, 116, avenue de Woluwe. — Woluwe-Saint-Lambert.

LEBRUN (D^r^ Hector), professeur à l'Université, 43, boulevard Léopold. — Gand.

LECAT (Maurice), docteur en sciences physiques et mathématiques, docteur en sciences naturelles, ingénieur civil des Mines, 92, avenue des Alliés. — Louvain.

LE CHATELIER (H.), membre de l'Académie des Sciences, professeur à la Sorbonne et à l'École Supérieure des Mines, associé de l'Académie Royale de Belgique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris (VI^e^).

LEFEBVRE (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.

LEFEBVRE (R. P. Maurice), provincial des Missions de Scheut, docteur en sciences naturelles, 476, chaussée de Ninove. — Scheut (lez-Bruxelles).

LEJEUNE DE SCHIERVEL (Charles), ingénieur des Mines, 12, rue Stévin. — Bruxelles.

LEJEUNE-SIMONIS, château de Sohan. — Pepinster (prov. de Liége).

LEMAIRE (D^r^ A.), professeur à l'Université, 88, rue de Tirlemont. — Louvain.

LEMAIRE (Emmanuel), ingénieur en chef directeur des mines, professeur à l'Université de Louvain. — Erbisœul.

LEMOINE (Georges), Président de l'Académie des sciences, inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, professeur honoraire de l'École Polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris.

LENOBLE (E.), doyen de la Faculté des Sciences de l'Université catholique, 36, rue Négrier. — Lille (Nord — France).

LE PAIGE (G.), membre de l'Académie Royale de Belgique, administrateur-inspecteur de l'Université, plateau de Cointe. — Liége.

LEPOUTRE (D^r^ Carlos), professeur suppléant à l'Université catholique, 19, rue de Bourgogne. — Lille (Nord — France.

LESNE (Mgr Émile), recteur de l'Université catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

LEVIE (Michel), ministre d'État, 68, rue du Méridien — Bruxelles.

LHOEST (Henri), ingénieur, directeur-gérant du charbonnage de La Haye, 6, avenue Mahiels. — Liége.

LIBBRECHT (D^{r} W.), Institut de Physiologie, 19, rue des Doyens. — Louvain.

LIÉVIN (Abbé Omer), maître de conférences à l'Université catholique, 58, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

DE LIMBURG-STIRUM (C^{te} Adolphe), 72, rue du Trône. — Bruxelles.

LIMPENS (Émile), avocat. — Termonde.

LUCAS (R. P. J. Désiré), S. J., professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 57, rue de Bruxelles. — Namur.

MAES (D^{r} Édouard), 51, rue Saint-Lazare. — Bruxelles.

MAES (Jos.), docteur en géographie, conservateur de la Section ethnographique au Musée du Congo. — Tervueren.

MAFFI (S. É. le Cardinal), archevêque de Pise.

MAJORIN-ANTOINE (Frère), des Frères des Écoles chrétiennes, professeur au pensionnat St-Berthuin. — Malonne (pr. de Namur).

MALENGRAU (F.), professeur à l'Université, Institut de physiologie, 19, rue des Doyens. — Louvain.

MANSION (Augustin), professeur à l'Université, 126, rue de Tirlemont. — Louvain.

MANSION (Hubert), ingénieur, 76, boulevard Victor Hugo.— Neuilly (Seine — France).

MARCHAL (Chan. Louis), professeur à l'Université, 36, rue de Diest. — Louvain.

MARÉCHAL (R. P. Joseph), S. J., docteur en sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

MAROY (D^{r} L.), 4, boulevard St-Michel. — Bruxelles.

MARTIN (D^{r} Is.), 6, boulevard d'Omalius. — Namur.

MASEN (D^{r} Aimé), docteur en médecine, 30 rue de Middelbourg. — Boitsfort (Brabant).

MATAGNE (D^{r} Henri), docteur en médecine, 31, avenue des Courses. — Bruxelles.

Matignon, professeur de chimie au Collège de France, 9, place Marcellin Bertholet. — Paris.

Maubert Justin (Frère), des Frères des Écoles chrétiennes, professeur de Géographie au Scolasticat de Jesu Placet. — Louvain.

de Maupeou (Cte), ingénieur, directeur du Génie maritime, 4, place du Gast. — Laval (Mayenne — France).

de Meester (Emmanuel), sénateur, 27, rue Montebello. — Anvers.

de Meeus (Cte Louis), docteur en droit, château d'Argenteuil. — Waterloo.

Mélot (Aug.), rue Grandgagnage. — Namur.

de Mendizabal Tamborel (Joaquin), ingeniero geografo, profesor de astronomia y geodesia en el colegio militar, 5 calle de Manuel Doblado, nº 67. — Mexico (Mexique).

Mennes (D.-F.), 77, avenue de France. — Anvers.

Mennes (Auguste), ingénieur, 9, rue Van Ertborn.—Bruxelles.

Mercier (S. É. le Cardinal), archevêque de Malines.

Merten (Albert), ingénieur, professeur à l'Université, 25, boulevard Albert. — Gand.

Mertens (Albert), professeur à l'Université de Louvain, 100, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Meurice (Léon), professeur à l'Université de Liége. — Visé.

Meuwissen (J.), ingénieur, professeur à l'Université, 176, chaussée de Courtrai. — Gand.

Meyer (R. P. Léon), S. J., Colegio Nobrega. — Récipe (Brésil).

Michiels (Dr Jules), 71, rue de Tirlemont. — Louvain.

Michiels (L.), chargé de cours à l'Université, 150, rue Frédéric-Lints. — Louvain.

Michotte (Albert), professeur à l'Université, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Michotte (Abbé P.), professeur à l'Université, 17, rue des Récollets. — Louvain.

Moeller (Dr A.), membre de l'Académie Royale de médecine, 23, rue du Taciturne. — Bruxelles.

DE MOFFARTS (B^{on} Paul), château de Botassart, par Noirefontaine (prov. de Luxembourg).

DE MONTESSUS DE BALLORE (C^{te} F.), directeur du service séismologique du Chili, 206, av. A. Varas, Providencia. — Santiago (Chili).

DE MONTESSUS DE BALLORE (V^{te} Robert), lauréat de l'Institut, docteur ès sciences mathématiques, professeur à l'Université catholique de Lille, professeur libre à la Faculté des Sciences de Paris, membre du Comité de rédaction du « Journal des mathématiques pures et appliquées », 15, boulevard Bigo-Danel. — Lille (Nord — France).

MOREAU (Fernand), docteur en sciences physiques et mathématiques, assistant à l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).

MOREAU (R.), ingénieur aux Mines d'Anzin, 3, rue de Paris. — — Denain (Nord — France).

MORELLE (D^r Aimé), chef du service d'urologie et de dermatologie à l'Institut chirurgical, 26, rue Archimède. — Bruxelles.

MOREUX (Abbé Th.), directeur de l'Observatoire. — Bourges (Cher — France).

MORISSEAUX (Ch.), ingénieur honoraire des Mines, membre du Conseil Colonial, directeur du Crédit Général Liégeois à Bruxelles, 60, rue Royale. — Bruxelles.

MULLIE (Gilbert), inspecteur vétérinaire adjoint au Ministère de l'Agriculture, 23, avenue Jean Linden. — Bruxelles.

MUND (Walter), professeur à l'Université, 24, rue de Malines — Louvain.

NAVA DI BONTIFE (S. É. le Cardinal), archevêque de Catane (Sicile — Italie).

NAVAS (R. P. Longin), S. J., Apartado, 32. — Zaragoza (Espagne).

NELIS (C.), professeur à l'Université de Louvain, 334, chaussée de Namur. — Héverlé.

Nerincx (Alfred), professeur à l'Université, secrétaire de l'Institut de Droit International, 63, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Neuberg (J.), membre de l'Académie Royale de Belgique, professeur émérite de l'Université de Liége, 6, rue de Sclessin. — Liége.

Noblesse (Chan. C.), professeur à l'Université, Collège Adrien VI, place de l'Université. — Louvain.

Noyons (A.), professeur à l'Université, 35, boulevard de Tirlemont. — Louvain.

Nyssens (Pierre), directeur du Laboratoire agricole de l'État, 58, boulevard du Château. — Gand.

Obeso (R. P. Manual), S. J., Colegio de Estudios Superiores de Deusto. — Bilbao (Espagne).

d'Ocagne (Maurice), inspecteur général des Ponts et Chaussées, professeur à l'École Polytechnique, 30, rue de la Boétie. — Paris.

Orban de Xivry (B^on^), sénateur, avenue des Alliés. — Louvain.

Orman (E.), professeur à l'Université, 20, rue du Canal. — Louvain.

Parent (Abbé O.), professeur à l'Institution Ste-Marie. — Aire-sur-la-Lys (Pas-de-Calais — France).

Pasquier (Alfred), docteur en médecine. — Châtelet (Hainaut).

Pasquier (Ernest), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Pauwels (R. P. Joseph), S. J., docteur en sciences naturelles, professeur de chimie, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Picard (É.), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, professeur à la Sorbonne, Palais de l'Institut, quai Conti. — Paris (VI^{e}).

Pieraerts (J.), consevateur au Musée colonial de Tervueren, 161, avenue F. Lambeau. — Bruxelles.

de Pierpont (Édouard), député permanent, château de Rivière (prov. de Namur).

DU PLESSIS (Joachim), licencié ès sciences, chimiste à la Soierie de Tubize. — Tubize.

POULLET (Prosper), professeur à l'Université de Louvain, membre de la Chambre des Représentants, délégué de Belgique à la Société des Nations, 30, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

PROOST (Alphonse), directeur général honoraire au Ministère de l'Agriculture, 227, rue Royale Ste-Marie. — Bruxelles.

PROVINCIAL (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale — Bruxelles.

PRUVOST (Pierre), docteur ès sciences, maître de conférences à l'Université, 159, rue Brûle-Maison. — Lille (Nord — France).

PUISEUX (P.), membre de l'Institut, 2, rue de Verrier. — Paris.

QUILLIET (S. G. Mgr Hector-Raphaël), évêque de Lille, 68, rue Royale. — Lille (Nord — France).

RACHON (Abbé Prosper), curé de Ham, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

RAQUET (Désiré), pharmacien de 1re classe, professeur suppléant à l'Université catholique, 114, rue Solférino. — Lille (Nord — France).

RAYMOND (Frère), professeur de Sciences, 19, rue Moris. — St-Gilles (Bruxelles).

RECTOR (R. P.) del Colegio del Jesús. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

REGNAULT (Bon Édouard), 40, boulevard du Roi. — Versailles (France).

RENAUD, professeur de métallurgie à l'Université de Gand, 54, Boulevard Lousbergs. — Gand.

DE RENESSE (Cte), sénateur, 25 rue de la Science. — Bruxelles.

RENIER (Armand), ingénieur au Corps des Mines, chef du Service géologique de Belgique, chargé de cours à l'Université de Liége, 97, avenue de l'Armée. — Bruxelles.

RENOIRTE (Fernand), chargé de cours à l'Univefsité, 126, rue de Tirlemont — Louvain.

de Ribaucourt (C^{te} Gaston), ingénieur électricien, château de Perck (par Vilvorde).

Richald (Jos.), professeur à l'Université de Gand, ingénieur en chef, directeur des Ponts et Chaussées, 69, rue Archimède. — Bruxelles.

Rinaldi (S. É. le Cardinal). — Rome.

Rodriguez Risueno (Emiliano), catedratico de historia natural en la Universidad, Obispo, 9, pral — Valladolid (Espagne).

Roersch (A.), professeur à l'Université, 16, place du Casino. — Gand.

Rogie (D^{r}), professeur à l'Université catholique, 56, rue Port. — Lille (Nord — France).

Roland (Pierre), ingénieur, 15, avenue Lepoutre. — Bruxelles.

Rome (Abbé A.), professeur au Collège de Ste-Gertrude. — Nivelles.

Rutten (S. G. Mgr), évêque de Liége.

Sabatier (Paul), membre de l'Académie des Sciences de Paris. — Toulouse (Haute-Garonne — France)

Sageret, château de Kervihan, par Carnac (Morbihan — France).

Salée (Achille), professeur à l'Université, Musée et laboratoire de Paléontologie, 38, rue de Bériot. — Louvain.

Schaffers (R. P. Victor), S. J., docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Scherpereel (Abbé Clément), aumônier militaire, Caserne rouge. — Aix-la-chapelle.

Scheuer (R. P. Pierre), S. J., 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Schilde (B^{on}), château de Schilde (province d'Anvers).

de Schilde (B^{on} G.), gouverneur de la province d'Anvers. — Anvers.

Schmitz (R. P. Gaspard), S. J., professeur et directeur du

Cabinet de Géologie au Collège St-Jean-Berchmans, 11, rue des Récollets. — Louvain.

SCHOCKAERT (R.), professeur à l'Université, 133, rue de Tirlemont. — Louvain.

SCHOONJANS (R. P. Charles), S. J., Collège Saint-Servais, 92, rue Saint-Gilles — Liége.

SCHREIBER, directeur général au Ministère de l'Agriculture, 58, rue des Boers. — Etterbeek (Bruxelles).

SCHUL (R. P. Jean), S. J., Institut St-Ignace, 37, Courte rue Neuve. — Anvers.

SEGERS (Paul), ministre d'État, 73, chaussée de Malines. — Anvers.

SEGHERS (S. G. Mgr), évêque de Gand.

DE SELLIERS DE MORANVILLE (Cher A.), lieutenant-général, 153, avenue Molière. — Ixelles.

SENDERENS (Mgr), directeur des sciences de l'Institut catholique, 31, rue de la Fonderie. — Toulouse.

SIBENALER (N.), professeur à l'Université, 31, boulevard de Jodoigne. — Louvain.

SIÈGES, docteur en droit et en philosophie, 11, Ienaerstrasse. — Berlin, Wilmersdorf.

SILVERYSER (Abbé Florent), professeur au Collège de Herck-la-Ville.

SIMONART (Fernand), chargé de cours à l'Université, Collège du St-Esprit, rue de Namur. — Louvain.

DE SINÉTY (Abbé Robert), Séminaire. — Vals (Haute-Loire— — France).

SIRET (Henri), ingénieur, administrateur-délégué, directeur général de la Société anonyme Union Allumettière, 27, avenue Brugman. — Bruxelles.

SIRET (Louis), ingénieur, 65, avenue Louis Lepoutre. — Ixelles.

SLINGENEYER DE GOESWIN, général-major, 11, rue van Schoonbeke. — Anvers.

SMEDTS (Arthur), répétiteur à l'Université, 60, boulevard St-Liévin. — Gand.

SMEKENS (Th.), président honoraire du Tribunal de 1re instance, 34, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

SMETS (Dr H.), 104, rue Van de Weyer. — Bruxelles.

SMITS (Eugène), ingénieur, 93, avenue Brugman. — Bruxelles.

SOISSON (G.), ingénieur, docteur ès sciences, professeur, 6, rue Goethe. — Luxembourg (Grand-Duché).

SOLÉ (Dr Victor), médecin en chef de l'Institut SS. Jean et Élisabeth, 251, avenue de Tervueren. — Bruxelles.

SOMVILLE (Oscar), docteur en sciences physiques et mathématiques, 64, avenue de la Floride. — Uccle (Bruxelles).

DE SPARRE (Cte), correspondant de l'Institut, doyen de la Faculté catholique des Sciences, 2, place St-Jean. — Lyon (France).

STAINIER (Xavier), professeur à l'Université, 7, boulevard des Hospices. — Gand.

STILLEMANS (Jean), ingénieur, directeur des travaux d'Etterbeek, 25, rue Champ du Roi. — Bruxelles.

STOFFAES (Chanoine), professeur à l'Université catholique, directeur de l'Institut des Arts et Métiers, 6, rue Auber. — Lille (Nord — France).

STORMS (Ernest), ingénieur, 6, rue du Receveur. — Bruges.

STOUFFS (Dr Jules), 166, avenue Louise. — Bruxelles.

STOUFFS (Dr L.), 53, rue de Charleroi. — Nivelles.

STRUELENS (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

SWOLFS (Oscar), 118, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.

SWYNGEDAUW (René), professeur de physique à l'Université, directeur de l'Institut électrotechnique, 14, rue Fulton. — Lille (Nord — France).

TAYMANS (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).

TEILHARD (Abbé), 13, rue du Vieux Colombier. — Paris (VIe).

TERLINDEN (C.), professeur à l'Université de Louvain, 61, avenue Legrand. — Bruxelles.

TERMIER (Pierre), membre de l'Institut, directeur du Service de la Carte Géologique de la France, professeur à l'École des Mines, 166, rue de Vaugirard. — Paris.

THÉBAULT (V.), directeur de manufacture à Ernée (Mayenne — France).

THÉRON (Joseph), docteur en sciences physiques et mathématiques, préfet des études à l'Athénée royal. — Chimay.

THIÉBAUD (Fernand), 199, avenue du Longchamp. — Bruxelles.

THIÉRY (Chan. Armand), Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

THILLIEZ (Léonce), professeur à l'Université catholique, 33, boulevard de la Liberté. — Lille (Nord — France).

TIBBAUT (B^{on} Émile), avocat à la Cour d'appel, membre de la Chambre des Représentants, 4, avenue de l'Astronomie. — Bruxelles.

TILLIEUX (Abbé J.), directeur du Collège. — Mechelen-sur-Meuse.

TIMMERMANS (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 30, quai de Fragnée. — Liége.

TITS (D^r A.), oculiste, 89, rue de Bruxelles. — Louvain.

TORRES QUEVEDO (Leonardo), correspondant de l'Institut, 3, Valgame Dios. — Madrid.

TORROJA (Antonio), Professeur à l'Université. — Barcelone (Espagne).

DE T'SERCLAES (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

DE T'SERCLAES (C^{te} Jacques), lieutenant du génie, 82, rue Saint-Georges. — Bruxelles.

DE VALKENEER (Sylvain), ingénieur civil, A. I. G., ingénieur électricien, candidat en sciences physiques et mathématiques, 39, rue Ste-Catherine. — Bruxelles.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Ch.-J.), correspondant de l'Institut, membre de l'Académie Royale de Belgique, professeur à l'Université, 149, avenue des Alliés. — Louvain.

Van Ballaer (Mgr), Prélat de la Maison de S. S. le Pape, Chanoine de l'Église métropolitaine, 34, avenue Van Beneden. — Malines.

Van Brabant (Léon), ingénieur en chef, Directeur des Ponts et Chaussées, Directeur général au Ministère des Chemins de fer, Marine, Postes et Télégraphes, 89, rue Joseph II. — Bruxelles.

Van Caeneghem (Chanoine F.), curé-doyen du Rœulx. (Hainaut).

Van den Bossche (Abbé). — Ophasselt (Flandre Orientale).

Van den Heuvel (J.), ministre d'État, 29, rue Savaen. — Gand.

Vanderlinden, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, administrateur émérite de l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

Vanderlinden (Émile), météorologiste à l'Institut Royal Météorologique, 1026, chaussée de Waterloo. — Uccle.

Van der Mensbrugghe (André), docteur en droit, licencié ès sciences sociales, diplômé des sciences pénales, 33, rue du Châteaudun. — Paris.

Van der Mensbrugghe (Robert), ingénieur principal des Chemins de fer de l'État, 36, rue du Tabellion. — Bruxelles.

Van der Smissen (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége et à l'École de Guerre, 13, rue des Cultes. — Bruxelles.

Vanderstraeten (Dr A.), professeur à l'Université de Louvain, 79, rue du Trône. — Bruxelles.

Van der Vaeren (J.), chef de cabinet au Ministère de l'Agriculture, professeur à l'Université de Louvain, 255, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.

Vandevyver (Maurice), docteur en droit, 35, boulevard De Kerkhove. — Gand.

Van de Vyvere, ministre des régions dévastées, 8, boulevard Léopold. — Gand.

Van Durme, docteur en médecine, professeur à l'Université, 34, rue de la Monnaie. — Gand.

Van Gehuchten (Paul), docteur en médecine, chez M. Van Biervliet, 121, rue de Bruxelles. — Louvain.

Van Hoeck (Dr Émile), 86, rue Dupont. — Bruxelles.

Van Keerberghen, docteur en médecine, 21, rue du Trône. — Bruxelles.

Van Ortroy (Fernand), professeur à l'Université, 35, quai des Moines. — Gand.

Van Swieten (Raymond), 41, rue des Drapiers. — Bruxelles.

Van Ysendyck (William), octeur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Verhelst (Abbé F.), aumônier du Pensionnat du Sacré-Cœur, 9, avenue Henri Dietrich. — Bruxelles.

Vermeersch (R. P. Arthur), S. J., docteur en droit et en sciences politiques et administratives, professeur à l'Université grégorienne, 120, via del Seminario. — Rome.

Vermeersch (Paul), avocat, professeur à l'Université, 24, vieux quai aux Violettes. — Gand.

Verriest (Gustave), docteur en sciences physiques et mathématiques, ingénieur civil des Mines, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verschaffel (R. P. A.), membre correspondant de l'Institut de France, directeur de l'Observatoire d'Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Versteylen, rue d'Hérenthals. — Turnhout.

Vervaeck, docteur en médecine, directeur du Service d'Anthropologie pénitentiaire, 35, rue Verhulst. — Uccle.

Visart de Bocarmé, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.

Visart de Bocarmé (Vte Amédée), membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre de Bruges.

Vitoria (R. P. Eduardo), S. J., directeur de l'Institut de Chimie de Sarria. — Barcelone.

de Vorges (Alb.). — Paray-le-Monial (Saône-et-Loire — France).

de Vrégille (R. P. Pierre), S. J., professeur à la Faculté Française de Médecine, Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).

Waffelaert (S. G. Mgr), évêque de Bruges.

de Walque (François), professeur émérite de l'Université, 28, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Warlomont (René), médecin général en retraite, docteur en sciences naturelles, 66, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Wasmann (R. P. Éric), S. J., Collège St-Ignace. — Valkenburg (Limbourg Hollandais).

Wasteels (C.), professeur à l'Université, 30, rue d'Akkergem. — Gand.

Wéry (Dr Aug.). — Sclayn (prov. de Namur).

Wibo (Dr Maurice), médecin oculiste, 107, avenue de la Toison d'Or. — Bruxelles.

Willaert (R. P. Fernand), S. J., docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets — Louvain.

Williame (Aimé), ingénieur en chef, directeur de service au Ministère des Chemins de fer, 20, place Dailly. — Schaerbeek.

Witz (Aimé), correspondant de l'Institut, professeur à l'Université catholique, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Witz (Abbé Fernand), professeur à l'École d'électricité de l'Université catholique, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Wolters (Frédéric), ingénieur principal des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université, 17, avenue des Moines. — Gand.

Liste géographique des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1922)

BELGIQUE

FLANDRE OCCIDENTALE : **Bruges** : Visart de Bocarmé (C^{te} A.). — Waffelaert (S. G. Mgr).

Caster, par **Anseghem** : Claerhout (Abbé J.). — **Courtrai** : Davelooze (Abbé A.). — **Heestert** : De Vos (Abbé J.). — **Iseghem** : Gillès de Pélichy (B^{on} Ch.). — **Roulers** : Dumez (Abbé R.).

FLANDRE ORIENTALE : **Gand** : Biot (A.). — Claeys-Boùùaert. — Crame (Aug.). — Daels (D^r Fr.). — De Backer (D^r P.). — De Baets (H.). — Declercq. — De Meulemeester (D.). — Dutordoir (A.). — Dutordoir (H.). — de Fooz. — Goubau. — de Hemptinne (A.). — Henseval (D^r M.). — Heymans (J.-F.). — Lebrun (D^r H.). — Merten (Alb.). — Meuwissen. — Nyssens (P.). — Renaud. — Roersch (A.). — Seghers (S. G. Mgr). — Stainier (X.). — Van den Heuvel. — Vanderlinden. — Vandevyver (M.). — Van de Vyvere. — Van Durme (D^r). — Van Ortroy (F.). — Vermeersch (P.). — Wasteels (C.). — Wolters (F.).

Alost : Collège Saint-Joseph. — **Meirelbeke** : Hebbelynck (Mgr A.). — **Mont-Saint-Amand** (Gand) : Wolters (G.). — **Ophasselt** : Van den Bossche (Abbé). — **Termonde** : Limpens (Émile).

PROVINCE D'ANVERS : **Anvers** : Bastin (F.). — Charles (R. P. J.), S. J. — Claes (F.). — Cogels (J.-B. Henri). — Dubois (E.). — Institut Saint-Ignace. — Lambo (R. P. Ch.), S. J. — de Meester (Emm.). — Mennes. — de Schilde (B^{on} G.). — Schul (R. P. J.), S. J. — Segers (P.). — Siret (L.). — Slingeneyer de Goeswin. — Smekens (Th.). — Supérieur du Collège Saint-Jean-Berchmans.

Malines : Belpaire (Abbé J.). — Dessain (Ch.). — Mercier

(S. É. le cardinal). — Van Ballaer (Mgr). — **Schilde** : de Schilde (B^on^). — **Turnhout** : Versteylen.

LIMBOURG : **Herck-la-Ville** : Silveryser (Abbé Pl.). — **Mechelen-sur-Meuse** : Tillieux (Abbé J.). — **Reckheim** : Lagasse de Locht (Ed.).

LUXEMBOURG : **Noirefontaine** : de Moffarts (B^on^ P.). — **Virton** : Cabeau (Abbé Ch.). — Dubois (V.). — Gilain (Abbé J.)

BRABANT : **Bruxelles** : André (J. B.). — Asselberghs (E.). — de Béthune (B^on^ G.). — de Bien (E.). — de la Boëssière-Thiennes (M^is^). — Bosmans (R. P. H.), S. J. — Bouckaert. — Braun (A.). — Brifaut. — de Broqueville (B^on^ Ch.). — Brouckmans (A.). — Carlier (J.). — Carton de Wiart (B^on^ Edm.). — Carton de Wiart (C^te^ H.). — Cocheteux (Chan.). — Colens. — Collège S^t^ Jean-Berchmans. — Cooreman (G.). — Crousse (D^r^). — Cuylits (D^r^ J.). — Davignon (H.). — De Brabandère. — De Jonghe. — De Lantsheere (D^r^ J.). — Delétrez (D^r^ A). — Delfosse (D^r^). — Demanet. — De Neyer (Abbé L.). — Deroitte (D^r^ V.). — Descamps-David (B^on^). — De Wildeman (E.). — d'Huart (B^on^). — Diderich (N.). — de Dorlodot (J.). — Dubois-Verbrugghen (D^r^ É.). — Du Bost. — Duplat. — Dupret. — Dutilleux (M.). — Eeckhout (G.). — de Favereau de Jenneret (B^on^ V.). — Fernandès (D^r^ R.). — Fouarge (D^r^ L.). — François (D^r^ A.). — Gaillard (R. P. J.), S. J. — Gerard (E.), — Gillet (J.). — Goedseels (J.). — Goedseels (D^r^ L.). — Goffinet (H.). — Gollier (Ch.). — Goris (Ch.). — Greindl (B^on^). — Hachez (F.). — Hauptmann (M.). — Havenith — Hélin (E.). — Henrard (D^r^ É.). — Henrard (D^r^ F.). — Henry (A.). — Houdmont (D^r^ H.). — Institut Saint-Louis. — Jacobs (F.). — Janssen (A.). — Javaux (D^r^). — Joly (A.). — Joly (L.). — Kersten (J.). — Lagasse de Locht (Ch.). — Lagasse de Locht (V.). — Lambot (O.). — Lannoy (R. P. J.), S. J. — Lejeune de Schiervel (Ch.). — Levie (M.). — de Limburg-Stirum (C^te^ Ad.). — Maes (D^r^ E.). — Maroy (D^r^ L.). — Matagne (D^r^ H.). — Mennes (A.). — Moeller (D^r^). — Morelle

(D^r^ A.). — Morisseaux. — Mullie (G.). — Pieraerts (J.). — Proost (A.). — Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus. — Raymond (Fr.). — de Renesse (C^te^). — Renier (A.). — Richald (J.). — Roland (P.). — Siret (H.). — Siret (L.). — Smets (D^r^). — Smits (E.). — Stillemans (J.). — Stouffs (D^r^ J.). — Terlinden (Ch.) — Thiébaut. — de T'Serclaes (C^te^ J.). — de Valckeneer (Sylv.). — Van der Mensbrugghe (R.). — Van der Smissen (Éd.). — Vanderstraeten (D^r^ A.). — Vandervaeren. – Van Hoeck (D^r^ Ém.). — Van Keerberghen (D^r^). — Van Swieten (R.). — Van Ysendyck (D^r^). — Verhelst (Abbé F.). — Warlomont (D^r^ R.). — Wibo (D^r^ W.). — de Wouters d'Oplinter (Ch^er^ F.).

Boitsfort : Masen (A.). — **Etterbeek** : Schreiber. — **Ixelles** : Delmarcel (G.). — De Vadder (V.). — D'Hoop (F.). — Janssens. — Proost (Chan.). — de Selliers de Moranville (Ch^er^ A.). — **Herent** : Deleval (H.).

Louvain : Alliaume (M.). — Baudhuin (F). — Beyls (Mgr). — Biourge (O.). — Boine (D^r^ J.). — Bruylants (G.). — Bruylants (P.) — Bruynoghe (R.). — Cappellen (G.). — Charles (R. P. P.), S. J. — Collège Saint-Jean-Berchmans. — Daubresse (P.). — Debaisieux (P.). — De Becker (Mgr J.). — de Dorlodot (Chan. H.). — Demanet (Chan. S.). — De Muynck (Chan R.). — Deploige (Mgr). — De Smedt (Abbé). — Devisé (R. P. R.), S. J. — Dopp (R. P. H.), S. J. — Dupriez. — Fallon (R. P. V.), S. J. — Fournier (O. S. B.). — Gillon (G.). — Grégoire (Chan. V.). — Helleputte. — Janssens (Chan. F. A.). — Kaisin (F. P.) — Ladeuze (Mgr). — Lange (R. P. R.), S. J. — Lecat (M.). — Lefebvre (Mgr F.). — Lemaire (D^r^ A.). — Libbrecht (D^r^ W.). — Malengrau. — Mansion (Aug.). — Marchal (Chan. L.). — Maréchal (R. P. J.), S. J. — Maubert (Frère). — Mertens (A.). — Michiels (L.). — Michiels (D^r^ J.). — Mund (W.) — Nerinckx (A.). — Noblesse (Chan. C.). — Noyons (A.). — Orban de Xivry. — Orman (E.). — Pasquier (Ern). — Pauwels (R. P. J.), S. J. — Poullet (P.). — Renoirte (F.). — Salée (A.). — Schaffers (R. P. V.), S. J. — Scheuer (R. P. P.), S. J. — Schockaert (R.). — Sibenaler (N.). — Simonart (F.). — Supérieur du Collège des Joséphites.

— Thiéry (Chan. A.). — Tits (Dr A.). — de la Vallée Poussin (Ch.-J.). — Van Gehuchten (P.). — Verriest (Gust.). — de Walque (F.). — Willaert (R. P. F.), S. J. — **Héverlé** : Nelis (C.). — **Kessel-Loo** : Michotte (Alb.). — **Nivelles** : Rome (Abbé A.). — Stouffs (Dr). — **Perck** : de Ribaucourt (Cte Gaston). — **Rixensart** : Beaujean (Ch.). — **Saint-Gilles** (Bruxelles) : Streulens (Dr). — **Schaerbeek** (Bruxelles) : Baeckelmans (Abbé L.). — Boone (Abbé). — Delmer. — Williame (A.). — **Scheut** : Lefebvre (R. P. M.). — **Tervueren** : Maes (Dr J.). — **Tirlemont** : Cappuyns (A.). — **Tubize** : du Plessis (J.). — Taymans (E.). — **Uccle** (Bruxelles) : Casteels. — Cuylits (Jos.). — Dejardin (L.). — Delvosal (J.). — Goedseels (Ed.). — Somville (O.). — Vanderlinden (É.). — Vervaeck (Dr). — **Virginal** : Dusausoy (A.). — **Waterloo** : de Meeus (Cte Louis). — **Woluwe-Saint-Lambert** : Convent (Dr A.). — Glorieux (Dr). — Lebizay (A. E. M.). — **Woluwe-Saint-Pierre** : Capart (J.). — Lambin (A.). — Van Brabandt.

PROVINCE DE LIÉGE : **Liége** : Berleur (Ad.). — Carpentier (Fr.). — Collège Saint-Servais. — Coppens (A.). — De Jace (Ch.). — Duquenne (Dr L.). — Francotte (Dr X.). — Janne (H.). — Laminne (S. G. Mgr J.). — Le Paige (C.). — Lhoest (H.). — Neuberg (J.). — Rutten (S. G. Mgr). — Timmermans (F.). — **Pepinster** : Lejeune-Simonis. — **Stavelot** : David (P.). — **Visé** : Meurice (L.).

HAINAUT : **Mons** : Dufrane (Dr).

Acoz : Dupuis (H.). — **Chatelet** : Pasquier (Dr A.). — **Chimay** : Théron (J.). — **Couillet** : Dochain-Defer. — **Erbisœul** : Lemaire (E.). — **Gosselies** : Drion (Bon Ad.). — **Hornu** : Halez (E.). — **Mont-sur-Marchienne** : Deboucq (L.). — **Le Rœulx** : Van Caeneghem (Chan. F.). — **Thuin** : Lagae (R.). — **Tournai** : Blondel (A.). — Crooy (S. G. Mgr). — Cuylits (Dr Ch.). — Dupont (E.).— **Wasmes** : Harmant (É.).

PROVINCE DE NAMUR : **Namur** : Baivy (Dr). — Bibot (Dr). — Collège Notre-Dame de la Paix. — Delvigne (R. P.

R.), S. J. — Dierckx (R. P. Fr.), S. J. — de Greeff (R. P. H.), S. J. — Haibe (Dr). — Heylen (S. G. Mgr). — Lucas (R. P. D.), S. J. — Martin (Dr). — Mélot (A.). — Visart de Bocarmé. — **Auvelais** : Lambiotte (O.). — **Dinant** : Cousot (P.). — Demanet (Abbé). — **Floreffe** : Baseil (Abbé). — Petit Séminaire épiscopal. — **Heer-Agimont** : Gilbert (P.). — **Lustin** : de Pierpont (Éd.). — **Malonne** : Majorin-Antoine (Fr.). — **Sclayn** : Wéry (Dr A.).

FRANCE

Paris : Andoyer. — Béchaux (A.). — Blondel (G.). — du Boys (P.). — Boussinesq (J.). — Branly (Ed.). — Collin (Abbé H.). — de Launay (L.). — École libre de l'Immaculée-Conception. — Fiessinger (Dr). — Humbert (G.). — Jordan (C.). — Le Châtelier. — Lemoine (G.). — Matignon. — d'Ocagne (M.). — Picard (É.). — Puiseux (P.). — Teilhard (Abbé). — Termier (P.). — Van der Mensbrugghe (A.).

Départements : *Allier* : **Cérilly** : Dumas-Primbault (H.). — *Alpes-Maritimes* : **Menton** : Farina (Dr). — **Nice** : Dardel (Dr). — *Alsace* : **Strasbourg** : de Lapparent (J). — *Aveyron* : **Viviez** : Berlingin (M.). — *Basses-Pyrénées* : **Abbadia** (par Hendaye) : Bertrand (Abbé G.). – Verschaffel (R. P. A.). — **Pau** : Haton de la Goupillière (J. M.). — *Bouches-du-Rhône* : **Marseille** : Fabry (L.). — *Cher* : **Bourges** : de Grossouvre (A.). — Moreux (Abbé Th.). — *Drôme* : **Aiguebelle** (par Grignan) : Arduin (Abbé A.). — *Haute-Garonne* : **Toulouse** : Boule (Abbé L.). — Sabatier (P.). — Senderens (Mgr). — *Haute-Loire* : **Vals** : de Sinéty (Abbé R.). — *Haute-Marne* : **Langres** : Raclot (Abbé V.). — *Loire* : **Nantes** : Kowalski (G.). — *Loiret* : **Laval** : de Maupeou (Cte). — *Mayenne* : **Ernée** : Thébault (V.). — *Meurthe-et-Moselle* : **Ham** (par Longuyon) : Rachon (Abbé P.). — *Moselle* : **Bitche** : Kieffer (Abbé J. J.). — *Morbihan* : **Kervihan** : Sageret. — *Nord* : **Denain** : Moreau (R.). — **Douai** : Belette (P.). —

Lille : d'Adhémar (V^te^ R.). — Annycke (Abbé Th.). — Baeckeroot (Abbé G.). — Barrois. — Battez (Dr G.). — Bernard (L.). — Besson (Dr). — Boulangé (H.). — Cappe de Baillon (P.). — Carpentier (Abbé). — Charron (E.). — David (Dr A.). — Delassus (Dr A.). — Delattre (Dr A.). — Delépine (Abbé G.). — Delépine (Dr J.). — Depape (Abbé G.). — Desplats (Dr R.). — D'Halluin (Dr M.). — Duthoit (E.). — Favrelle (M.). — Guermonprez (Dr). — Lenoble. — Lepoutre (Dr C.). — Lesne (Mgr E.). — Liévin (Abbé O.). — de Montessus de Ballore (Vte R.). — Pruvost (P.). — Quilliet (Mgr H.). — Raquet (D.). — Rogie (Dr). — Stoffaes (Chan.). — Swyngedauw (R.). — Thilliez (Dr L.). — Witz (A.). — Witz (Abbé F.). — **Roubaix** : de Laubier. — **St-André-lez-Lille** : Caron (H.). — *Pas-de-Calais* : **Aire-sur-la-Lys** : Parent (Abbé O.). — **Verquin** : Agniel (G.). — *Rhône* : **Lyon** : de Sparre (Cte). — *Saône-et-Loire* : **Paray-le-Monial** : de Vorges (A.). — *Sarthe* : **Le Mans** : Hamonet (Chan.). — *Seine* : **Neuilly** : Mansion (H.). — *Seine-et-Oise* : **Bellevue** : Brunhes (J.). — **Versailles** : Ariès (Colonel). — École libre de Ste-Geneviève. — Regnault (Bon Ed.). — Groussau (C.).

ESPAGNE

Madrid : Dusmet y Alonso (J.-M.). — Gonzalez de Castejon. — Grinda (I.). — Iniguez y Iniguez (Fr.). — Torres Quevedo (L.). — Torroja Caballe (Ed.). — **Barcelone** : (Sarria) : Collège St-Ignace. — Torrojà (A.). — Vitoria (R. P. E.), S. J. — **Bilbao** : Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso), S. J. — **La Coruna** : Casarès (J.). — **Séville** : Abaurrea (L.). — **Tortosa** : (Tarragona) Rector del Colégio del Jesus (R. P.). — **Valladolid** : Rodriguez-Risueno (E.). — **Zaragoza** : Navàs (R. P. L.), S. J.

PAYS DIVERS

ALLEMAGNE : **Aix-la-Chapelle** : Scherpereel (Abbé C.). — **Berlin** : Sièges.

ANGLETERRE : **Dublin** (Irlande) : Egan (R. P. M.), S. J. —

— **Newcastle-on-Tyne** (Angleterre) : Bagnall (R. S.). — **Saint-Hélier** (Jersey — Iles de la Manche) : Dechevrens (R. P. M.), S. J. —

ITALIE : **Rome** : Ferrata (S. É. le Cardinal). — Granito di Belmonte (S. É. le Cardinal). — Hagen (R. P. J.), S. J. — Rinaldini (S. É. le Cardinal). — de T'Serclaes (Mgr Ch.). — Vermeersch (R. P. A.), S. J. — **Catane** (Sicile) : Nava di Bontife (S. É. le Cardinal). — **Pise** : Maffi (S. É. le Cardinal).

PAYS-BAS : **Oudenbosch** : Bolsius (R. P. H.), S. J. — **Utrecht** : De Veer (R. P.), S. J. — **Valkenburg** (Limbourg-Hollandais) : Wasmann (R. P. E.), S. J.

GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG : **Luxembourg** : Soisson (G.).

GRÈCE : **Smyrne** : Caratheodory (C.).

SUISSE : **Fribourg** : De Kowalski (Dr). — De Munnynck (R. P.), O. P. — Kirsch (Mgr J. P.).

ÉTATS-UNIS : **Pasadena** (Californie) : Conroy (Ch. C.). — **Notre-Dame** (Indiana) : Kirsch (R. P. Al. M.). — **Washington** : Georgetown College Observatory.

BRÉSIL : **Recipe** : Meyer (R. P. L.), S. J.

CHILI : **Santiago** : Cte de Montessus de Ballore.

MEXIQUE : **Mexico** : Collantes (P.). — de Mendizabal Tamborel (J.).

INDES-ANGLAISES : **Calcutta** : Collège Saint-François-Xavier. — **Ranchi** : Gillet (R. P. Ch.). S. J.

MADAGASCAR : **Tananarive** : Camboué (R. P.), S. J.

SYRIE : **Beyrouth** : Collangettes (R. P.), S. J. — de Vrégille (R. P. P.), S. J.

Membres décédés

Humbert (Georges)	I	Paris.
de Saintignon (Cte Fernand)	II	Longwy.
Poskin (Paul)	III	Gembloux.
Van Bastelaer (Léonce)	III	Bruxelles.
Gelin (Abbé E.)	I	Huy.
Duret (Dr Henry)	IV	Lille.

Liste des membres inscrits dans les sections (1)

1re SECTION

Mathématiques, Astronomie, Géodésie, Mécanique

MM. Vte d'Adhémar.
M. Alliaume.
Andoyer.
Abbé Th. Annycke.
Abbé J. Belpaire.
Abbé G. H. Bertrand.
*Bon G. de Béthune.
F. de Bien.
A. Biot.
R. P. H. Bosmans, S. J.
J. Boussinesq.
P. du Boys.
A. Brouckmans.
C. Caratheodory.
L. Casteels.
Ch. Conroy.
*A. Crame.
*P. Daubresse.
Abbé De Neyer..
*R. P. H. Dopp, S. J.
C. Dusausoy.
M. Dutilleux.
A. Dutordoir.
H. Dutordoir.
R. M. M. Egan, S. J.
L. Fabry.
*G. de Fooz.
R. P. J. Gaillard, S. J.
*P. Gilbert.
J. Gillet.
Éd. Goedseels.
M. Gonzalez de Castejon.
J. Grinda.
*A. de Grossouvre.
F. Hachez.
R. P. J. Hagen, S. J.
MM. J. N. Haton de la Goupillière.
*M. Hauptmann.
*J. Havenith.
*G. Helleputte.
F. Iniguez.
Fern. Jacobs.
H. Janne.
Camille Jordan.
Lagae.
*Ch. Lagasse de Locht.
A. Lambin.
R. P. J. Lannoy, S. J.
A. E. M. Lebizay.
M. Lecat.
G. Le Paige.
S. É. le cardinal Maffi.
Majorin-Antoine (Frère).
*Cte de Maupeou.
*Cte L. de Meeus.
J. de Mendizabal.
*A. Merten.
L. Meurice.
Vte J. de Monge.
Vte R. de Montessus.
F. Moreau.
Abbé Th. Moreux.
J. Neuberg.
Chan. C. Noblesse.
M. d'Ocagne.
E. Pasquier.
É. Picard.
P. Puiseux.
*J. Richald.

---

(1) L'astérisque indique les membres qui désirent prendre part aux travaux de plusieurs sections (cf. Art. 11 des Statuts).

MM. Sageret.
R. P. J. Schul, S. J.
*N. Sibenaler.
F. Simonart.
*E. Smits.
*G. Soisson.
Cte de Sparre.
*J. Stillemans.
Chan. Stoffaes.
*E. Storms.
V. Thébault.
J. Théron.

MM. F. Thiébaut.
F. Timmermans.
L. Torres Quevedo.
A. Torroja.
S. de Valckeneer.
Ch.-J de la Vallée Poussin.
Vanderlinden.
G. Verriest.
R. P. A. Verschaffel.
C. Wasteels.
R. P. F. Willaert, S. J.
F. Wolters.

2e SECTION

Physique. — Chimie, Métallurgie. — Météorologie et physique du globe

MM. L. Abaurrea.
*J.-B. André.
Ariès.
Abbé L. Baeckelmans.
Abbé Baseil.
L. Bernard.
A. Blondel.
Abbé Cl. Boone.
E. Branly.
G. Bruylants.
P. Bruylants.
A. Cappuyns.
*C. Carlier.
H. Caron.
J. Casarès.
E. Charron.
Chan. Cocheteux.
R. P. Collangettes, S. J.
Abbé A. Davelooze.
R. P. M. Dechevrens, S. J.
J. Declercq.
J. Delvosal.
Chan. Demanet.
Chan. R. De Muynck.
Abbé De Smedt.
*R. P. H. Dopp, S. J.
M. Dumas-Primbault.
*E. Gerard.
Abbé J. Gillain.

MM. R. Goubau.
R. P. H. de Greeff, S. J.
Abbé Hamonet.
A. de Hemptinne.
J. de Kowalski.
*O. Lambiotte.
R. P. Ch. Lambo, S. J.
O. Lambot.
S. Gr. Mgr J. Laminne.
*R. P. R. Lange, S. J.
H. Le Châtelier.
G. Lemoine.
Lenoble.
W. Libbrecht.
Abbé O. Liévin.
R. P. D. Lucas, S. J.
A. Mansion.
Chan. Marchal.
Matignon.
A. Mennes.
A. Mertens.
R. P. I. Meyer, S. J.
J. Michiels.
L. Michiels.
W. Mund.
R. P. J. Pauwels, S. J.
*J. du Plessis.
D. Raquet.
Raymond (Fr.).

MM. Bon Ed. Regnault.
F. Renoirte.
P. Roland.
P. Sabatier.
R. P. V. Schaffers, S. J.
R. P. P. Scheuer, S. J.
Mgr Senderens.
A. Smedts.
O. Somville.
R. Swyngedauw.
Chan. A. Thiéry.

MM. Abbé J. Tillieux.
Abbé Van den Bossche.
E. Vanderlinden.
M. Vandevyver.
Abbé F. Verhelst.
R. P. E. Vitoria, S. J.
F. de Walque.
A. Williame.
*A. Witz.
Abbé F. Witz.

3e SECTION

Géologie, Minéralogie. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie, Ethnographie Science du langage. — Géographie

MM. G. Agniel.
Abbé A. Arduin.
É. Asselbergs.
Abbé G. Baeckeroot.
R. S. Bagnall.
Barrois.
F. Bastin.
G. Battez.
P. Bellette.
O. Biourge.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
R. P. H. Bolsius, S. J.
Bouckaert.
H. Boulangé.
Abbé L. Boule.
J. Brunhes.
R. Bruynoghe.
Abbé C. Cabeau.
R. P. Camboué, S. J.
J. Capart.
P. Cappe de Baillon.
Abbé A. Carpentier.
F. Carpentier.
R. P. P. Charles, S. J.
Abbé J. Claerhout.
F. Claes.
Abbé H. Collin.
P. Debaisieux.
*L. Deboucq.

MM. *V. de Brabandère.
J. Declercq.
De Jonghe.
L. De Launay.
Abbé G. Delépine.
R. P. R. Delvigne, S. J.
Abbé Demanet.
R. P. De Munnynck, S. J.
Abbé G. Depape.
R. P. R. Devisé, S. J.
Abbé J. De Vos.
É. De Wildeman.
R. P. Fr. Dierckx, S. J.
Chan. H. de Dorlodot.
J. de Dorlodot.
Bon Drion.
V. Dubois.
Abbé R. Dumez.
J. M. Dusmet y Alonso.
M. Favrelle.
Dom Grég. Fournier, O. S. B.
Bon Gillès de Pélichy.
*J. Gillet.
Th. Gollier.
Chan. V. Grégoire.
*Bon Greindl.
*M. Hauptmann.
Mgr. A. Hebbelynck.
M. Henseval.

MM. Chan. F. A. Janssens.
F. Kaisin.
*J. Kersten.
Abbé J. J. Kieffer.
R. P. A. M. Kirsch.
Mgr. J-P. Kirsch, C. S. C.
J. Kowalski.
*R. P. R. Lange, S. J.
J. de Lapparent.
Dr H. Lebrun.
Mgr F. Lefebvre.
R. P. M. Lefebvre.
Ch. Lejeune de Schiervel.
*H. Lhoest.
Cte Ad. de Limburg-Stirum.
J. Maes.
E. Malengrau.
R. P. J. Maréchal, S. J.
Frère Maubert.
Cte F. de Montessus.
R. Moreau.
R. P. L. Navas, S. J.
P. Nyssens.
E. Orman.

MM. Abbé O. Parent.
J. Pieraerts.
Éd. de Pierpont.
*J. du Plessis.
P. Pruvost.
Abbé P. Rachon.
*A. Renier.
Abbé A. Salée.
Abbé C. Scherpereel.
R. P. G. Schmitz, S. J.
Schreiber.
Abbé Fl. Silveryser.
Abbé R. de Sinéty.
*H. Siret.
L. Siret.
X. Stainier.
P. Termier.
Abbé Teilhard.
Cte de T'Serclaes.
Chan. F. Van Caeneghem.
F. Van Ortroy.
A. de Vorges.
R. P. P. de Vrégille, S. J.
R. P. E. Wasmann, S. J.

4e SECTION

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Baivy.
Besson.
Bibot.
Boine.
Convent.
Cousot.
Crousse.
Ch. Cuylits.
J. Cuylits.
F. Daels.
A. David.
De Backer.
J. De Lantsheere.
A. Delassus.
A. Delattre.
J. Delépine.

MM. Delétrez.
Delfosse.
V. Deroitte.
R. Desplats.
M. D'halluin.
E. Dubois-Verbrugghen.
C. Dufrane.
É. Dupont.
L. Duquenne.
R. Fernandès.
Fiessinger.
L. Fouarge.
A. François.
X. Francotte.
Glorieux.
L. Goedseels.

MM. Ch. Goris.
Guermonprez.
A. Haibe.
Ét. Henrard.
F. Henrard.
F. Heymans.
H. Houdmont.
Javaux.
A. Lemaire.
C. Lepoutre.
É. Maes.
L. Maroy.
J. Martin.
A. Masen.
H. Matagne.
Mennes.
A. Moeller.
A. Morelle.
G. Mullie.
C. Nelis.
A. Noyons.
A. Pasquier.

MM. A. Proost.
Rogie.
R. Schockaert.
R. Smets.
V. Solé.
J. Stouffs.
L. Stouffs.
A. Streulens.
O. Swolfs.
L. Thilliez.
A. Vanderstraeten.
Van Durme.
P. Van Gehuchten.
Em. Van Hoeck.
Van Keerberghen.
R. Van Swieten.
Van Ysendyck.
Vervaeck.
R. Warlomont.
A. Wéry.
M. Wibo.

5e SECTION

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales Économie industrielle

MM. F. Baudhuin.
*Ch. Beaujean.
A. Béchaux.
*A. Berleur.
Mgr R. Beyls.
G. Blondel.
*V. De Brabandère.
A. Braun.
*V. Brifaut.
Bon de Broqueville.
G. Cappellen.
Bon E. Carton de Wiart.
Cte H. Carton de Wiart.
R. P. J. Charles, S. J.
A. Claeys-Boùùaert.
G. Cooreman.
Jos. Cuylits.

MM. P. David.
H. Davignon.
H. De Baets.
Mgr J. De Becker.
C. De Jace.
E. De Meester.
Mgr Deploige.
Bon Descamps.
V. De Vadder.
N. Diderrich.
E. Dubois.
Dubost.
G. Duplat.
Dupret.
L. Dupriez.
E. Duthoit.
R. P. V. Fallon, S. J.

MM. J. Goedseels.
A. Goffinet.
C. Groussau.
*M. Hauptmann.
A. Henry.
A. Janssen.
A. Joly.
L. Joly.
M. Levie.
E. Limpens.
*H. Mansion.
A. Mélot.
P. Michotte.
A. Nerinckx.
Bon Orban de Xivry.
P. Poullet.
Cte de Renesse.
A. Roersch.
Abbé A. Rome.

MM. Bon de Schilde.
Bon G. de Schilde.
P. Segers.
*Ch. de Selliers de Moranville.
Sièges.
Th. Smekens.
E. Taymans.
C. Terlinden.
E. Tibbaut.
J. Van den Heuvel.
A. Van der Mensbrugghe.
F. Van der Smissen.
Van de Vyvere.
R. P. A. Vermeersch, S. J.
P. Vermeersch.
Versteylen.
Cte Visart de Bocarmé.
Visart de Bocarmé.

6e SECTION

Sciences techniques

MM. *J.-B. André.
*Ch. Beaujean.
*A. Berleur.
*M. Berlingin.
*Bon de Béthune, G.
*J. Carlier.
H. Caufriez.
Colens.
*A. Crame.
*P. Daubresse.
*P. Deboucq.
L. Dejardin.
H. Deleval.
G. Delmarcel.
A. Delmer.
M. Demanet.
D. De Meulemeester.
E. D'Hoop.
F. Dochain-Defer.
H. Dupuis.
*M. Dutilleux.

MM. *G. de Fooz.
*E. Gerard.
R. P. Ch. Gillet, S. J.
G. Gillon.
*Bon Greindl.
*A. de Grossouvre.
*F. Hachez.
E. Hallez.
É. Harmant.
J.N. Haton de la Goupillière.
*J. Havenith.
*G. Helleputte.
*J. Kersten.
*Ch. Lagasse de Locht.
E. Lagasse de Locht.
V. Lagasse de Locht.
*O. Lambiotte.
de Laubier
E. Lemaire.
*H. Lhoest.
*H. Mansion.

MM. *C^{te} de Maupeou.
*C^{te} L. de Meeus.
*A. Merten.
J. Meuwissen.
*R. Moreau.
Ch. Morisseaux.
*M. d'Ocagne.
Renaud.
*A. Renier.
C^{te} G. de Ribaucourt.
*J. Richald.
R. P. Ch. Schoonjans, S. J.
MM. *Ch. de Selliers de Moranville.
*N. Sibenaler.
*H. Siret.
Slingeneyer de Goeswin.
*E. Smits.
*G. Soisson.
*E. Storms.
L. Van Brabandt.
R. Van der Mensbrugghe.
*A. Witz.

MEMBRES DU CONSEIL

1920-1921

Président : M. Lagasse de Locht (1922) (¹)
Vice-Présidents : M. M. d'Ocagne.
M. A. Renier (1923).
Secrétaire-général : M. Ch. J. de la Vallée Poussin (1923).
Secrétaire : R. P. F. Willaert (1924).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1921).
Membres : MM. Ch. Beaujean (1921).
le Mis de la Boëssière-Thiennes (1923).
le R. P. H. Bosmans (1924).
le Chanoine Cocheteux (1924).
É. De Wildeman (1924).
le Dr X. Francotte (1921).
le Chanoine V. Grégoire (1922).
É. Harmant (1922).
le Cte Ad. de Limburg-Stirum (1921).
É. Pasquier (1922).
A. Proost (1923).
Fr. de Walque (1923).
le Dr R. Warlomont (1924).

(¹) Le nom de chaque membre du Conseil est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

MEMBRES DU CONSEIL

1921-1922

Président : M. M. d'Ocagne.
Vice-Présidents : M. A. Renier (1923).
M. R. Warlomont (1924).
Secrétaire général : M. Ch. J. de la Vallée Poussin (1923).
Secrétaires : R. P. F. Willaert (1924).
R. P. H. Dopp.
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1925).
Membres : MM. M. Alliaume (1925).
Ch. Beaujean (1925).
le M^is^ de la Boëssière-Thiennes (1923).
le R. P. H. Bosmans (1924).
le Chanoine Cocheteux (1924).
É. De Wildeman (1924).
le Chanoine V. Grégoire (1922).
É. Harmant (1922).
Ch. Lagasse de Locht (1922).
le C^te^ Ad. de Limburg-Stirum (1925).
E. Pasquier (1922).
A. Proost (1923).
Fr. de Walque (1923).

BUREAU DES SECTIONS

1921-1922

1re SECTION

Président : M. Ch.-J. de la Vallée Poussin.
Vice-Présidents : R. P. H. Bosmans, S. J.
M. M. Alliaume.
Secrétaire : M. H. Dutordoir.

2me SECTION

Président : R. P. de Greeff, S. J.
Vice-Présidents : M. R. Bruylants.
M. R. Goubau.
Secrétaire : R. P. Lucas, S. J.

3me SECTION

Président : M. l'Abbé G. Delépine.
Vice-Présidents : M. P. Debaisieux.
M. le curé Claerhout.
Secrétaire : M. F. Van Ortroy.

4me SECTION

Président : M. le Dr Ch. Goris.
Vice-Présidents : M. le Dr R. Schockaert.
M. le Dr A. Delétrez.
Secrétaire : M. le Dr R. Warlomont.

5me SECTION

Président : M. Éd. Van der Smissen
Secrétaire : M. G. Duplat.

6me SECTION

Président : M. É. Harmant.
Vice-Président : M. F. Hachez.
Secrétaire : M. R. Van der Mensbrugghe.

SESSION DU 27 OCTOBRE 1921
A TOURNAI

SÉANCES DES SECTIONS

Les sections se réunissent à onze heures au collège Notre-Dame.

Première Section

Le R. P. Bosmans présente à la Section la nouvelle traduction française des *Œuvres complètes d'Archimède*, par M. Paul Ver Eecke (1), en l'accompagnant de la note suivante :

Je n'apprendrai probablement rien à personne en disant qu'au point de vue utilitaire, ou même au point de vue du développement proprement dit de la science, il n'y a plus grand'chose à glaner dans les *Œuvres d'Archimède*. Elles ont été trop étudiées pour qu'on puisse y trouver beaucoup de théorèmes vraiment nouveaux. J'atténue à dessein ma proposition par l'adverbe « beaucoup », car la publication récente des fragments retrouvés du *Stomachion*, par exemple, pourrait peut-être nous ménager quelques surprises.

Mais si l'on se met à d'autres points de vue que celui de l'utilitarisme, Archimède est un auteur qu'on ne saurait trop recommander à l'attention des mathématiciens. Ses petits traités, sans rien nous apprendre d'absolument neuf, sont toujours restés des chefs-d'œuvre de rigueur, de clarté et d'élégance. Ils sont aussi des merveilles d'ingéniosité. Et à ce propos — qu'on me pardonne cette réflexion — ne serait-il pas quelquefois opportun de rappeler à l'un ou l'autre de nos géomètres, même parmi les bons, qu'il y a en mathématiques, comme en littérature, une élégance professionnelle, qu'il y a des modèles à suivre, et qu'un mémoire scientifique, d'ailleurs irréprochable pour le fond, peut être mal écrit. A qui en douterait, je recommanderais de comparer certains de ces mémoires aux opuscules de Pascal, aux traités de Lagrange, ou mieux encore à Euclide et à Archimède, car c'est à ce dernier que je veux en revenir.

---

(1) ***Les Œuvres complètes d'Archimède traduites du grec en français, avec une Introduction et des Notes***, **par Paul Ver Eecke, Ingénieur des Mines (A. I. Lg.), Inspecteur général du Travail. Paris et Bruxelles, Desclée De Brouwer, 1921. Un volume grand in-8° de LX et 553 pages, avec de nombreuses figures dans le texte. L'exécution matérielle est très soignée et fait honneur à la maison Desclée De Brouwer, qui n'avait pas, croyons-nous, publié jusqu'ici d'ouvrage scientifique de pareille importance.**

On ne saurait apprécier le Syracusain à toute sa valeur sans le lire en grec, dans son beau dialecte dorien. La langue grecque est, en effet, hors de pair pour exprimer une idée abstraite, mathématique ou philosophique, avec ses nuances les plus délicates. Mais lire des mathématiques en grec, voilà ce dont bien peu de savants sont capables de nos jours. Ils doivent recourir à des traductions.

Or, ici se présente, quand il s'agit d'Archimède, une difficulté spéciale. Comment faut-il le traduire ? Est-ce en suivant de près le texte grec ? Est-ce plutôt en notations modernes ? Question épineuse dont il est assez malaisé de saisir l'importance sans être très familier avec notre vieil auteur. Tâchons cependant de l'expliquer.

Archimède ne dispose pas de nos puissants moyens d'analyse. Quand il fait de l'algèbre, il n'a sous la main aucun de nos instruments de recherche, aucun signe d'opération, aucun de nos autres algorithmes. De plus, en grec, chaque lettre de l'alphabet a sa valeur numérique propre : α veut dire 1, β veut dire 2, γ veut dire 3, δ veut dire 4, et ainsi de suite.

Dans les raisonnements généraux de l'arithmétique, Archimède, comme Eudoxe, comme Euclide, comme tous les géomètres de l'École alexandrine, n'eut pas l'idée, peu naturelle pour lui, de se servir de lettres, mais il employa de petits segments de droites affectés d'indices, ou encore des figures géométriques analogues à celles qui se rencontrent dans nos théories élémentaires des polygones semblables. A l'aide de moyens si frustes, Eudoxe nous a cependant laissé, dans le 5^e^ livre des *Eléments* d'Euclide, une théorie des proportions qui est l'un des plus beaux modèles de la lucidité et de l'impeccable logique du génie grec. Après Eudoxe et Euclide, Archimède manie la théorie des proportions avec une virtuosité incomparable, mais qui est tout à fait étrangère à nos habitudes d'esprit actuelles.

En revanche, si Archimède ne connaît pas nos symboles algébriques, d'autre part il dessine des figures, fait des épures et y trouve des moyens d'analyse dont, toutes réserves faites, je comparerais la fécondité à celle des procédés de la géométrie projective. Zeuthen a baptisé ces méthodes du nom d'*algèbre géométrique*.

Et la conséquence de tout ceci ?

C'est que dans les théorèmes difficiles et délicats, si nombreux chez Archimède, la démonstration, sans être jamais diffuse, est souvent longue et par là même dure à suivre, car elle demande un grand effort d'attention.

Les interprètes récents ont essayé, pour la plupart, de tourner la difficulté en nous donnant des *Œuvres d'Archimède* en notations modernes. Telles sont, par exemple, la tentative de Nizze dans ses *Archimedes von Syrakus vorhandene Werke* (¹), celle de Heath dans *The works of Archimedes edited in modern notation* (²), et même jusqu'à un certain point celle d'Heiberg, dans la version latine jointe à son édition critique du texte grec d'Archimède (³). Pour la traduction d'Heiberg l'inconvénient est moindre que pour celles de Heath et de Nizze, car on peut à tout instant contrôler la fidélité plus ou moins grande de l'interprétation latine sur la

---

(¹) *Archimedes von Syrakus vorhandene Werke*, aus dem Griechischen uebersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet, von Ernst Nizze. Stralsund, Carl Löffler, 1824.

(²) *The Works of Archimedes edited in modern notation*, with introductory chapters by T. L. Heath. Cambridge, University press, 1897.

(³) *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii*, iterum edidit J. L. Heiberg. Leipzig, Teubner, t. I, 1910 ; t. II, 1913 ; t. III, 1915. Les fragments du *Stomachion* dont il a été parlé ci-dessus se trouvent au t. II, pp. 415-424.

phrase grecque en regard. Mais des *Œuvres d'Archimède en notations modernes*, comme nous les donnent Nizze et surtout Heath, enlèvent de leur originalité aux démonstrations du Syracusain. Elles les déforment trop. Ici, il convient toutefois de préciser et de s'entendre, car pour nous, géomètres du xx^e siècle, les déformations que les notations modernes font subir au texte grec sont souvent, il faut en convenir, très utiles dans une première étude. Elles mettent en lumière tous les anneaux de l'enchaînement d'une preuve, et empêchent que quelques-uns d'entre eux échappent à notre attention. Mais en s'adaptant à notre style, ces notations ne nous donnent que l'allure générale de la pensée grecque. C'est une charpente solide, mais une simple charpente dépouillée de tous ses ornements. Si on le préfère, ce sont les grandes lignes restantes d'un monument grec transformé à l'américaine dans un but de facilité et de confort ; mais le monument a perdu par cela même l'élégance de son architecture primitive. Or, pour en revenir à ma thèse du début, c'est surtout comme modèle de littérature et de style mathématique, qu'Archimède mérite d'être encore étudié.

Voila pourquoi, il y a un peu plus d'un siècle, Peyrard s'était dit avec raison qu'une traduction française des *Œuvres d'Archimède* (¹) devait en être une traduction littérale. Il s'y décida et son initiative eut alors grand et légitime succès. Aujourd'hui son travail a vieilli. Sous d'autres rapports encore il est devenu défectueux. Peyrard ne disposait que d'un texte grec assez mauvais. En outre, la découverte inespérée de plusieurs traités d'Archimède que l'on croyait perdus, a rendu la traduction de Peyrard très incomplète (²). M. Paul Ver Eecke a donc cru que cette traduction

---

(¹) *Œuvres d'Archimède traduites littéralement avec un Commentaire*, par F. Peyrard, professeur de mathématiques et d'astronomie au lycée Bonaparte, *suivies d'un Mémoire du traducteur sur un nouveau miroir ardent et d'un Mémoire de M. Delambre sur l'Arithmétique des Grecs*...... Paris, François Buisson, 1807.

Cette édition est en un volume in-4°. Elle fut suivie, en 1808, d'une seconde édition en deux volumes in-8°, qui parut sous le même titre et chez le même éditeur. Pour le fond, elle ne diffère pas de la précédente.

(²) Peyrard n'a ni le *Stomachion*, ni la *Méthode relative aux Problèmes mécaniques*, ni le *Problème des Bœufs*. Je crois utile d'observer à ce propos pouvait être reprise, améliorée, achevée, en un mot entièrement refondue. C'est un travail nouveau qu'il nous donne, travail auquel il a consacré les loisirs forcés que lui ménageait la guerre et qui fait grand honneur à la science belge.

La nouvelle édition des *Œuvres complètes d'Archimède* se présente à nous sous des dehors assez particuliers. Nous y trouvons d'abord une traduction française qui est loin d'être dépourvue d'élégance, malgré l'effort constant déployé par l'auteur pour suivre de près le texte grec. Ensuite, et nous l'en félicitons, M. Ver Eecke ne s'est guère fait illusion sur les difficultés que sa version offrirait à bien des lecteurs. Il a donc multiplié à profusion les éclaircissements au bas des pages. Chaque fois, par exemple, qu'Archimède nous éblouit, nous étourdit par ses vrais exercices de prestidigitation à l'aide des proportions, nous sommes certains de trouver dans les notes du petit texte, le passage correspondant du merveilleux artiste, interprété en notations modernes. C'est la bonne méthode, on ne peut que l'approuver.

Pour terminer, nous dirons donc au lecteur qui se propose d'aborder Archimède : Commencez par étudier le Syracusain en vous aidant de nos notations modernes. La marche d'une de ses démonstrations comprise, reprenez-la dans la version littérale de M. Ver Eecke. Suivez le même procédé proposition par proposition. Un traité achevé de cette manière, relisez-le d'un bout à l'autre, et au besoin relisez-le deux ou trois fois. Même sans recourir au grec, vous ne tarderez pas à comprendre pourquoi, malgré tous les progrès ultérieurs de la science, Archimède n'a jamais cessé de faire l'objet de l'admiration respectueuse des mathématiciens de tous les temps et de tous les pays.

M. le Comte de Sparre communique à la Section la seconde partie de son mémoire *Sur la théorie analytique des turbines*

---

que la traduction française de la *Méthode relative aux Problèmes mécaniques* donnée par Th. Reinach, dans la REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES PURES ET APPLIQUÉES (t. XVIII, Paris, Colin, 1907, pp. 911-928 et 954-961) est en notations modernes et fort libre. Elle a les avantages, mais aussi les inconvénients, de la traduction anglaise de Heath.

centripètes et centrifuges à réaction (¹). La Section décide l'insertion de la seconde partie dans ce recueil.

M. Lecat fait rapport sur le mémoire de M. Gaston Bertrand, intitulé : *La théorie des Marées et le Calcul des Variations.*

L'étude des marées océaniques constitue un problème d'un intérêt mathématique puissant. Bien qu'elle ait été traitée avec succès par des savants distingués (citons : G. H. Darwin, A. E. H. Love, A. Rollin, Harrys, Hough, H. Poincaré, Lord Rayleigh), cette question de Mécanique céleste est — nous allons le voir — moins avancée qu'on ne se l'imagine communément. Certains résultats fournis par la théorie ne concordent guère avec les données expérimentales : cela découle notamment de la Thèse de M. Blondel. Cette discordance ne doit pas nous étonner. Car, pour la simplicité des calculs, on considère comme négligeables des forces qui ne le sont pas : par exemple, le frottement et l'attraction du bourrelet liquide dû à la marée. On suppose, en outre, que la croûte terrestre est indéformable ; or, les marées terrestres ont pu être mises en évidence et il est probable qu'elles ont sur les marées océaniques une influence sensible, que l'analyse permettra sans doute de déterminer un jour.

La mise en équation et la première solution du problème général des marées sont dues à H. Poincaré, qui y consacra le Tome III de ses fameuses *Leçons de Mécanique céleste* (Paris, 1910). Ce volume, plein d'aperçus intéressants, est bien de nature à provoquer, comme la plupart des écrits de l'illustre mathématicien, de nombreuses recherches nouvelles, d'autant plus qu'il manque de rigueur en maints endroits.

Comme procédé d'intégration, Poincaré, et après lui F. Jager, dans la remarquable Thèse (Paris, 1916) où il apporte d'importantes contributions, utilisent habilement la méthode analytique de Fredholm qui, on le sait, a fait réaliser un progrès immense à la théorie des équations aux dérivées partielles de la plupart des problèmes de physique mathématique. Cette méthode, qui consiste

---

(¹) La première partie a été insérée dans les ANNALES, t. XL (1920-1921), 2ᵉ partie, pp. 249-274.

en une ingénieuse généralisation de la théorie des déterminants et des systèmes d'équations linéaires, fournit des séries rapidement convergentes et elle donne théoriquement la solution du problème des marées ; mais les calculs sont à peu près inextricables pour chaque terme, malgré les simplifications qu'on parviendrait à y introduire.

Aussi Poincaré a-t-il cherché une autre voie, en ramenant (*l. c.*, p. 299-303) les équations des marées à celles d'un problème de calcul des variations, consistant à trouver la fonction qui annule la variation première de certaine intégrale double, dite *intégrale de Poincaré*. Il signale comme probable (ne l'ayant pas vérifié) que la méthode que W. Ritz venait de publier (1909), ou bien des artifices analogues, seront applicables à cette question. Le jeune et brillant géomètre suisse avait déjà appliqué avec grand succès son procédé à diverses études de première importance, notamment au célèbre problème de Dirichlet et à celui de l'élasticité. Plus récente et moins connue que celle de Fredholm, cette méthode consiste, en deux mots, à remplacer la fonction à trouver par une série de fonctions arbitrairement choisies, dont on détermine les coefficients, indépendants de x et de y, de manière à annuler la variation première de l'intégrale. Son application comprendra donc trois phases : *a)* la réduction du problème des marées à un problème de calcul des variations (qui conduit à l'intégrale de Poincaré ou à une intégrale analogue) ; *b)* la démonstration de la convergence en moyenne des fonctions extrémantes (on dit parfois, notamment F. Jager, minimisantes pour minimantes) ; *c)* l'identification de ces fonctions et de la solution du problème des marées. Dans la 3^me^ partie, la plus remarquable de sa Thèse, Jager traite ainsi un cas spécial, et il le fait non sans succès.

Mais si, comme nous l'avons laissé entendre, la méthode de Fredholm n'est pas encore au point, celle de Ritz l'est encore moins. En général, elle présente de grandes difficultés pratiques si l'on veut rester rigoureux ; toutefois elle peut se simplifier dans beaucoup de cas particuliers, devenant même remarquable au point de vue de certaines applications numériques. Aussi n'y a-t-il certainement pas lieu de l'abandonner.

L'intégrale de Poincaré (dont on cherche à annuler la variation première par la méthode de Ritz) a l'inconvénient, signalé par l'illustre mathématicien français, de contenir deux inconnues qui deviennent infinies à la *latitude critique* Celle-ci, représentée par une équation, est voisine de ± 90°, de ± 30° ou de zéro, suivant que les marées sont respectivement semi-diurnes, diurnes, ou à longue période. F. Jager élude la difficulté en faisant l'hypothèse que le bassin (dont il suppose les parois verticales) n'a aucun point commun avec cette latitude.

M. G. Bertrand s'est proposé de transformer l'intégrale de Poincaré en une autre ne contenant plus aucun élément susceptible de devenir infini et par conséquent propre à recevoir l'application de la méthode de Ritz. L'auteur atteint son but; son travail nous paraît, à tous égards, mériter l'impression.

Nous proposons donc à la Section de voter l'insertion du mémoire de M. Bertrand dans la seconde partie des ANNALES. En outre, nous émettons le vœu que notre distingué collègue poursuive ses recherches dans ce domaine, aussi intéressant que vaste, et nous avons le ferme espoir qu'il y apportera d'importantes contributions.

La conclusion de ce rapport, auquel s'est rallié le second commissaire, M. Alliaume, est adoptée. En conséquence, le mémoire de M. Bertrand sera inséré dans les ANNALES.

M. Bertrand soumet à la Section un mémoire sur *Les figures d'équilibre d'une masse sphéroïdale et l'équation de Fredholm*. M. Lecat est nommé rapporteur pour l'examen de ce travail.

M. Alliaume adresse à la Section le rapport suivant sur le mémoire de M. L. De Neyer intitulé : *La Loi des densités à l'intérieur de la Terre.*

Chercher une loi de la répartition des densités à l'intérieur de la Terre, c'est représenter la densité par une fonction de la distance au centre, et calculer, pour les coefficients de cette fonction, des valeurs qui permettent à celle-ci de vérifier quatre conditions imposées par l'observation, à savoir : 1) la grandeur de la densité superficielle, — 2) la grandeur de la densité moyenne, — 3) la grandeur d'une combinaison arithmétique déterminée de la densité moyenne, de l'aplatissement terrestre, de la constante de la précession et du rapport de la force centrifuge à l'attraction terrestre en tout point de l'équateur, — 4) enfin la vérification par l'ellipsoïde superficiel d'une équation dite équation de Clairaut, équation différentielle du second ordre suivant l'aplatissement et qui exprime la condition d'équilibre d'une masse ellipsoïdale fluide et hétérogène en rotation. A ces conditions d'égalité s'ajoute l'inégalité dite de Stieltjes qui peut s'exprimer par une limite inférieure imposée à la densité au centre de la Terre.

La loi de Laplace et de Legendre s'écrit au moyen de deux paramètres. Il en est de même de la loi de Roche qui exprime une décroissance parabolique de la densité à partir du centre. La loi de Lipschitz utilise trois paramètres et transforme la fonction de Roche dans une fonction exponentielle en y remplaçant l'exposant 2 par une indéterminée. La loi de Lévy s'exprime aussi par une fonction exponentielle dont la fonction de Lipschitz est un cas particulier.

Parmi ces lois de variations des densités, les unes ne renferment pas assez de paramètres pour pouvoir se plier aux exigences de l'observation ; les autres ont une forme analytique compliquée. C'est pourquoi M. L. De Neyer a cherché à vérifier les données de l'observation au moyen d'une fonction algébrique de la distance au centre et renfermant trois paramètres, polynôme ne contenant que des puissances paires de la variable, à savoir jusque la quatrième. Il s'est trouvé ainsi devant un système de quatre équations à trois inconnues. Le désaccord entre les géologues sur la densité superficielle n'a pas permis l'application immédiate de la théorie des erreurs. M. De Neyer s'est adressé au système obtenu en négligeant provisoirement l'équation de Clairaut et il en a déduit les coefficients de sa fonction pour les diverses valeurs de la densité superficielle prises de dixième en dixième, de 2,4 à 3,0, qui sont les limites de l'intervalle auquel appartient sûrement cette densité. Puis, reprenant les coefficients obtenus, il cherche quel est le groupe de ceux qui s'accordent le mieux avec l'équation de Clairaut. Les meilleures concordances se réalisent pour des densités de 2,6 à 2,7, et il semble que, moyennant des intervalles de plus en plus étroits, la meilleure concordance correspondrait à une densité fort voisine de 2,65 : M. De Neyer propose de donner le nom de densité superficielle théorique à cette densité optimum.

M. De Neyer ne signale pas la condition de Stieltjes, mais on aperçoit immédiatement sa vérification. Sans doute voudra-t-il ajouter à son travail quelques lignes à ce sujet.

Ce mémoire constitue une contribution intéressante à l'étude de notre sphéroïde, à l'approximation où l'élasticité de celui-ci est considérée comme négligeable. Nous devons aussi rendre hommage à la longue patience qu'il a fallu à l'auteur dans l'exécution des pénibles calculs que comportaient ses recherches.

Nous proposons l'impression du mémoire de M. De Neyer dans la deuxième partie des ANNALES.

Conformément aux conclusions de ce rapport, la Section décide l'insertion du mémoire de M. De Neyer dans les ANNALES.

M. Thébault présente un travail intitulé : *Contributions à la Géométrie du triangle et du tétraèdre*. Suivant la proposition de M. Neuberg, la Section décide l'impression de ce mémoire dans les ANNALES.

M. Neuberg adresse à la Section des *Notes mathématiques* sur diverses questions de géométrieet sur des problèmes de probabilité.

Parmi les questions que j'ai proposées dans les journaux MATHESIS et EDUCATIONAL TIMES et qui sont restées sans réponse, plusieurs présentent peut être un intérêt suffisant pour que les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES en accueillent mes solutions.

I. QUADRANGLE SPHÉRIQUE INVOLUTIF (ED. TIMES, 1897, p. 301).

Soient, sur une sphère de centre O, ABC *un triangle quelconque et* D *un point tel que les grands cercles joignant les sommets* A, B, C *respectivement aux pôles* P_a, P_b, P_c *des petits cercles circonscrits aux triangles* DBC, DCA, DAB *concourent en un même point. Démontrer que les côtés* a, b, c *du triangle* ABC *et les distances sphériques* $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$ *vérifient la relation*

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos a + \cos a' & \cos a \cos a' \\ 1 & \cos b + \cos b' & \cos b \cos b' \\ 1 & \cos c + \cos c' & \cos c \cos c' \end{vmatrix} = 0.$$

Pour la bibliographie de la proposition analogue dans le plan, voir mon article *Sur la parabole de Kiepert* dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1909-1910.

Rapportons la figure à trois diamètres rectangulaires de la sphère O, dont le rayon est pris pour unité. Soient $(\cos\lambda_1, \cos\mu_1, \cos\nu_1), (\cos\lambda_2, ..), (\cos\lambda_3, ..), (\cos\lambda_4, ..)$ les coordonnées des points A, B, C, D. Les plans OP_bP_c, OP_cP_a, OP_aP_b, qui sont perpendiculaires aux droites DA, DB, DC, ont pour équations :

$$U_1 \equiv (\cos\lambda_1 - \cos\lambda_4)\, x + (\cos\mu_1 - \cos\mu_4)\, y + \\ + (\cos\nu_1 - \cos\nu_4)\, z = 0,$$

$$U_2 \equiv \Sigma\,(\cos\lambda_2 - \cos\lambda_4)\, x = 0,\ U_3 \equiv \Sigma\,(\cos\lambda_3 - \cos\lambda_4)\, x = 0.$$

L'équation du plan OAP_a est de la forme $U_2 - m_1 U_3 = 0$; en exprimant qu'il passe par A on trouve :

$$m_1 = \frac{\Sigma \cos\lambda_1\,(\cos\lambda_2 - \cos\lambda_4)}{\Sigma \cos\lambda_1\,(\cos\lambda_3 - \cos\lambda_4)} = \frac{\cos c - \cos a'}{\cos b - \cos a'}.$$

De même les équations des plans OBP_b, OCP_c sont :

$$U_3 - m_2 U_1 = o,\ U_1 - m_3 U_2 = o, \text{ où}$$

$$m_2 = \frac{\cos a - \cos b'}{\cos c - \cos b'},\quad m_3 = \frac{\cos b - \cos c'}{\cos a - \cos c'}.$$

Pour que les plans OAP_a, OBP_b, OCP_c passent par une même droite, on doit avoir $m_1\, m_2\, m_3 = 1$, donc

$$(\cos c - \cos a')(\cos a - \cos b')(\cos b - \cos c') = (\cos c' - \cos a) \\ (\cos a' - \cos b)(\cos b' - \cos c).$$

Cette condition a la même forme que la relation entre les abscisses de six points d'une ponctuelle constituant trois couples en involution ; on peut aussi l'écrire sous la forme (1)

Soit P_d le pôle du petit cercle circonscrit au triangle ABC. La symétrie du déterminant (1) indique que les quatre arcs de grand cercle AP_a, BP_b, CP_c, DP_d concourent en un même point.

Le quadrangle complet ABCD peut être dit *involutif*.

II. Problème de Géométrie plane (Ed. Times, 1910, p. 38).

On marque sur les côtés BC, CA, AB *d'un triangle scalène* ABC *les points* A′ B′ C′ *tels que*

$$BA' . BC = CB' . CC = AC' . AB = \lambda .$$

Peut-on choisir λ *de manière que ces points soient collinéaires ou que les droites* AA′, BB′, CC′ *soient concourantes ?*

Les segments BA′, CB′, AC′ sont ici inversement proportionnels aux côtés correspondants du triangle ABC, tandis que dans les paraboles de Artzt ils sont entre eux comme ces côtés.

Les discussions auxquelles conduit le problème précédent, offrent une grande analogie avec celles des cas où BA′ = CB′ = AC′; l'hypothèse des points A′, B′, C′ collinéaires a été étudiée par M. d'Ocagne (Mathesis, 1887, p. 265), et celle des droites AA′, BB′, CC′ concourantes par Laisant (*Congrès de Limoges*, 1890, p. 26).

1. La condition de collinéarité est :

$$\lambda^3 + (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda) = 0 ;$$

on en déduit :

$$\lambda \Sigma a^2 = \Sigma a^2 b^2 \pm \sqrt{\Sigma a^4 b^4 - 2a^2 b^2 c^2 \Sigma a^2}.$$

Si l'on pose $bc = \alpha$, $ca = \beta$, $ab = \gamma$, la réalité de ces valeurs de λ exige :

$$\Sigma \alpha^4 - 2\Sigma \beta^2 \gamma^2 > 0,$$

inégalité qui exprime que les quantités α, β, γ ne sont pas proportionnelles aux côtés d'un triangle réel. Ces quantités sont entre elles comme les hauteurs du triangle ABC.

Quand λ varie, les points A′, B′, C′ engendrent trois ponctuelles semblables, et les droites A′B′ et B′C′ enveloppent deux paraboles qui touchent le côté CA. Les droites cherchées (réelles ou imaginaires) sont les deux autres tangentes communes à ces deux paraboles.

2. Pour que les droites AA′, BB′, CC′ soient concourantes, on doit avoir :

$$\varphi(\lambda) \equiv \lambda^3 - (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda) = 0.$$

Si $a < b < c$, on voit facilement que cette équation a une racine comprise entre 0 et a^2. Les deux autres racines sont imaginaires, car les racines de l'équation dérivée $\varphi'(\lambda) = 0$, qui sont égales à

$$\frac{1}{6}\left[\Sigma a^2 \pm \sqrt{\Sigma a^4 - 2\,(2\,\Sigma a^2\, b^2 - \Sigma a^4)}\right],$$

sont imaginaires, de sorte que la fonction $\varphi(\lambda)$ est toujours croissante.

Quand λ varie, les droites AA′, BB′, CC′ se correspondent dans trois faisceaux projectifs. Le point d'intersection des rayons AA′ et BB′ décrit une conique passant par les points B et A qui sont donnés par les hypothèses $B'A = 0$ et $CB' = 0$, $CB' = b$ et $BA' = b^2 : a$. De même les rayons BB′ et CC′ se coupent sur une conique passant par C et B. Ces deux courbes ont en commun, outre le point B, un second point réel et deux points imaginaires.

III. Théorème de Géométrie solide (Mathesis, 1915, p. 191). *On donne dans l'espace cinq points quelconques* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. *Les plans respectivement perpendiculaires en* A_1, A_2, A_3, A_4, *aux droites* A_1A_5, A_2A_5, A_3A_5, A_4B_5 *forment le tétraèdre antipodaire du point* A_5 *par rapport au tétraèdre* $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$; *soient* U_5 *et* V_5 *les volumes de ces tétraèdres. Désignons de même par* V_1 *le volume du tétraèdre* $A_2\,A_3\,A_4\,A_5$ *et par* U_1 *le volume de son antipodaire par rapport à* A_1; *etc. On a :*

$$\frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2} = \frac{U_3}{V_3} = \frac{U_4}{V_4} = \frac{U_5}{V_5}.$$

La proposition analogue dans le plan est due à M. Bateman (Ed. Times, 1907, p. 456) ; j'en ai publié, dans Wiskundig Tijdschrift, 1920, une démonstration analytique.

Soient x_r, y_r, z_r des coordonnées rectangulaires de A_r et posons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2_1 + y^2_1 + z^2_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x^2_2 + y^2_2 + z^2_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x^2_3 + y^2_3 + z^2_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x^2_4 + y^2_4 + z^2_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x^2_5 + y^2_5 + z^2_5 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix}.$$

On sait que le volume du tétraèdre limité par quatre plans dont les équations sont

$$M_r x + N_r y + P_r z + Q_r = 0, \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

a pour expression

$$\frac{| Q_1 \; M_1 \; N_1 \; P_1 |}{6 \, q_1 \, q_2 \, q_3 \, q_4},$$

q_1, q_2, q_3, q_4 représentant les mineurs du déterminant $| Q_1 \; M_1 \; N_1 \; P_1$ relatifs aux éléments Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

Les équations des plans perpendiculaires en A_2, A_3, A_4, A_5 aux droites A_2A_1, A_3A_1, A_4A_1, A_5A_1 étant : $(r = 2, 3, 4, 5)$, $(x - x_r)(x_r - x_1) + (y - y_r)(y_r - y_1) + (z - z_r)(z_r - z_1) = 0$, le déterminant de leurs coefficients est :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \rho_{22} - \rho_{21} & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \rho_{33} - \rho_{31} & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \rho_{44} - \rho_{41} & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ \rho_{55} - \rho_{51} & x_5 - x_1 & y_5 - y_1 & z_5 - z_1 \end{vmatrix},$$

où $\rho_{rs} = x_r x_s + y_r y_s + z_r z_s$. Son premier mineur est :

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & 1 \\ x_5 - x_1 & y_5 - y_1 & z_5 - z_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 6V_2$. On verrait de même que $q_2 = 6V_3$, $q_3 = 6V_4$, $q_4 = 6V_5$.

Après avoir bordé le déterminant Δ' d'une cinquième ligne de zéros et d'une cinquième colonne d'unités, ajoutons aux 2^e^, 3^e^ et 4^e^ colonnes la 5^e^ colonne multipliée respectivement par x_1, y_1, z_1 : ajoutons ensuite à la première colonne les trois suivantes multipliées respectivement par x_1, y_1, z_1. Ces transformations changent Δ' en Δ. On en conclut d'abord :

$$U_1 = \frac{\Delta^3}{6^5 \, V_2 \, V_3 \, V_4 \, V_5},$$

et ensuite :

$$\frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2} = \frac{U_3}{V_3} = \frac{U_4}{V_4} = \frac{U_5}{V_5} = \frac{\Delta^3}{6^5 \, V_1 \, V_2 \, V_3 \, V_4 \, V_5}.$$

IV. Triangles semblablement variables (Nouvelle Correspondance mathématique, t. II, pp. 189 et 192).

a. *Un triangle* ABC *de forme constante a un sommet* A *fixe et le côté* AB *passe par un point fixe* D. *Démontrer que la circonférence* ABC *enveloppe un limaçon de Pascal.*

b. *Trouver l'enveloppe de la circonférence circonscrite à un triangle variable qui est de forme constante et dont les côtés passent par trois points fixes* D_1, D_2, D_3.

J'ai donné dans la Nouvelle Correspondance, t. II, p. 358 et t. VI, p. 65, des solutions de ces propositions, celle de a géométrique et celle de b analytique. Voici une solution géométrique de la seconde question.

Les points A_1, A_2, A_3 se meuvent sur trois circonférences U_1, U_2, U_3 qui ont un point commun F. Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle d'inversion le point F ; la puissance d'inversion est quelconque. Soient alors D'_1, D'_2, D'_3, A'_1, A'_2, A'_3 les transformés des points D_1, D_2, D_2, A_1, A_2, A_3. Les circonférences U_1, U_2, U_3 se transforment en les droites $D'_2D'_3$, $D'_3D'_1$, $D'_1D'_2$, et les droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 en les circonférences $A'_2D'_1A'_3F$, $A'_3D'_2A'_1F$, $A'_1D'_3A'_2F$; les points A'_1, A'_2, A'_3 sont évidemment situés sur les droites $D'_2D'_3$, $D'_3D'_1$, $D'_1D'_2$. Il résulte de là que les droites FA'_1, FA'_2, FA'_3 sont également inclinées sur les droites $D'_2D'_3$, $D'_3D'_1$. $D'_1D'_2$. Par conséquent, d'après un théorème de Poncelet, la circonférence qui passe par les points A'_1, A'_2, A'_3 est tangente à la conique de foyer F qui est inscrite au triangle $D'_1D'_2D'_3$. Enfin, l'enveloppe de la circonférence $A_1A_2A_3$ étant l'inverse d'une conique par rapport à son foyer est un limaçon de Pascal.

V. Problèmes de Probabilité (Ed. Times, 1888, p. 183).

Deux personnes ayant, chacune, en main un jeu de 32 cartes mêlé au hasard tournent toujours simultanément une carte jusqu'à épuisement des jeux. Quelle est la probabilité que ces personnes ne tournent pas en même temps la même carte, ou deux cœur ou deux sept ?

A. Attribuons aux cartes des deux jeux, dans l'ordre qu'elles ont dans le premier jeu, les numéros 1, 2, 3,..., 32. Alors une chance favorable est le cas où le second jeu présente une permutation des nombres 1, 2, 3,..., 32 dans laquelle aucune carte n'occupe la place indiquée par son numéro. Le nombre de ces cas est $(P_{-1})^{32}$, expression que l'on développe par le binome de Newton et où l'on remplace ensuite P^n par le nombre P_n des permutations de n lettres. La probabilité cherchée est donc $(P_{-1})^{32} : P_{32}$.

B. Après avoir étalé les 32 cartes du premier jeu sur une même ligne droite, recouvrons 8 quelconques des 24 cartes de ce jeu autres que les cœur, chacune, d'un cœur du second jeu. Recouvrons ensuite au hasard les 24 cartes non recouvertes du premier jeu, chacune, d'une carte du second jeu. On voit ainsi que la probabilité cherchée est :

$$C^8_{24}P_8P_{24} : P_{32} = 17.18\ldots24 : 25.26\ldots32.$$

C. Un raisonnement analogue donne la réponse

$$C^8_{24}P_4P_{28} : P_{32} = 25.26.27.28 : 29.30.31.32.$$

VI. Théorème sur des sphères (Mathesis, 1915, p. 96).

Soient S *la sphère circonscrite à un tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4 \equiv T$, *et* S' *une sphère quelconque qui coupe les faces de* T *suivant les circonférences* σ_1 σ_2 σ_3 σ_4. *Désignons par* ω *le centre radical des quatre sphères* S_1, S_2, S_3, S_4 *qui passent par un sommet* A_r *de* T *et par la circonférence opposée* σ_r. *Démontrer que* ω *est le pôle du plan radical des sphères* S *et* S' *par rapport à* T, *et que ses distances aux faces de* T *sont inversement proportionnelles aux produits* p_1F_1, p_2F_2, p_3F_3, p_4F_4, *les facteurs* p_1, p_2, p_3, p_4 *étant les puissances des sommets de* T *par rapport à* S', *et* F_1, F_2, F_3, F_4 *représentant les aires des faces de* T.

Si l'on pose $A_rA_s = a_{rs}$ et que x_1, x_2, x_3, x_4 désignent des coordonnées barycentriques absolues par rapport à T, les équations des sphères S, S', S_1 sont :

$$S \equiv a^2_{12}x_1x_2 + a^2_{13}x_1x_3 + \cdots + a^2_{34}x_3x_4 = 0,$$

$$S' \equiv S - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) = 0,$$

$$S_1 \equiv S' - \lambda x_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0.$$

En exprimant que S_1 passe par le sommet A_1 (1, 0, 0, 0) on trouve $p_1 + \lambda =$; on a donc :

$$S_1 \equiv S - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) = 0.$$

De là et des équations analogues de S_2, S_3, S_4 on conclut que le centre radical de ces quatre sphères satisfait aux équations

$$p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = p_3x_3 + p_4x_4 + p_1x_1 = \cdots,$$

en sorte que

$$p_1x_1 = p_2x_2 = p_3x_3 = p_4x_4.$$

Par conséquent, les coordonnées barycentriques de ω sont inversement proportionnelles aux coordonnées p_1, p_2, p_3, p_4 du plan radical des sphères S et S′; ce point est donc le pôle du même plan par rapport à T. Les coordonnées normales de ω résultent immédiatement de ce qui précède.

VI. PROBLÈME SUR LE TÉTRAÈDRE (MATHESIS, 1915, p. 127).

Convenons d'indiquer par (X, M) *que la masse* M *est attachée au point* X. *Cela posé, soient :*

A′ *le centre de gravité de* (B, M_{ab}), (C, M_{ac}), (D, M_{ad}) ;
B′ » » (C, M_{bc}), (D, M_{bd}), (A, M_{ba}) ;
C′ » » (D, M_{cd}), (A, M_{ca}), (B, M_{cb}) ;
D′ » » (A, M_{da}), (B, M_{db}), (C, M_{dc}).

Étant donnés les points A′, B′, C′, D′ *et les masses* M_{ab}, M_{ac}, ..., M_{dc}, *construire le tétraèdre* ABCD.

Si l'on fait :

$$\frac{M_{ab}}{M_{ab} + M_{ac} + M_{ad}} = m_{ab}, \quad \frac{M_{ac}}{M_{ab} + M_{ac} + M_{ad}} = m_{ac}, \cdots,$$

les coordonnées barycentriques absolues de A′ par rapport au tétraèdre ABCD sont (0, m_{ab}, m_{ac}, m_{ad}). Soient de même (m_{ba}, 0, m_{bc}, m_{bd}), ... celles des points B′, C′, D′.

On sait que le rapport des volumes de deux tétraèdres XYZU et ABCD est égal au déterminant des coordonnées barycentriques absolues des sommets du premier tétraèdre par rapport au second. D'après cela

$$\frac{AB'C'D'}{ABCD} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{ba} & 0 & m_{bc} & m_{bd} \\ m_{ca} & m_{cb} & 0 & m_{cd} \\ m_{da} & m_{db} & m_{dc} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= m_{cb}\, m_{bd}\, m_{dc} + m_{db}\, m_{bc}\, m_{cd}.$$

En cherchant de même les quotients

$$\frac{AC'D'A'}{ABCD}, \quad \frac{AD'A'B'}{ABCD}, \quad \frac{AA'B'C'}{ABCD}$$

on connaîtra les rapports entre les coordonnées barycentriques du point A relatives au tétraèdre A'B'C'D'. Ces rapports donnent le moyen de construire le point A.

Les points B, C, D se déterminent d'une manière analogue.

VII. APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DITE DE ROBERVAL.

A. *On donne, dans un même plan, un point* O, *une courbe* U *et une droite* d. *Une sécante quelconque* g *menée par* O *rencontre* U *en* A *et* d *en* B. *Sur la perpendiculaire en* B *à* d *on porte la longueur* BC = AB. *Construire la tangente en* C *à la trajectoire de ce point* (ED. TIMES, 1894, p. 339).

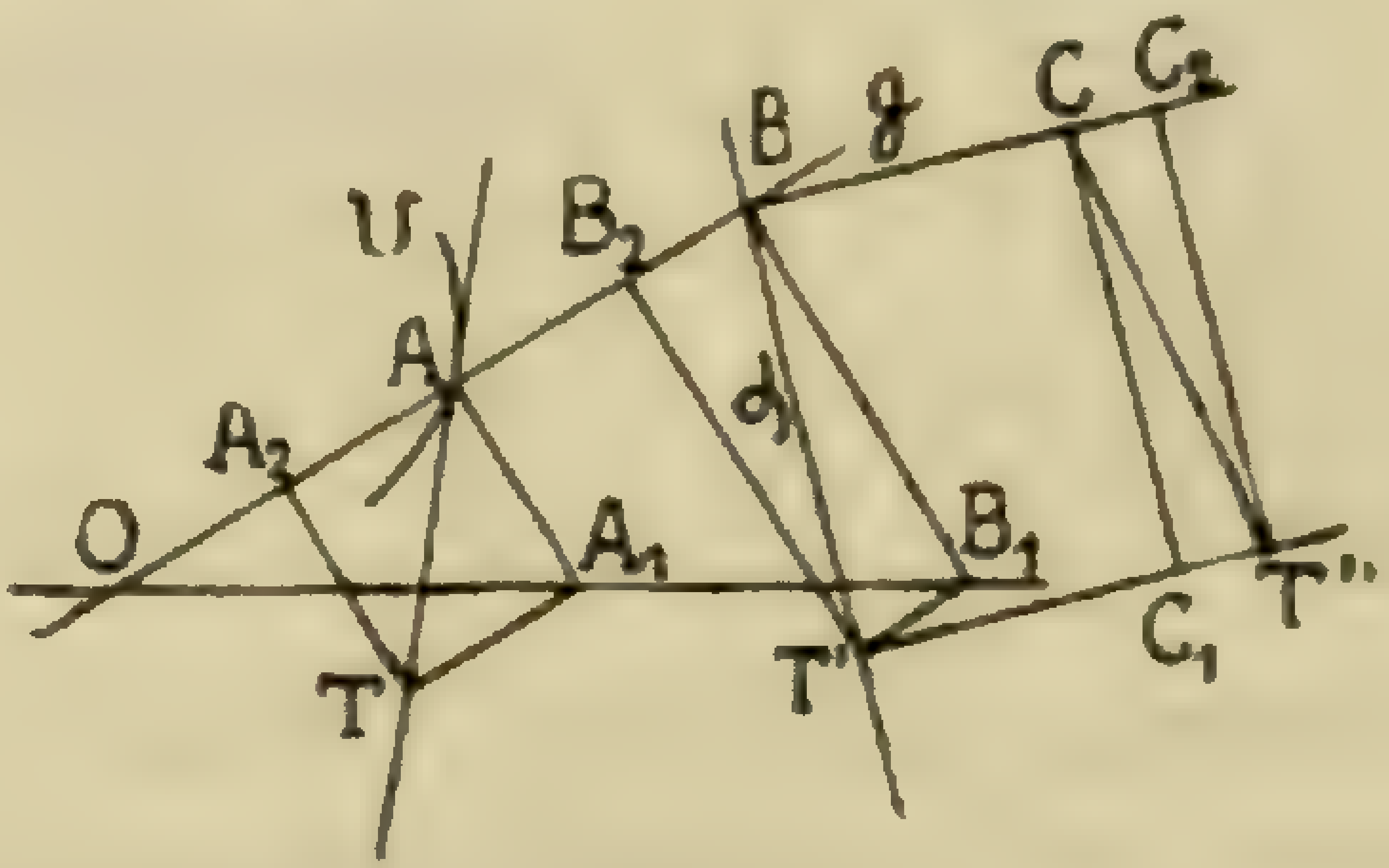


Fig. 1.

Sur la tangente en A à U (Fig. 1) prenons un segment quelconque AT pour représenter la vitesse du point A. Décomposons cette vitesse en deux autres, l'une AA_1 normale à *g* (vitesse de circulation de A autour de O) et l'autre AA_2 dirigée suivant *g* (vitesse de glissement de A sur g). La vitesse de B étant décomposée d'une manière analogue, la vitesse de circulation BB_1 a son extrémité B_1 sur la droite OA_1 ; on en déduit la vitesse BT' de B sur d en menant B_1T' parallèle à g, et la vitesse de glissement BB_2 sur g s'obtient en abaissant $T'B_2$ perpendiculaire à g.

La droite BC étant toujours parallèle à elle-même, le point C est d'abord animé d'une vitesse CC_1 égale et parallèle à BT'. Pour que la longueur BC soit égale à AB, il faut encore imprimer à C une vitesse CC_2 dirigée suivant BC et égale, suivant les cas, à la différence ou à la somme des vitesses de glissement des points A et B sur la droite g. La vitesse totale CT'' de C est la diagonale du rectangle construit sur CC_1 et CC_2.

B. *On donne, dans un même plan, deux points* A *et* A', *et deux courbes* Δ *et* Δ'. *La tangente en un point quelconque* M *de* Δ *rencontre* Δ' *en* M' ; *les droites* AM *et* $A'M'$ *se rencontrent en un point* P. *Construire la tangente en ce point à sa trajectoire* (Ed. Times, 1900, p. 423.

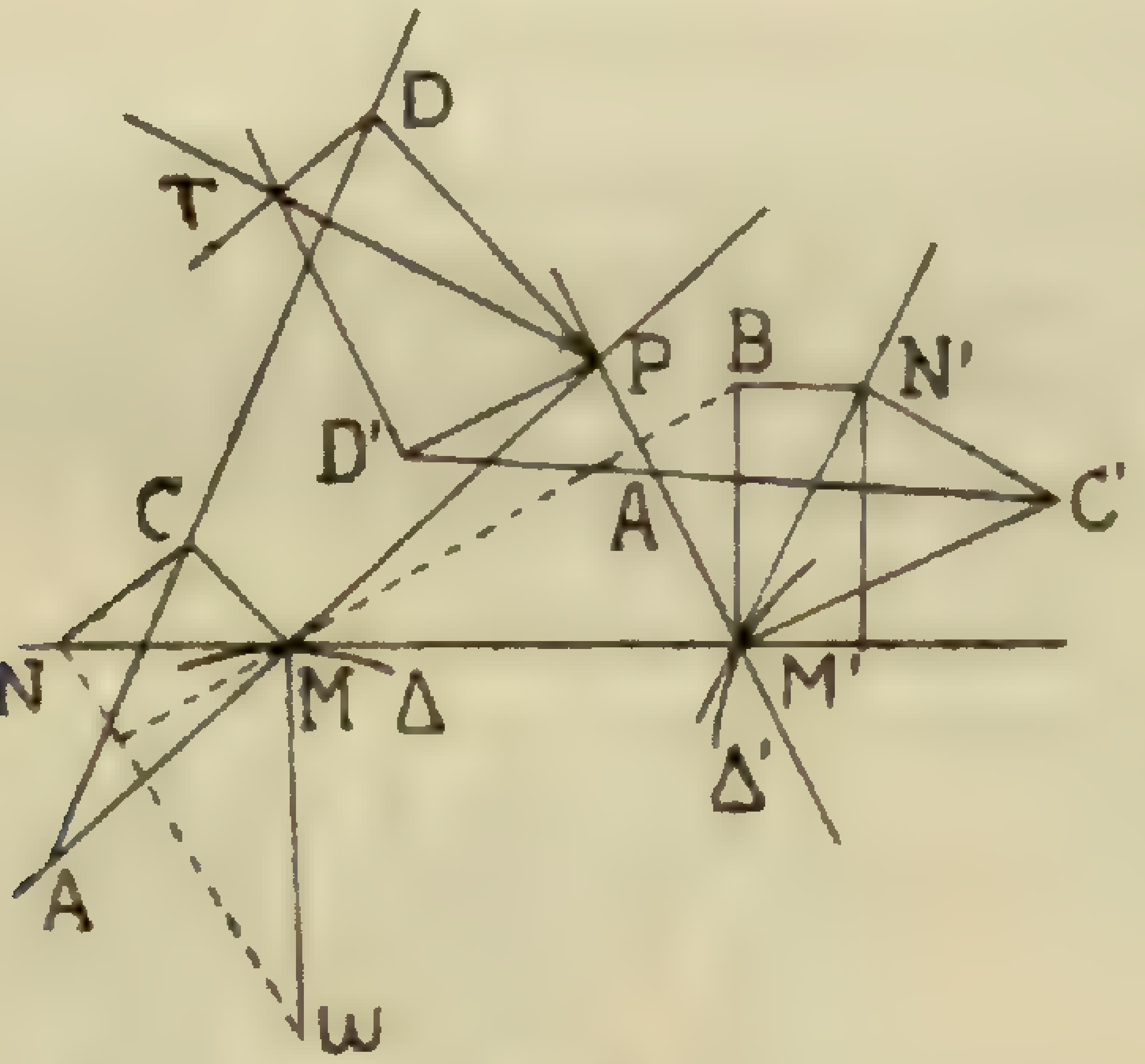


Fig. 2.

Représentons par un segment MN de MM' la vitesse de M (Fig. 2). Si ω est le centre de courbure de Δ en M, les droites ωM et MM' ont la même vitesse angulaire respectivement autour des points ω et M ; on en conclut que la perpendiculaire abaissée de M sur la droite ωN coupe la perpendiculaire élevée en M' sur $M'M$ en l'extrémité B de la vitesse de circulation de M' autour de M. La parallèle à MM' par B détermine la vitesse $M'N'$ de M' sur Δ.

Si MC est la vitesse de circulation de M autour de A, la droite AC fait connaître la vitesse de circulation PD du point P autour de A. Semblablement la vitesse de circulation M′C′ de M′ autour de A détermine celle de P. D'après la règle du quadrilatère des vitesses, les perpendiculaires en D sur PD et en D′ sur PD′ se coupent en l'extrémité de la vitesse PT du point P.

c. *On donne, dans un même plan, deux courbes* U, V *et un point* O. *Deux points* M *et* N *se meuvent respectivement sur ces courbes de manière que l'angle* MON *reste constant. Soit* P *le point d'intersection des tangentes en* M *à* U *et en* N *à* V. *Trouver le point de contact de la droite* MN *avec son enveloppe et construire la tangente en* P *à la trajectoire de ce point.*

Ce problème a une grande analogie avec la question 848 que j'ai proposée dans Mathesis, 1893, p. 152 et dont ce journal a publié en 1895, p. 143, des solutions par MM. L. Meurice et Cl. Servais.

Décomposons la vitesse de M sur U en deux autres, l'une normale à la droite OM (vitesse de circulation de M autour de O) et l'autre dirigée suivant OM (vitesse de glissement) ; soit Mμ la première composante (Fig. 3). La vitesse de N sur V étant décomposée en deux autres dont l'une est normale à la droite ON et l'autre dirigée suivant ON, on obtient la première composante Nν en construisant l'angle NOν égal à MOμ. Pour obtenir les vitesses M*m* et N*n* des points M et N sur U et V, il suffit de mener la parallèle μ*m* à OM et la parallèle ν*n* à ON.

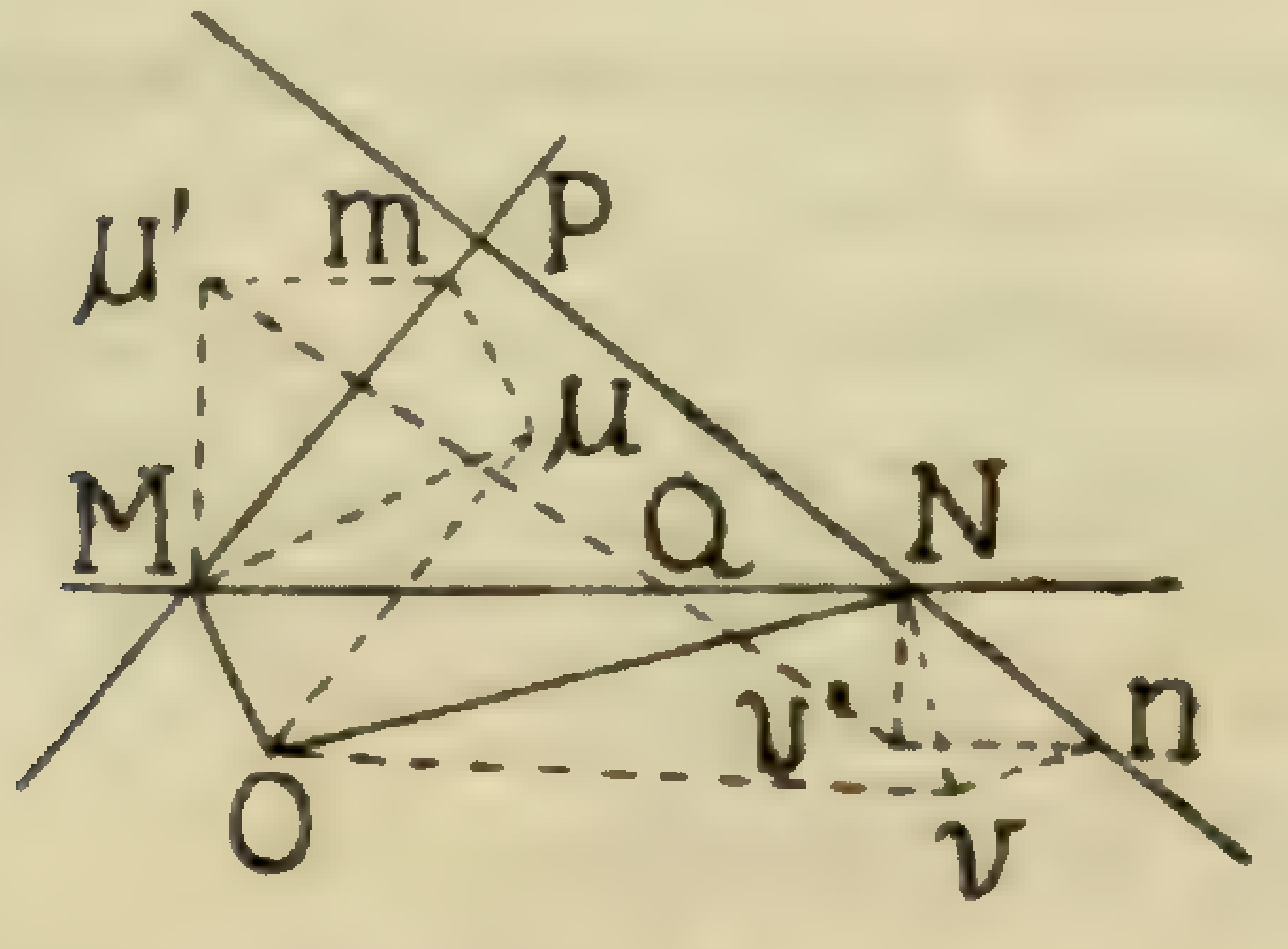


Fig. 3.

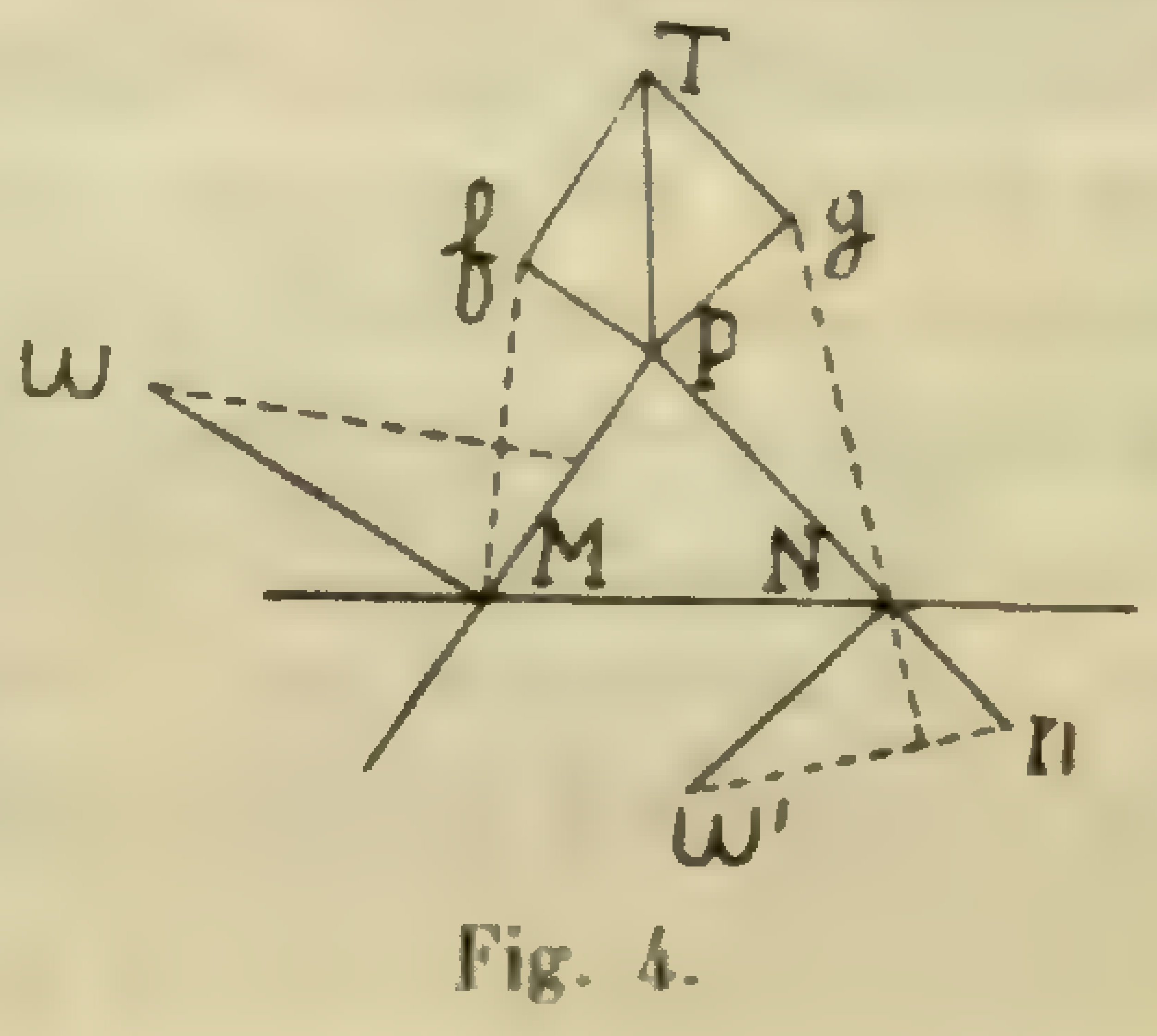


Fig. 4.

Si Q désigne le point de contact de la droite MN avec son enveloppe, on peut considérer un déplacement infiniment petit des points M et N comme résultant d'une rotation de la droite MN autour du point Q et de glissements simultanés des points M et N sur cette droite. Les vitesses de circulation Mμ' et Nν' autour de Q sont les projections des vitesses Mm et Nn sur les normales à MN en M et N ; comme elles sont proportionnelles aux segments QM et QN, la droite $\mu'\nu'$ détermine le point cherché Q.

Soient ω et ω' les centres de courbure de U en M et de V en N (Fig. 4) (1). Les droites ωM et MP ayant la même vitesse angulaire respectivement autour de ω et M, la vitesse de circulation Pf de P autour de M s'obtient en menant la perpendiculaire Mf à la droite ωm. Une construction analogue fait connaître la vitesse de circulation Pg de P autour de N. Les perpendiculaires à Pf en f et à Pg en g se coupant en T, la droite PT représente la vitesse de P sur sa trajectoire.

M. Simonart soumet à la Section la communication suivante : *Solution d'un problème relatif au mouvement d'un point pesant sur une courbe fixe.*

Au chapitre XII de son *Cours de Mécanique analytique* P. Gilbert propose l'exercice suivant, dont il attribue la solution à Salladini.

Déterminer la courbe située dans un plan vertical, telle qu'un point pesant, partant sans vitesse d'un point donné A de cette courbe, mette le même temps à atteindre un point quelconque M de la courbe que s'il parcourait la corde AM.

En prenant pour axe polaire AX la verticale descendante du point A et désignant par v la vitesse du point M (r, θ) à l'instant t, le théorème de la force vive donne, à cet instant,

$$v^2 = 2gr\cos\theta,$$

ou

$$\frac{dr^2 + r^2d\theta^2}{dt^2} = 2gr\cos\theta.$$

---

(1) Les figures 3 et 4 ne correspondent pas aux mêmes données.

On en déduit :

(1) $$dt = \frac{1}{\sqrt{2gr \cos \theta}} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta.}$$

Sur la corde AM, θ est constant et $d\theta = 0$; le temps élémentaire de parcours est donné par

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g \cos \theta}} \cdot \frac{dr}{r} ;$$

d'où, en comptant le temps à partir de A,

$$t = \sqrt{\frac{2r}{g \cos \theta}}$$

Cette valeur de t est aussi le temps de parcours sur la courbe AM. Sur cette courbe on a, en différentiant l'expression précédente,

(2) $$dt = \frac{1}{\sqrt{2gr} \cos \theta} \left(dr + r tg\theta d\theta\right) \cdot$$

Égalant les seconds membres de (1) et (2), on trouve pour équation différentielle de la trajectoire :

$$dr + r tg\theta d\theta = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

La séparation des variables conduit à l'équation linéaire :

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{tg 2\theta}$$

dont l'intégrale est :

$$r^2 = c \sin 2\theta$$

ou

$$r^2 = c \cos 2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right),$$

oit une lemniscate dont l'axe est incliné de 45° sur la verticale descendante.

Nous allons montrer que ce problème est un cas particulier d'un autre plus général dont la solution est tout aussi élémentaire.

Imposons pour temps de parcours sur la trajectoire une valeur n fois supérieure à celle que met le mobile à décrire la corde AM.

On est conduit à intégrer l'équation différentielle :

$$n(dr + rtg\theta d\theta) = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

qui peut encore s'écrire, en ordonnant par rapport à $\frac{dr}{d\theta}$,

$$(n^2 - 1)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 2n^2 rtg\theta \frac{dr}{d\theta} + r^2 (n^2 tg^2\theta - 1) = 0.$$

On en tire, en supposant $n^2 - 1 \neq 0$ (cas de la lemniscate exclus) :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-n^2 rtg\theta \pm \frac{r}{\cos\theta}\sqrt{n^2 - \cos^2\theta}}{n^2 - 1}.$$

La trajectoire est ainsi définie par l'une et l'autre des équations différentielles à variables séparées :

$$(3) \qquad \frac{dr}{r} = \frac{1}{n^2 - 1}\left(-n^2 \sin\theta + \sqrt{n^2 - \cos^2\theta}\right)\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

$$(5) \qquad \frac{dr}{r} = \frac{1}{n^2 - 1}\left(-n^2 \sin\theta - \sqrt{n^2 - \cos^2\theta}\right)\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Les quadratures sont élémentaires et l'on trouve aisément comme équations de la trajectoire :

$$r^{n^2-1} = c(\cos\theta)^{n^2}\left(\frac{\sqrt{n^2 - \cos^2\theta} + n\sin\theta}{\sqrt{n^2 - \cos^2\theta} - n\sin\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 - \cos^2\theta} + \sin\theta}$$

et

$$r^{n^2\ 1} = c(\cos\theta)^{n^2}\left(\frac{\sqrt{n^2 - \cos^2\theta} - n\sin\theta}{\sqrt{n^2 - \cos^2\theta} + n\sin\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot (\sqrt{n^2 \cos^2\theta} + \sin\theta).$$

Deuxième Section

Présidence de M. A. Witz.

M. de Hemptinne fait une communication *sur le rôle des ions et des électrons dans les réactions chimiques*. En voici le résumé.

On admet généralement que les atomes sont constitués par un noyau positif autour duquel gravitent des particules négatives ou électrons. Les propriétés chimiques des corps dépendent principalement des électrons extérieurs, ils jouent aussi un rôle prépondérant au point de vue de la grandeur de la valence. La réduction des oxydes métalliques par l'effluve électrique dans une atmosphère d'hydrogène semble confirmer ces hypothèses (1). En effet, on constate d'abord que les ions et les électrons transforment tous deux les composés oxygénés du plomb en sous-oxyde de plomb ; cependant, si l'on admet que la molécule d'hydrogène est décomposée en un ion et un électron, l'expérience démontre que la disparition d'une molécule d'hydrogène correspond à une charge dans le cas de l'ion et à deux charges dans le cas des électrons ; deux électrons semblent donc nécessaires pour libérer un atome d'oxygène, ce qui correspond à la valence de ce corps. L'action des électrons exige une certaine chute de potentiel variable avec la nature de la substance ; elle doit atteindre une certaine grandeur pour que l'électron pénètre dans l'édifice moléculaire, il sature alors une valence du métal, c'est ainsi que deux électrons font perdre au plomb deux de ses valences et libèrent un atome d'oxygène.

A propos du rayon vert, par le R. P. R. Lange, S. J.

Parfois les premiers ou les derniers rayons du soleil sont de couleur verte. Ce phénomène est relativement rare et même ne se produit pas régulièrement dans des conditions atmosphériques semblables. Peut-être pouvons-nous donner un élément d'explication de cette irrégularité.

---

(1) Bullet. Acad. Royale, 1921.

L'on sait que le rayon vert est dû au pouvoir dispersif de l'atmosphère terrestre : celle-ci, relevant différemment les couleurs élémentaires, produit au bord supérieur du soleil une frange verte qui, au lever ou au coucher de l'astre, est, pendant un court espace de temps, seule visible au-dessus de l'horizon.

Supposons un horizon rectiligne. La zone éclairante verte est alors un segment circulaire dont la flèche peut au plus atteindre la valeur de l'épaisseur maxima de la frange verte. L'aire de cette zone est donnée en fonction de la flèche h et du rayon solaire R par la formule

$$(1)\ S = \frac{\pi R^2}{2} - (R - h)\sqrt{R^2 - (R - h^2)} - R^2 \, arc\, sin \frac{R - h}{R}$$

Mais l'horizon peut présenter, au point où le soleil disparaît, une surélévation qui recouvre prématurément un segment du soleil blanc. Si nous désignons par H la hauteur de ce segment et que nous posions $S = f(h)$ dans la formule (1), l'aire de la zone éclairante sera donnée dans ce second cas par

$$(2)\ S_1 = f(h + H) - f(H).$$

Pour une même hauteur de frange verte, *cette aire* S_1 *est plus grande que l'aire* S, car l'obstacle ne recouvre que la région blanche du soleil et laisse donc passer, de part et d'autre, le rayonnement des surfaces vertes qui bordent cette région. Celles-ci s'ajoutent à la surface S originelle. *La différence va croissant avec la hauteur de l'obstacle*, puisque les zones vertes ajoutées grandissent, elles aussi.

D'autre part, la marche du soleil à l'horizon pouvant être considérée comme uniforme, tout instant du lever ou du coucher de l'astre sur horizon plat est caractérisé par une valeur h de la flèche du segment éclairant vert, et cette valeur a sa correspondante exacte à un moment du même phénomène sur horizon sinueux. Dès lors, à tout instant de l'apparition ou de la disparition de la frange verte, l'aire du segment vert visible est d'autant plus grande qu'elle dessine le contour d'un obstacle circulaire plus élevé.

La différence entre les surfaces éclairantes vertes pour les deux formes d'horizon est sensible. En donnant à h sa valeur maxima — elle est de 30″ au dire de certains observateurs — l'on obtient :

pour $H = h$, $S_1 = 1{,}738\ S$
pour $H = 2\,h$, $S_1 = 2{,}232\ S$
pour $H = 3\,h$, $S_1 = 2{,}740\ S$

Pour une valeur intermédiaire de h, soit 15″, on obtiendrait :

pour $H = h$, $S_1 = 1{,}820\ S$
pour $H = 2\,h$, $S_1 = 2{,}348\ S$
pour $H = 3\,h$, $S_1 = 2{,}800\ S$

Augmentant ainsi la surface de la zone éclairante verte, l'intervention de l'obstacle multiplie d'autant son intensité lumineuse ; de la sorte il peut la rendre visible parfois dans des conditions atmosphériques où elle ne le serait pas sur horizon rectiligne. Cette particularité expliquerait l'irrégularité du rayon vert.

Reste à calculer quelles devraient être les dimensions d'un obstacle qui recouvrirait un segment solaire de flèche H, égale, par exemple, ou double, ou triple de l'épaisseur maxima de la frange verte (30″). Pour diverses valeurs de la distance à l'horizon, un calcul facile donne les solutions suivantes qui correspondent aux dimensions d'une faible ondulation de terrain, d'une forte vague, d'une colline peu élevée.

DISTANCE A L'HORIZON	H = 30″		H = 1′		H = 1′30″	
	HAUTEUR	BASE	HAUTEUR	BASE	HAUTEUR	BASE
1 Klm	0,15 m.	2,23 m.	0,29 m.	3,13 m.	0,44 m	3,80 m.
5 Klm	0,73 m.	11,14 m.	1,46 m.	15 67 m.	2, 8 m.	19,01 m.
10 Klm	1,45 m.	22,28 m.	2,91 m	31,34 m.	4,36 m.	38,01 m.
15 Klm	2,18 m.	33,41 m.	4,37 m.	47,01 m.	6,54 m.	57,02 m.
50 Klm	7,25 m.	111,38 m.	14,55 m.	156,71 m.	21,80 m	190,05 m.

Dilatations et changements d'état, par le R. P. V. Schaffers, S. J.

On cite parfois une loi énoncée par R. Pictet, d'après laquelle le produit du coefficient de dilatation des métaux à l'état solide par leur température absolue de fusion est constant. Sa valeur est 0,06 avec la dilatation cubique, 0,02 avec la dilatation linéaire ; d'où il suit que l'état solide cesse d'être possible quand les distances de centre à centre des molécules ont augmenté du cinquantième de leur valeur ou que le volume a augmenté d'un seizième. En fait, la règle ne s'applique qu'aux métaux, et même dans cette catégorie de corps la vérification est, en somme, très défectueuse.

Il ne semble pas qu'on ait jamais cherché à savoir s'il existait une loi semblable pour les températures d'ébullition sous une pression déterminée, par exemple la pression atmosphérique. Ce cas est pourtant plus intéressant que le premier, parce qu'il donnerait la condition de distances mutuelles à remplir pour que les molécules deviennent complètement indépendantes entre elles, et donc les distances où s'annulent les forces de cohésion. Mais les données utilisables sont peu nombreuses jusqu'ici.

Il ne suffit pas, en effet, d'ajouter la dilatation totale de la substance liquide à sa dilatation totale à l'état solide, ce qui s'obtient approximativement en multipliant le coefficient de dilatation liquide moyen par la différence des températures d'ébullition et de fusion. Il faut encore tenir compte de la variation de volume subie par la plupart des corps au moment de la fusion. Pour presque tous, c'est une augmentation de volume. Quelques exceptions se rencontrent, comme on sait. La plus remarquable est celle de l'eau. En somme, il faut donc connaître cinq constantes différentes pour chaque corps : les coefficients de dilatation sous les deux états, les températures de fusion et d'ébullition, et enfin le changement de volume corrélatif au changement d'état.

Il est très peu de corps, malheureusement, pour lesquels ces cinq constantes soient connues. J'en ai trouvé une douzaine seulement dans le *Recueil de constantes de la Société Française de Physique*. De plus, on sait que les coefficients de dilatation varient beaucoup avec la température, surtout ceux des liquides. On ne doit donc pas compter sur beaucoup de précision et être disposé à se contenter de valeurs moyennes. Avec ces limitations, le résultat, calculé pour la dilatation totale depuis le zéro absolu, ne manque pas d'intérêt, comme le montre le tableau suivant :

	DILATATION SOLIDE	DILATATION LIQUIDE	DILATATION DE CHANGEMENT D'ÉTAT	TOTAL
Bismuth	0,0216	0,3565	— 0,033	0,345
Cadmium	0,0795	0,095	0,0554	0,230
Étain	0,034	0,2323	0,0273	0,2935
Mercure	0,021	0,0719	0,051	0,144
Phosphore	0,1179	0,1366	0,034	0,289
Plomb	0,0527	0,1513	0,0374	0,2414
Potassium	0,080	0,1807	0,0263	0,287
Sodium	0,073	0,18	0,0255	0,279
Soufre	0,059	0,145	0,057	0,261
Thallium	0,044	0,169	0,032	0,245
Eau	0,042	0,045	— 0,083	zéro

Ainsi donc, l'état gazeux serait le seul état d'équilibre possible dès que la variation de volume totale à partir du zéro absolu atteindrait 0,266 en moyenne, ce qui correspond à une expansion linéaire de 0,09, ou un onzième.

On remarquera que la loi semble beaucoup plus générale que celle de Pictet : parmi les corps simples sur lesquels il a été possible de la vérifier, se trouvent, en effet, deux métalloïdes, le Phosphore et le Soufre. Les autres sont des métaux. Quant aux composés, nous n'avons pu réunir pour aucun d'eux, à l'exception de l'eau, l'ensemble des cinq constantes nécessaires. Il serait fort à souhaiter que cette lacune soit comblée.

L'eau occupe une position exceptionnelle : la somme de ses trois dilatations est sensiblement nulle. D'où la curieuse conséquence que son volume au moment de l'ébullition normale est le même qu'au zéro absolu, à moins toutefois, ce qui n'aurait rien d'inattendu, qu'aux températures très basses il ne se présente de nouvelles anomalies de dilatation.

Deux autres corps suivent mal la nouvelle loi, et leurs dilatations totales n'ont pas été employées pour le calcul de la valeur moyenne 0,266. C'est d'abord le Mercure, que son caractère anormal de métal liquide à la température ordinaire, semblait d'avance mettre hors de cause. C'est ensuite le Bismuth, qui a, comme l'eau, une dilatation de changement d'état négative, mais moindre en valeur absolue. La valeur excessive de sa dilatation totale est due surtout à la connaissance imparfaite de son coefficient de dilatation liquide. Nous avons fait usage de celui que Vicentini a fait connaître en 1890, savoir 306×10^{-6}. Mais le même Vicentini avait trouvé deux ans plus tôt, avec Omodei, la valeur 120×10^{-6}, et la même année Lüdeking adoptait 44×10^{-6}. Ces derniers chiffres donneraient une dilatation totale bien inférieure à la moyenne 0,266. Il est donc fort possible que le Bismuth rentre dans la règle quand ce désaccord sera levé.

La structure atomique du Nitrate de Strontium cubique, par M. l'abbé J. De Smedt.

D'après les données cristallographiques (von Groth, *Chemische Kristallographie)*, le Nitrate de Strontium présente deux modifications cristallines. L'une sans eau de cristallisation est une forme tétartoédrique du système régulier, appartenant à la classe tétraédrique-pentagonale-dodécaédrique, avec 3 axes binaires perpendiculaires aux plans 100 et 4 axes ternaires normaux aux faces 111. L'autre avec 4 H_2O appartient au système monoclinique.

L'analyse d'une molécule relativement compliquée comme celle du $Sr(NO_3)_2$ a été facilitée par l'analyse du Chlorate et du Bromate de Sodium, par MM. Kolkmeyer, Byvoet et Karsen (VERSLAGEN DER KON. AK. VAN WETENSCH., Amsterdam, XXIII, 4, p. 644, 1920). Ces cristaux possèdent la propriété de faire tourner le plan de polarisation, propriété qui disparaît lorsque les sels sont en solution. Il faut donc en chercher la cause dans la structure du cristal et non dans celle de la molécule.

Leur analyse par rayons X a conduit à la structure suivante. Divisez le cube élémentaire du réseau cristallin en 8 cubes. Quatre de ceux-ci sont garnis d'une molécule du Chlorate ou du Bromate ; notamment 4 cubes dont les centres forment les sommets d'un tétraèdre régulier. Dessinez dans chacun des 4 cubes une diagonale de manière qu'elles ne se coupent pas et qu'elles ne soient pas parallèles. Placez arbitrairement sur une des diagonales un atome de Sodium et un atome halogène. La place des autres est alors définie par les axes ternaires de symétrie. Les trois atomes d'Oxygène sont situés, à 120° les uns des autres, dans un plan normal à la diagonale et passant à peu près par l'atome halogène.

Cette structure n'est pas superposable à son image par réflexion, parce que les diagonales ont un sens déterminé sans ambiguïté par la direction Sodium-halogène. Ainsi cette structure explique l'existence des cristaux dextrogyres et lévogyres de ces sels du Sodium.

L'isomorphie du Nitrate de Strontium cubique avec ces cristaux m'a conduit à admettre une structure analogue. Elle en diffère seulement par ce qui suit. L'atome Strontium est situé au milieu de la diagonale. Les deux atomes d'Azote se placent de part et d'autre à égale distance sur la diagonale, tandis que les deux groupes O_3 sont situés dans des plans normaux à la diagonale qui passent respectivement par les deux atomes d'Azote. De cette manière, la symétrie de la disposition par rapport au Strontium, fait disparaître la polarité des diagonales et l'absence du pouvoir rotatoire dans ce Nitrate s'explique par le fait même.

Afin de confirmer expérimentalement cette structure hypothétique, j'ai pris un röntgenogramme du Nitrate de Strontium cubique par la méthode de la poudre cristalline, suivant Debye et Scherrer. La longueur d'onde employée est celle de la radiation K du Chrome. Un examen en lumière polarisée m'a assuré avoir la modification cubique.

Le röntgenogramme a confirmé la structure supposée de deux manières :

1° En calculant, pour cette structure, la longueur du cube élémentaire du réseau cristallin on obtient $d = 7{,}77^5$ Å (poids moléculaire 211.65 ; densité 2.974 ; nombre d'Avogadro 0.6062×10^{24}).

Cette valeur a été introduite dans la relation fondamentale de la réflexion des rayons X par un cristal cubique $\overline{\sin}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\lambda^2}{4d^2}(h^2 + k^2 + l^2)$ où $\overline{\sin}^2 \frac{\theta}{2}$ est une donnée expérimentale du film et hkl sont des indices de Miller.

Ces calculs ont donné pour le facteur $h^2 + k^2 + l^2$ un système de valeurs entières qui sont la somme de 3 carrés de nombres entiers.

2° Le calcul des intensités des lignes d'interférence données par la structure supposée, a également été confirmé par le röntgenogramme obtenu.

En effet, il ne porte que les lignes pour lesquelles le calcul prévoit pour les atomes de Strontium une interférence favorable. Cette particularité est due au pouvoir de dispersion prépondérant du Strontium, son nombre atomique étant 38 et ceux de l'Azote et de l'Oxygène respectivement 7 et 8. On peut en conclure que la position des atomes de *Sr* aux centres des 4 petits cubes est démontrée expérimentalement. Une fois cette disposition acquise, le reste de la structure telle qu'elle a été décrite, est la conséquence de la symétrie du cristal.

Le calcul ultérieur des intensités des lignes permettra de déterminer les paramètres des autres atomes de l'édifice.

Un exposé plus complet de ce travail paraîtra quand ces calculs seront achevés.

Troisième Section

M. le curé Claerhout entretient la Section d'*un campement gaulois établi en Flandre*.

Sur le territoire de la commune de Saint-André, située aux portes de Bruges, on remarque, à une distance de 1650 m. Sud-Est de l'église de Varsenaere, une enceinte composée d'un fossé, défendu par une levée de terre (¹).

A l'intérieur de cette enceinte se trouvait autrefois un couvent de Chartreuses, indiqué sous le nom de *Sartreusinen*, sur la magnifique carte du Franc de Bruges, peinte par Pourbus et restaurée par Claeissens (²). Ce couvent n'existe plus depuis les

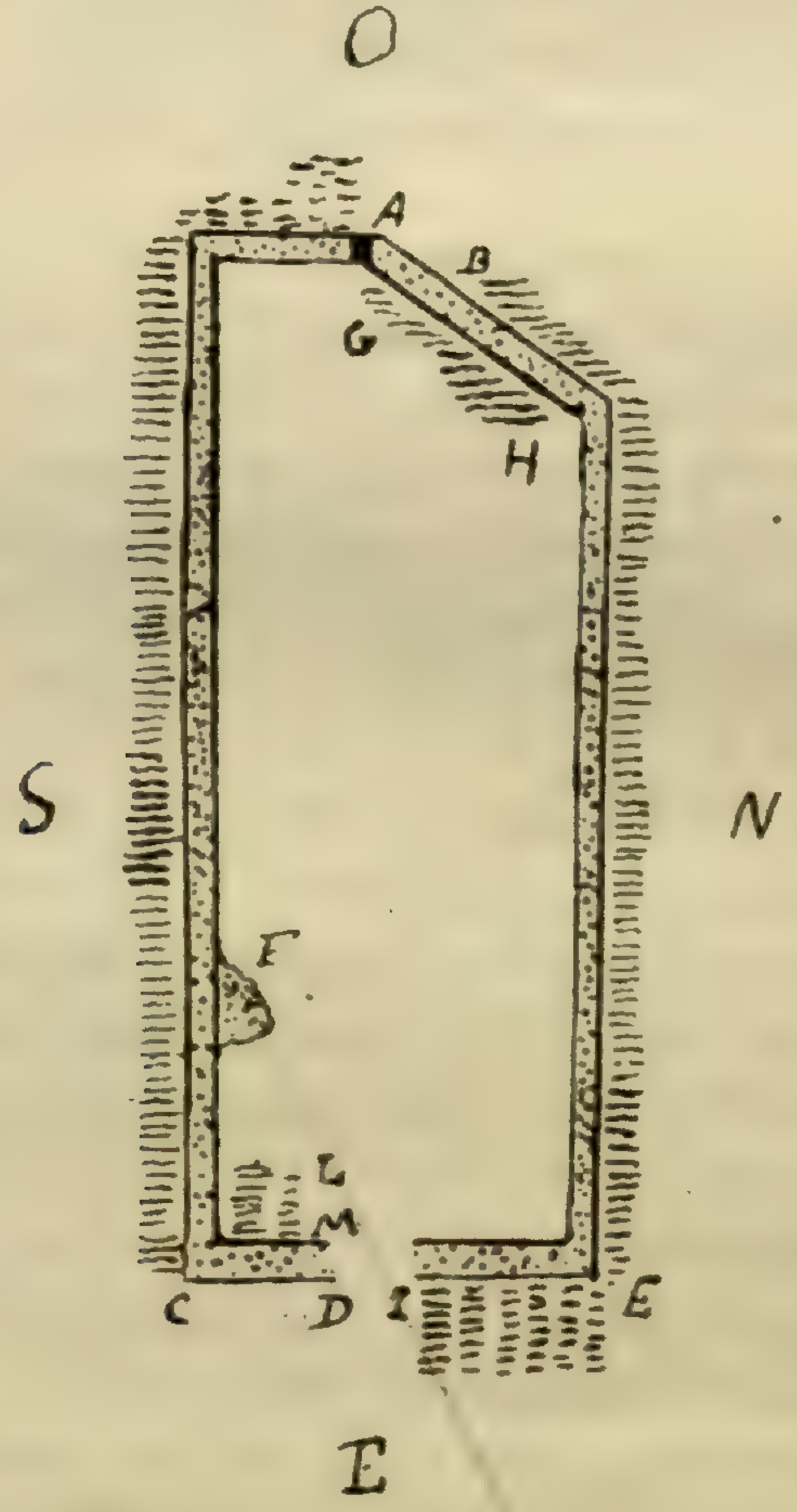
---

(¹) M. Baron A. de Loë, *Rapp. génér. sur les Fouilles exécutées en 1912*. Dans ANNALES DE LA SOC. ROYALE D'ARCHÉOL. DE BRUX., t. XXVII, 1913, p. 201.

(²) A. Van Speybrouck, *Saint-André. Glossaire toponymique*, avec carte. Dans ANN. DE LA SOC. D'ÉMUL. 5ᵉ série. T. I, 188. Bruges, 1889.

guerres de religion du XVI^e siècle, mais à l'endroit qu'il occupait, se voient aujourd'hui les bâtiments d'une métairie.

Les retranchements dont nous donnons une esquisse au $\frac{1}{5\,000}$ sont admirablement conservés et font partie aujourd'hui de la propriété de M. Stanislas van Outryve d'Ydewalle, bourgmestre de Saint-André. Nous les avons visités à diverses reprises et dernièrement le 7 mars et le 24 août de cette année.



L'espace pointillé représente le fossé en V : il est sans interruption sur tout le plan rectangulaire et un peu irrégulier, excepté au point D, où se trouve l'entrée par laquelle on pénètre dans l'enceinte. Au point A, il y a un pont de construction récente.

Les petits traits représentent la levée de terre, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de l'enceinte.

A l'intérieur on aperçoit une levée assez large en GH et LM. En F il y a un abreuvoir.

A l'extérieur la levée de terre a été nivelée en AB et CD. Partout ailleurs elle a à la base une largeur d'environ 10 mètres. Elle s'élargit un peu au point A ; entre les points IE elle a une largeur de 24 mètres.

M. le baron A. de Loë considère les retranchements de Saint-André comme les vestiges d'un camp romain, bien que les camps romains aient d'ordinaire quatre entrées ; il était porté à les regarder comme tels parce qu'ils sont situés à un point culminant, à proximité de la voie romaine bien connue de Cassel à Bruges (¹).

En étudiant des retranchements situés à Gerichtstetten (²), arrondissement de Mosbach, canton de Buchen, dans les régions septentrionales du Grand-Duché de Bade, nous avons pu constater que ces retranchements badois, datant de l'époque de La Tène, sont à peu près identiques à ceux de Saint-André et l'idée nous est venue que cette similitude nous autorise à assigner aux retranchements de Saint-André la même date et à leur attribuer la même origine.

Pouvons-nous réellement regarder l'enceinte de Saint-André comme un campement gaulois ?

Les lignes suivantes que le regretté M. Déchelette a consacrées à de semblables vestiges du deuxième âge du fer et que nous avons pu lire dans la suite, sont bien faites pour nous confirmer dans notre opinion :

« On a reconnu en dernier lieu dans l'Allemagne du sud de petites enceintes sur plan carré ou rectangulaire avec fossé en V et levée de terre, qui paraissent appartenir pour la plupart aux derniers temps de l'époque celtique. En raison de leurs faibles dimensions on les a considérées comme *Castella* ou blockhaus.

(¹) A. de Loë, *Op. laudat.* L'auteur communique également un plan de l'enceinte, mais il n'est pas exact : elle a une longueur de 300 mètres, mais la largeur n'est pas de 300 mètres, mais seulement d'environ 100 mètres.

(²) E. Wagner, *Fundstätten und Funde im Grossherzogtum Baden.* Tome II, p. 405. Tübingen, 1911.

Une des plus caractéristiques est celle de Gerichtstetten (Bade). Elle présente l'aspect d'un rectangle irrégulier dont les côtés, défendus par une levée de terre et un fossé, mesurent 131 × 123 mètres. Trois portes donnent accès à la cour intérieure abritant des fonds de cabanes et une petite maison construite en pierres sèches comme celles de Bibracte. Les vestiges d'objets divers recueillis dans cette enceinte appartiennent aux phases moyenne et récente de l'époque de La Tène.

En Allemagne comme en France, beaucoup d'anciennes enceintes encore inexplorées sont sans doute appelées à livrer des vestiges de cette même époque. Celle de la Thuringe ont évidemment dû jouer un rôle important dans les luttes défensives des Celtes contre les envahisseurs germains (¹). »

Comme on le voit, ces camps gaulois, d'après les résultats des fouilles effectuées à l'intérieur du circuit de défense, étaient occupés soit par une grande métairie, soit par un ensemble de cabanes, constituant un *oppidum* celtique ; nous présumons que la superficie du camp de St-André était assez vaste pour servir d'emplacement à un village de l'époque de La Tène.

Nous n'avons pas encore eu l'occasion de faire des fouilles pour découvrir des objets de l'époque de La Tène ou pour découvrir le cimétière gaulois qui avoisine presque toujours les traces de retranchements analogues à ceux que nous venons de signaler. Le glossaire toponymique de St-André renseigne des lieux dits *enfer* et *paradis ;* mais on les rencontre seulement dans les parties du territoire situées au Nord et non à l'Ouest de la commune. Nous estimons qu'il y a un cimetière gaulois à trouver à proximité des retranchements de St-André.

L'époque de La Tène est représentée dans la Flandre Occidentale :

par le premier crannoge celtique découvert sur le continent (²);

par de nombreux débris de vases carénés découverts dans les niveaux correspondant à l'ancien sol de la plaine maritime, cou-

---

(¹) J. Déchelette, *Archéologie celtique. Second Âge du Fer.* Paris, 1914. P. 972.

(²) Ce crannoge fut découvert en notre présence à Zeebrugge, en août 1904.

vert par les alluvions amenées par l'invasion marine de l'époque franque. On a donné à ces vases, recueillis dans les tranchées du canal maritime, le nom de vases ménapiens, bien qu'avant l'époque romaine les Ménapiens fussent fixés à l'embouchure du Rhin, sur la rive droite de ce fleuve (1) ;

par les traces de l'industrie du fer, mises au jour dans la station palafittique de Denterghem : limonite, scories, fragments de culots, morceau de grand moule en terre, etc. (2) ;

par des tombes à incinération, antérieures à l'époque romaine, rencontrées dans le cimetière belgo-romain et franc exploré à Emelghem près Iseghem, par notre savant collègue M. le Baron Gillès de Pélichy (3);

par de nombreux objets recueillis dans les gisements côtiers de la Panne, fouillés au courant de plusieurs années par M. le Baron A. de Loë (4). Ces gisements reposent aussi sur le sol primitif de la Flandre maritime, sur des îlots du limon récent quaternaire.

Sur quelques Grewia (Tiliacées) du Congo Belge, par É. De Wildeman.

L'examen de quelques plantes appartenant au genre *Grewia*, et provenant des récoltes de M. le Dr J. Bequaert, nous a amené à créer un certain nombre d'espèces nouvelles.

En 1909 M. Sprague, de l'Herbier de Kew, a publié dans le Bulletin de cette institution une revision des espèces de la Section « Omphacarpus », dont il a défini les caractères : « Cymae paniculatae, cymulis involucratis. Ovarium 3-loculare rarius 2-loculare ; ovula 4 pro loculo rarius 2. Drupa pyriformis, 1-locularis, monosperma, mesocarpio fibroso ».

---

(1) A. Rutot, *Sur les antiquités découvertes dans la plaine maritime*. Dans Bull et Mém. de la Société d'Anthrop. de Brux. T. XXI, 1902-1903.

(2) Baron A. de Loë, *Découverte de Palafittes en Belgique*. Dans l'Anthropologie. Tome VI, année 1900.

(3) Baron Ch. Gillès de Pélichy, *Quelques mots sur le cimetière d'Emelghem*. Dans Compte rendu du Congrès archéol. tenu a Bruges en 1902.

(4) Baron A. de Loë, *Fouilles à La Panne*. Dans Bull. des Musées royaux. 6e année, 1906. P. 3.

Les panicules sont formées d'inflorescences partielles, dont les inférieures sont logées à l'aisselle de feuilles fort bien développées.

Dans sa revision M. Sprague n'a, malheureusement, pas passé en revue toutes les plantes signalées de divers côtés sous un des noms spécifiques relevés dans son travail; aussi devient-il bien difficile, vu les différences très considérables que l'on observe chez ces plantes dans les herbiers, de savoir avec précision quelles sont celles à considérer comme se rapportant aux types qu'il a définis, et celles qu'il faudra, sans le moindre doute, considérer comme variétés ou espèces nouvelles.

Ces déterminations sont d'autant plus difficiles que M. Sprague n'a pas publié la description de ses types.

Les espèces et variétés suivantes nouvelles, nous paraissent devoir être rangées dans le groupe *Omphacarpus :*

G. semlikiensis *De Wild.*
G. subargentea *De Wild.*
G. trinervia var. longifolia *De Wild.*

Quant aux *G. viridiflora* De Wild. et *G. rugosifolia* De Wild., ils appartiennent au groupe à fleurs en fascicules axillaires ou extra-axillaires, dont aucune revision n'a été tentée depuis l'étude monographique de Oliver pour la « *Flora of tropical Africa* », qui est naturellement devenue fort incomplète.

Une revision générale de ce genre est à faire; elle devrait naturellement être basée sur l'étude de matériaux authentiques, car dans tous les herbiers il existe, sous un même nom, des plantes différentes constituant non seulement des formes variées d'un même type spécifique, mais fréquemment des espèces dissemblables.

Nous donnerons ci-après la diagnose de ces 5 espèces et variétés nouvelles, réservant pour un fascicule ultérieur de nos « Plantae Bequaertianae » la description plus détaillée de ces plantes.

Grewia rugosifolia *De Wild.* nov. spec.

Frutex; ramis cylindricis, juvenilis sparse pilosis, demum plus minus glabris; foliis petiolatis, petiolo 7-10 mm. longo dense piloso, pilis stellatis; stipulis caducis, lanceolato-linearibus, usque 10 mm. longis et 1,5 mm. latis; lamina elliptica vel ovato-ellip-

tica, 8,5-13 cm. longa et 4-7,5 cm. lata, supra et infra stellato-pilosa, rugosa, basi rotundata vel subcordata, apice abrupte et acute acuminata, denticulata ; nervis basilaribus 5, nervis lateralibus 1 utrinque circ. 6, infra prominentibus ; inflorescentiis axillaribus paucifloris, solitaris vel geminatis, breviter pedunculatis, pedunculo stellato-piloso ; floribus 2-3, luteolis, pedicellatis, pedicello basi articulato, 8-15 mm. longo, stellato-piloso ; sepalis 5, lanceolatis, recurvatis, usque 20 mm. longis et 4 mm. latis, extus griseo-tomentosis, intus glabris, petalis ovatis 10-12 mm. longis, basi intus glandulosis, et 2,5 mm. circ. latis ; androgynophoro glabro circ. 1,5-2 mm., apice ciliato, ovario ovoideo dense velutino, stylo glabro.

Beni, 30 juillet 1914 (J. Bequaert, s. n.).

Obs. — Cette espèce se range dans le groupe du *G. guazumifolia* Juss. ; elle se rapproche du *G. viridiflora* De Wild., s'en différenciant par des caractères foliaires et floraux.

Grewia semlikiensis *De Wild.* nov. spec.

Frutex scandens ; ramis cylindricis, juvenilis breviter tomentosis, demum glabris ; foliis petiolatis, petiolo 4-12 mm. longo, griseo-tomentoso, stipulato, stipulis caducis, linearibus, 5-8 mm. longis, pilosis ; lamina papyracea, elliptica, inaequilateralia, 7-16 cm. longa et 3,5-8 cm. lata ; supra et infra sparse pilosa, basi cordata, apice subacute acuminata, margine integra vel obscurè denticulata, nervis basilaribus 3-5, nervis lateralibus utrinque circ. 5, versus marginem arcuatim anastomosantibus, inflorescentiis axillaribus et terminalibus, paniculatis, usque 10 cm. longis, ramis brunneo-tomentosis, bracteolatis, floribus fasciculatis, fasciculo 3-floro, involucratis, involucro 3-lobato, lobis 3-4-lobulatis, extus griseo-tomentosis ; floribus luteolis, pedicellatis, sepalis 5 lanceolato-obovatis, plus minus cucullatis, 4-5 mm. longis et 2 mm. latis, extus griseo-tomentosis ; petalis ovato-ellipticis circ. 1,5 mm. longis et 1 mm. latis, basi glandulosis ; androgynophoro glabro, circ. 1 mm. longo, apice ciliato ; ovario ovoideo, velutino.

Lesse, 9 mai 1914 (J. Bequaert, n° 4183. — Forêt vierge aux bords de la Semliki ; liane à fleurs jaune sale).

Obs. — Espèce du groupe du *G. barombiensis* K. Schum. et *G. Laurentii* De Wild. (Cf. Sprague in Kew Bull. 1909, p. 18), mais différant de ces types par ses stipules entières, ce qui le rapproche du *G. calymmatosepala* K. Schum. de l'Usambara.

Grewia subargentea *De Wild.* nov. spec.

Frutex scandens vel arbor, ramis cylindricis, juvenilis breviter et appresse brunneo-pilosis, demum plus minus glabris ; foliis petiolatis, petiolo 5-10 mm. longo sparse piloso ; stipulis caducis, laciniatis, vulgo bifidis, 3-5 mm. longis, lamina subcoriacea, elliptica vel obovato-elliptica, 4-17 cm. longa et 2-6 cm. lata, basi rotundata, apice plus minus longe subacuto-acuminata, margine integra vel obscure denticulata, nervis basilaribus 3, nervis lateralibus I utrinque 4-5, versus marginem arcuatium anastomosantibus ; inflorescentiis axillaribus et terminalibus, paniculatis, usque 20 cm. longis, ramis brunneo-tomentosis, bracteolatis ; floribus fasciculatis, involucratis, fasciculo vulgo 3-floro, involucro 3-lobo, lobis circ. 4 mm. longis, 3-lobulatis, extus brunneis ; floribus breviter pedicellatis, sepalis 5, ovato-lanceolatis vel oblanceolatis, circ. 4 mm. lòngis et 1 mm. latis, extus griseo-tomentosis ; petalis ovatis basi glandulosis, circ. 1,5 mm. longis ; androgynophoro breviter velutino circ. 1 mm. longo ; ovario ovoideo, stylo glabro ; fructibus obpyriformibus usque 7 cm. longis et 1 cm. latis (maturis ?) uniseminatis, mesocarpio fibroso.

Avakubi, 12 janvier 1914 (J. Bequaert, n° 1890. — Forêt aux bords de l'Ituri. — Liane à fleurs jaune-brunâtre) ; Beni, 28 juillet 1914 (J. Bequaert, n° 5105. — Galerie forestière dans la savane ; liane à fleurs jaune-sale) ; Entre Wasisi et Walikale, 4 janv. 1915 (J. Bequaert, n° 6485. — Forêt vierge ; arbuste) ; Environs de Nala, juillet 1911 (Boone, n° 22. — Arbre de très grandes dimensions ; essence de forêt à bois blanc, très dur, sans usage pour les indigènes. — Noms vern. : Balawa (Azande), Bakba (Mayogo)).

Obs. — Cette espèce se range dans le groupe du *G. barombiensis* K. Schum. et *G. africana* Mast., s'en différenciant, entre autres, par la couleur argentée du limbe à la face inférieure des feuilles.

Grewia trinervia var. **longifolia** *De Wild.* nov. var.

Arbor ; ramis cylindricis, juvenilis breviter velutinis, demum glabris ; foliis petiolatis, petiolo 6-14 cm. longo, sparse piloso, stipulis caducis ; lamina elliptico-lanceolata, 25-32 cm. longa et 3-7,5 cm. lata, supra et infra glabra, basi cuneata vel rotundata, apice longe acuminata, margine integra vel obscure denticulata, nervis basilaribus 3, nervis lateralibus I utrinque 5-6 ; inflorescentiis axillaribus et terminalibus, paniculatis, bracteolatis, floribus fasciculatis, fasciculo pedunculato, 3-floro, apice involucrato, involucro 3-lobo, lobis 3-lobulatis, extus velutinis, 5-6 mm. longis, floribus roseolis, pedicellatis, sepalis 5, lanceolatis circ. 7 mm. longis et 2 mm. latis ; petalis ovato-acutis intus basi glandulosis, androgynophoro glabro, apice ciliato, ovario glabro vel apice sparse piloso.

Walikale, 6 janvier 1915 (J. Bequaert, n° 6515. — Forêt vierge).

Obs. — Nous rapportons cette plante au type que nous avons décrit antérieurement d'après des récoltes faites à Djombo ; nous en formons une variété basée sur les dimensions des feuilles.

Grewia viridiflora *De Wild.* nov. spec.

Frutex scandens, ramis cylindricis, juvenilis breviter brunneo-tomentosis, demum glabris et albido-lenticellatis ; foliis petiolatis, petiolo 5-6 mm. longo, piloso ; stipulis caducis, linearibus ; lamina papyraceo-coriacea, elliptica vel obovato-elliptica, 4-9 cm. longa et 18-30 mm. lata, supra glabra, infra sparse pilosa, basi abrupte acuminata, margine denticulata, nervis basilaribus 3, nervis lateralibus utrinque circ. 6 ; inflorescentiis vulgo extra-axillaribus raro terminalibus, floribus fasciculatis, fasciculis 3-floris ; pedunculo 4-7 mm. longo, pedicellis 10-12 mm. longis ; sepalis lanceolatis 20-25 mm. longis et 4-6 mm. latis, petalis ovatis circ. 10 mm. longis, 3 mm. latis, intus glandulosis ; androgynophoro glabro circ. 2 mm. longo, apice ciliato, ovario velutino, stylo glabro apice inflato obconico.

Irumu, 6 mars 1914 (J. Bequaert, n° 2789. — Galerie forestière dans la savane).

Obs. — Espèce voisine du *G. rugosifolia* ; la différenciation de ces deux espèces est basée sur des caractères floraux et foliaires.

Nouveaux représentants du genre Polypedilum (Chironomides), par J. J. Kieffer (Bitche).

1. *Polypedilum (Pentapelma) puripenne* n. sp. ♀. Brun noir, mat ; mesonotum grisâtre, trois bandes confluentes et scutellum bruns, balanciers blanchâtres, pattes blanchâtres, hanches brunes, fémur antérieur brunâtre, sauf l'extrémité, tarses brisés ; antennes blanchâtres, 6^e article brun, deux fois aussi long que le 5^e, avec un ou deux longs poils distaux, col du 2^e article guère plus long que gros, celui des trois suivants de moitié plus long que gros, verticilles à 5 poils très longs. Tibia antérieur à écaille allongée et obtuse, les quatre postérieurs à éperon unique, long et incurvé au bout. Aile hyaline, sans tache, nervures jaunes, bifurcation à peine distale. L. 3,5 mm. — Transvaal ; Kaapmuiden (Péringuey).

2. *P. caffrarium* n. sp. ♂♀. Brun noir, thorax d'un brun moins sombre. Antennes du ♂ brunâtres, panache jaune grisâtre, 14^e article au moins deux fois aussi long que 2-13 réunis, 3-13 un peu transversaux, puis aussi longs que gros, 2^e plus de deux fois le 3^e ; antennes de la ♀ blanchâtres, 6^e article brun noir, à deux longs poils distaux, 2-5 comme chez l'espèce précédente. Mesonotum grisâtre, trois bandes confluentes et scutellum bruns, balanciers blanchâtres. Aile tachetée de brun, quatre taches un peu allongées, alignées dans la cellule cubitale ; trois dans la cellule discoïdale, dont une sous la 1^e de la cellule cubitale, deux sous les deux distales de cette cellule ; deux dans la cellule posticale, dont une à la base, l'autre au milieu ; une vers le milieu de la cellule anale. Pattes blanchâtres, hanches brunes, tarses brisés, tibia antérieur à écaille allongée, obtuse et inerme ; les quatre autres à un long éperon. Pince brun noir, extrémité des articles terminaux plus claire, ceux-ci presque droits, larges jusqu'à leur extrémité qui est arrondie ; appendices supérieurs filiformes, courbés en faucille, leur base un peu élargie et portant une grosse soie ; appendices inférieurs linéaires, dépassant peu les articles basaux, ayant, outre les longs poils dorsaux arqués comme d'ordinaire, un poil distal plus long et droit. L. ♂ 4 mm., ♀ 3,5 mm. — Avec le précédent.

Ces deux insectes trouveront place, parmi les espèces africaines, dans le tableau suivant :

1. Yeux rapprochés au vertex — 2
— Yeux séparés de leur longueur ou presque de leur longueur ; tibia antérieur avec éperon (sous-genre *Kribiophilus* K.) — 27
2. Aile sans tache (sous-genre *Pentapelma* K., type : **integrum** K.) — 3
— Aile tachetée — 12
3. Aile brun noir, antenne de la ♀ de 5 articles, 5ᵉ article grossi à la base et avec un verticille de longs poils, écaille du tibia antérieur graduellement en pointe ; abdomen 2 1/2 fois aussi long que le reste du corps. . . . . *fuscipenne* K.
— Aile hyaline ou à peu près, antenne de la ♀ de 6 articles, le 6ᵉ parfois peu séparé — 4
4. Pince très longue, avec trois appendices à chaque article basal ; écaille du tibia antérieur avec un éperon aussi long qu'elle ; 14ᵉ article antennaire presque trois fois aussi long que 2-13 . . . . *longiforceps* K.
— Pince avec deux appendices à chaque article basal ; écaille du tibia antérieur sans éperon — 5
5. Ecaille du tibia antérieur graduellement en pointe — 6
— Ecaille du tibia antérieur arrondie au bout — 10
6. Articles terminaux de la pince ayant au bord médial trois longs poils brièvement rameux ; appendices inférieurs bilobés ; 14ᵉ article antennaire plus court que 2-13 réunis ; pattes brunes, tachetées de blanc . . . . *ramiferum* K.
— Articles terminaux de la pince sans poils rameux — 7
7. Appendices inférieurs de la pince bilobés, les supérieurs courbés en faucille, articles terminaux plus courts que les basaux, en ellipse allongée, pince blanche ; 14ᵉ article antennaire un peu plus long que 2-13 réunis ; pattes jaune clair . . . . *leucolabis* K.
— Appendices inférieurs de la pince non lobés — 8
8. Entièrement blanchâtre, sans tache ; ♀ . . *nymphella* K.
— Corps autrement coloré ; ♂ — 9
9. Appendices supérieurs de la pince en faucille, articles terminaux sans soies rigides au bord médial ; pattes jaune bru-

nâtre, sans tache ; 14ᵉ article antennaire deux fois aussi long que 2-13 réunis . . . . *bifalcatum* K.

— Pince blanche, à appendices supérieurs larges proximalement, très minces quant au reste, articles terminaux avec cinq soies rigides et longues, alignées le long de l'extrémité du bord médial ; pattes brun noir, tachetées de blanc . . . . *brevipecten* K.

10. Corps brun noir ; 5ᵉ article antennaire avec un col allongé . . . . *puripenne* n. sp.

— Corps blanchâtre ou jaune — 11

11. Bouche aussi longue que la hauteur de la tête ; articles antennaires 3 et 4 de la ♀ à long col, 5ᵉ en ellipse, sans col, 6ᵉ à trois longs poils distaux . . . . *distans* K.

— Bouche n'ayant en longueur que la demi-hauteur de la tête ; appendices supérieurs de la pince en faucille . *pumilio* K.

12. Aile brun noir, avec onze petites taches blanches ; pattes brun noir, tachetées de blanc, écaille du tibia antérieur pointue, articles antennaires 3 et 4 de la ♀ à col court, 5ᵉ en ellipse, 6ᵉ à deux longs poils distaux. *alboguttatum* K.

— Aile hyaline, à lignes longitudinales grises, nervures bordées de gris, pattes jaunes, écaille du tibia antérieur arrondie, articles antennaires 3-5 de la ♀ fusiformes, à long col, 6ᵉ à deux longs poils distaux . . . . . . *fusiforme* K.

— Aile blanche ou hyaline à taches grises, rousses ou noires — 13

13. Tibia antérieur à écaille arrondie au bout — 14

— Tibia antérieur à écaille pointue ou avec éperon — 20

14. Aile avec une bande transversale et trois taches d'un roux brun ; pattes brunes, fémurs à anneau distal blanc, tibia antérieur brun noir, à base blanche, tibia postérieur et tiers basal de l'intermédiaire blancs . . . . . *annulatipes* K.

— Aile à taches grises ou brunes — 15

15. Aile hyaline, à 10 taches brunes . . . *caffrarium* n. sp.

— Aile blanche, à 5-10 taches grises — 16

16. Aile avec 5 taches grises — 17

— Aile avec 7-10 taches grises — 18

17. Ecaille du tibia antérieur transversale, fémurs jaunes, avec

deux anneaux bruns, tibias noirs, 14^e^ article antennaire de moitié plus long que 2-13 réunis . . . . . *annulaticrus* K.

— Ecaille du tibia antérieur allongée, fémurs bruns, leur extrémité et les tibias blancs, tarses postérieurs bruns, 5^e^ article et base de 1-3 blanchâtres . . . . . *quinqueguttatum* K.

à 7 taches grises ; pattes brunes, extrémité des fémurs et base des tibias blanches, tarses brisés. *septemguttatum* K.

— Aile à 9 ou 10 taches grises ; pattes autrement colorées — 19

19. Blanchâtre ; trois bandes du mesonotum, metanotum et mesosternum fauves ; hanches noirâtres, deux tiers basaux des fémurs bruns, tarses brisés ; articles antennaires 3-5 de la ♀ à long col, aile à 10 taches . . . . . *nilophilus* K.

— Brun, balanciers, antennes et tibias blancs, articles antennaires 3-5 fusiformes, à col médiocre, aile à 9 taches . . . . *pluriguttatum* K.

20. Lamelle de la pince trilobée ; aile à 4 taches grises (♂) ou noires (♀) ; pattes brunâtres, fémurs à anneau distal jaune ; 14^e^ article antennaire à peine aussi long que 2-13 réunis . . . . *trilobatum* K.

— Lamelle non lobée, aile à 6-13 taches — 21

21. Aile à taches grises ; pattes brunes, tachetées de blanc ; article 5^e^ des antennes ♀ sans col — 22.

— Aile à taches noires — 23

22. Ecaille du tibia antérieur triangulaire, balanciers blancs, aile à 6 taches, articles antennaires 3 et 4 de la ♀ à long col . . . . *sexguttatum* K.

— Ecaille subitement amincie en éperon dans sa moitié distale, balanciers brun noir, aile à 11 taches, articles antennaires 3 et 4 à long col, 14^e^ du ♂ deux fois 2-13 réunis . . . . *griseoguttatum* K.

23. Tibia antérieur avec éperon, pattes brun noir, tachetées de jaune, aile à 11 taches, article 5^e^ des antennes de la ♀ en ellipse, 3 et 4 à long col . . . . *fuscoguttatum* K.

— Tibia antérieur à écaille pointue, aile avec moins ou plus de 11 taches — 24

24. Aile à 8 taches, 5^e^ article antennaire ♀ fusiforme et à long col, comme 3 et 4 — 25

— Aile à 9 taches, 5^e^ article antennaire ♀ en ellipse, sans col, 3^e^ et 4^e^ à col court — 26

— Aile à 13 taches ; pattes blanchâtres, tachetées de brun, articles antennaires ♀ 3 et 4 à long col, 5^e^ en ellipse, 14^e^ du ♂ de moitié plus long que 2-13 réunis . *hieroglyphicum* K.

25. Pattes blanches, anneau au fémur antérieur, deux aux quatre autres, tibia antérieur sauf la base et tarse antérieur bruns . . . . *octostictum* K.

— Pattes jaune brunâtre, tarses brisés ; 14^e^ article antennaire à peine plus long que 2-13 réunis . . . . . *longicrus* K.

26. Taches alaires à reflet roux ; pattes jaunes, col des articles antennaires 3 et 4 de la ♀ allongé, 14^e^ article du ♂ de moitié plus long que 2-13 réunis . . . . *niveiforceps* K.

— Taches alaires sans reflet roux ; pattes jaune blanchâtre, hanches et fémurs sauf leur extrémité bruns, col des articles 3 et 4 pas plus long que gros . . . . *novemguttatum* K.

27. Aile avec 7 taches grises ; appendices supérieurs de la pince presque droits, très minces, un peu plus larges distalement . . . . *pictipennis* K.

— Aile sans tache ; appendices supérieurs de la pince bilobés . . . . *calcaratus* K.

Observations sur les insectes fossiles du houiller belge : Mégasécoptères, par Pierre Pruvost.

En 1904, M. A. Handlirsch a décrit (¹) sous les noms de *Palaeopalara gracilis* et de *Anthracopalara falcipennis*, deux empreintes du terrain houiller de la Belgique, provenant du puits n° 19 du Charbonnage du Levant du Flénu, recueillies par Persenaire et conservées au Musée Royal d'Histoire Naturelle. Il a classé ces empreintes dans l'ordre des Mégasécoptères et en a

---

(¹) A. Handlirsch, *Les Insectes houillers de la Belgique*. Mém. Mus. Roy. H. N., t. III (1904), p. 10, pl. II, fig. 12 et 13 (*Palaeop. gracilis*) et p. 11, pl. IV, fig. 14-16 (*Anthr. falcipennis*).

Cf. aussi : A. Handlirsch, *Die foss. Insekten* (1906), p. 320, pl. 33, fig. 11 à 13 et Revis. der palaeoz. Insekten, Denk. d. Akad. der Wissensch. Wien, 96. Bd. (1919), p. 76.

fait les types de deux espèces nouvelles, appartenant à deux genres nouveaux.

Au cours d'une révision des riches matériaux de la faune houillère conservés au Musée Royal de Bruxelles, j'ai constaté que ces deux empreintes, qui portaient des noms génériques distincts, étaient les débris du même individu et que le type de *Palaeopalara gracilis* Handl. n'était que l'empreinte négative de l'échantillon type de *Anthracopalara falcipennis* Handl.

Il convient donc de rayer l'un des noms de la nomenclature et, d'après les règles de priorité, la désignation du fossile décrit en premier lieu dans le mémoire de M. Handlirsch : *Palaeopalara gracilis*, doit être seule conservée.

Je dois ajouter que des circonstances spéciales expliquent comment l'identité des deux échantillons a pu échapper à l'entomologiste viennois : les deux empreintes, toutes deux fragmentaires, ne sont pas entièrement superposables, parce que l'une, la négative *(P. gracilis)*, représente une région de l'aile proche de la base, tandis que sur l'autre, la positive *(A falcipennis)*, cette région a été enlevée par un éclat de la pierre et une partie plus voisine du sommet est par contre conservée : elles offrent ainsi dans leurs contours, un aspect très différent. Seul un examen minutieux permet de constater que les deux empreintes se superposent exactement dans une région correspondant à la partie médiane de l'aile (et qui se trouve comprise dans le dessin ci-joint entre les points *a*, *b*, *c*, *d*).

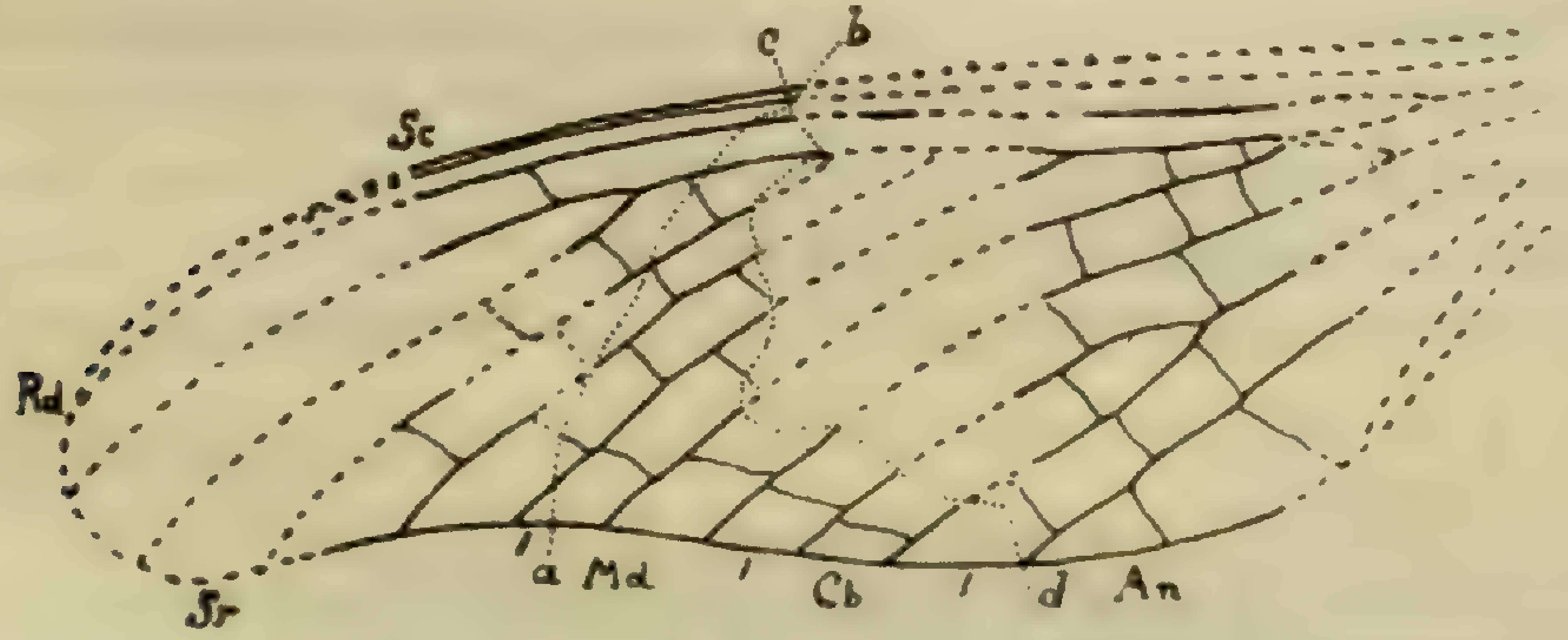


Fig. 1.
Palaeopalara gracilis. Handl. Aile gauche grossie 2 fois.

En superposant les calques de photographies des deux empreintes, j'ai fait une reconstitution de l'aile (fig. 1), où seuls sont marqués en traits pleins les nervures et les contours observés ; on voit que l'extrême base et l'extrême sommet font encore défaut.

Le dessin de cette aile ainsi obtenu en utilisant les deux empreintes diffère assez notablement des deux figures données par M. Handlirsch, qui sont d'ailleurs elles-mêmes d'allure si dissemblable l'une de l'autre. J'ai supprimé quelques nervures indiquées par M. Handlirsch et qui sont manifestement des accidents de fossilisation.

Il convient de modifier de la façon suivante la diagnose de *Palaeopalara gracilis :*

Aile de forme élancée, falciforme, longue de 42 millimètres. Les trois nervures : costale, sous-costale (*Sc*) et radius (*Rd*) sont parallèles et très rapprochées, longeant le bord antérieur et comme lui recourbées vers l'arrière en approchant du sommet. Le secteur (*Rs*) se sépare du radius près de la base et émet au moins 4 branches simples recourbées en arrière. La médiane (*Md*) serait représentée par une branche fourchue dont le rameau antérieur se fusionnerait un instant avec le secteur du radius. Mais peut-être ce rameau appartient-il même à ce secteur et dans ce cas la médiane serait réduite à une branche simple. Le cubitus (*Cb*) est une nervure fourchue et l'on voit une seule nervure anale (*An*). Il y a place à peine pour une seconde anale très courte. Les nervules transverses sont droites, très rares, découpant l'aile en larges cellules rectangulaires.

Ainsi reconstituée, cette aile est remarquable par sa ressemblance avec celles des *Brodia* Scudder, du terrain westphalien d'Angleterre. *Palaeopalara* ne diffère des *Brodia* que par la forme générale et par quelques détails de nervation et il est clair que l'on doit grouper ces deux genres dans la même famille des *Brodiidae* Handl.

Cette famille a été placée par M. Handlirsch d'abord dans l'ordre des Paléodictyoptères (1906), puis dans celui des Mégasécoptères (1919). Les *Brodia* ont les traits fondamentaux de ces curieux insectes qui sont considérés comme les prédécesseurs paléozoïques des Lépidoptères et des Diptères, et c'est bien au second parti adopté par M. Handlirsch que je crois logique de s'arrêter.

En tous cas l'hésitation de M. Handlirsch souligne suffisamment les caractères intermédiaires qu'offrent les *Brodia* entre les Paléodictyoptères et les Mégasécoptères.

Les *Palaeopalara* possèdent aussi ces traits intermédiaires au même titre que les *Brodia*. (1)

Ainsi les quelques Mégasécoptères du Westphalien sont demeurés à un degré de différenciation moins avancé que leurs descendants si nombreux et si typiques (comme les *Corydaloides* Brongn.) du Stéphanien. Ils ont gardé quelques traits de ressemblance avec les *Paléodictyoptères*.

Et si l'on rapproche ceci du fait que j'ai signalé en 1919 (2), sous le nom de *Synaptoneura Champyi*, un insecte paléodictyoptère, provenant du Westphalien moyen d'Anzin, et offrant dans l'aile certains traits de nervation particuliers aux Mégasécoptères, on voit qu'il existe maintenant tout un faisceau d'observations, appuyant les vues que j'ai émises (3) au sujet des processus de l'apparition des Mégasécoptères : c'est vers le milieu de l'époque westphalienne que ce phylum s'est individualisé et selon toute vraisemblance à partir des Paléodictyoptères, comme le pense M. A. Handlirsch, voire même parmi ceux-ci, à partir des Spilaptérides, comme l'a supposé M. A. Lameere.

Sur une empreinte de patte d'Arthropleura trouvée au Charbonnage de Courcelles-Nord, par Pierre Pruvost.

L'échantillon, dont il s'agit, a été recueilli (empreinte et contre-empreinte), par M. l'Ingénieur J. Dubois, dans le schiste à végétaux qui forme le toit de « Veine de 0 m. 60 », au charbonnage de Courcelles-Nord. M. J. Dubois a bien voulu m'en confier l'étude.

Sa découverte offre un grand intérêt paléontologique.

---

(1) Les *Prochoroptera* Handl. du Westphalien du Mazon Creek (Illinois) sont, par contre, des Mégasécoptères plus caractérisés.

(2) P. Pruvost, *La faune continent. du t. houiller du N. de la France*. MÉM. CARTE GÉOL. FRANCE, p. 103, pl. III, fig. 1-3.

(3) *Ibid.*, p. 308.

L'empreinte est celle d'une patte d'arthropode (fig. 1) longue de 4 cm., courbée en arc de cercle, composée de dix articles très courts. Chacun d'entre eux, plus large que long, porte, à son extrémité distale et vers l'intérieur de la courbe, une forte épine, le 10ᵉ et dernier article étant réduit à une griffe analogue. Le 8ᵉ article paraît être un peu plus long que les autres.

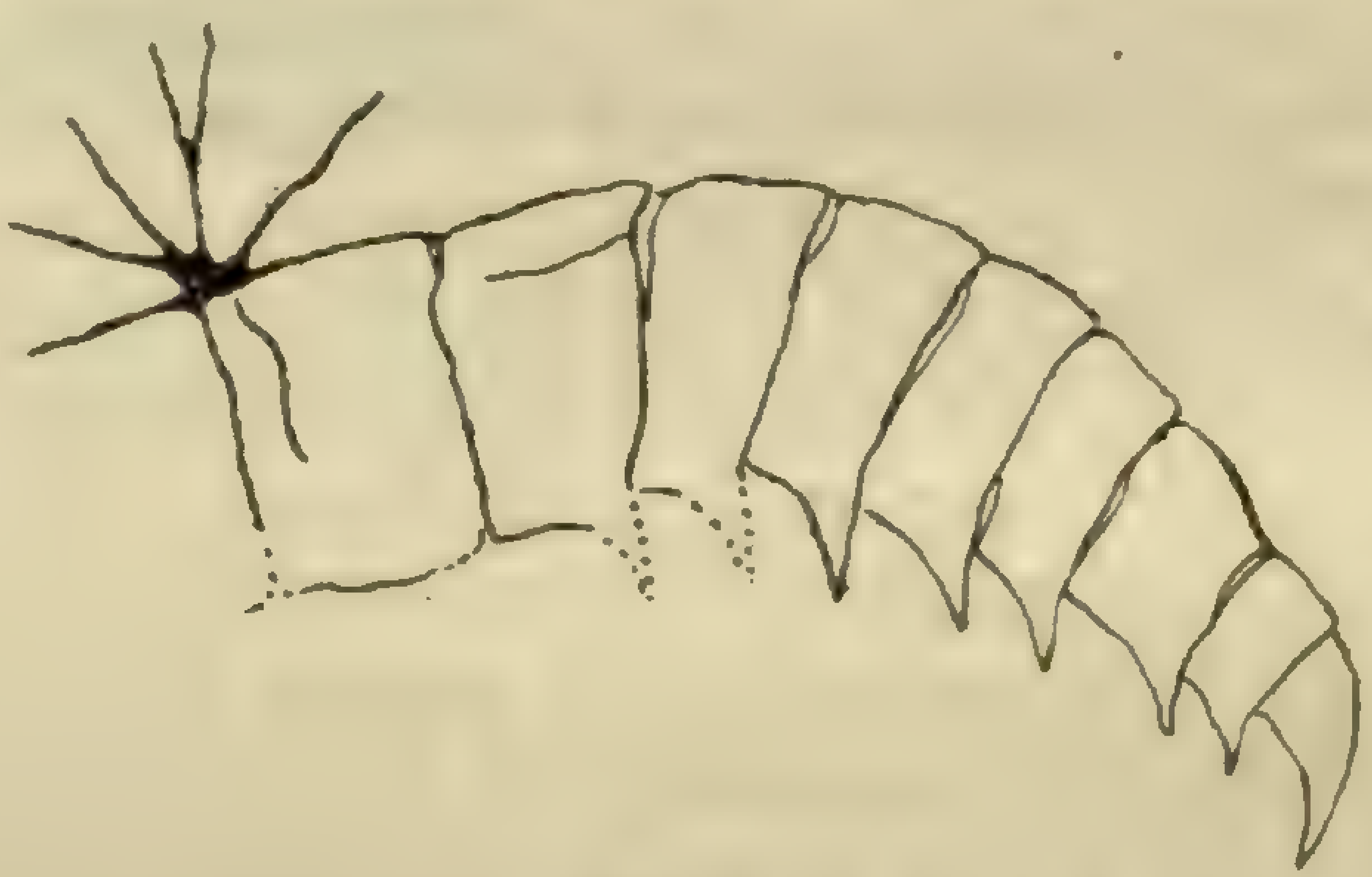


Fig. 1.
Arthropleura sp. Patte en connexion avec l'organe en rosette (gr. = 1.5).
Charbonnage de Courcelles-Nord, toit de veine de 0 m. 60.

Deux empreintes de membres tout à fait semblables ont déjà été signalées par moi dans le terrain houiller du Nord de la France, l'une trouvée à Lens, l'autre à Anzin, et je les ai attribuées aux *Arthropleura* (¹).

On sait que les *Arthropleura* sont d'énormes crustacés de l'époque houillère, voisins des Isopodes et des Amphipodes, dont on n'a jamais trouvé que des fragments.

On ignore ainsi la structure de leurs extrémités céphalique et caudale, et celle de leurs appendices (²).

Les raisons sur lesquelles je m'appuyais pour attribuer ces griffes aux *Arthropleura* étaient les suivantes :

1°) La patte découverte à Anzin se trouvait sur une plaque de

---

(¹) P. Pruvost, Ann. Soc. Géol. du Nord, t. 41 (1912), pp. 59-62, pl. II, fig. 1-5, et Mém. Carte Géol. France *(La faune continentale du t. h. du Nord)*, (1919) pp. 76 et 80, fig. 19.

(²) M. K Andrée a résumé dans un important mémoire, paru dans Palaeontographica LVII Bd. (1910), p. 67, et LX (1913), p. 299. tout ce que l'on connaît actuellement de ces curieux animaux.

schiste dans le voisinage immédiat d'un fragment d'anneau dorsal d'*Arthropleura*, avec son ornementation épineuse caractéristique.

2°) Si l'on examine la remarquable empreinte d'un fragment de face ventrale d'*Arthropleura* trouvée à St-Etienne et décrite par M. Boule (1), on observe à chaque segment une pièce saillante triangulaire, qui sur l'empreinte se termine brusquement par une cassure ; je considérais cette pièce comme l'article basilaire d'un membre qui aurait été détruit sur le fossile, mais aurait laissé en impression négative la trace de ses anneaux trapus, visible sur l'échantillon, et rappelant la forme des pattes de Lens et d'Anzin.

Ces membres sur l'*Arthropleura* de St-Etienne seraient insérés sur la face ventrale juste au-dessous d'une curieuse structure, formée de sillons rayonnants, circonscrivant dans la chitine comme les pétales d'une fleur, et que l'on a appelée l'*organe en rosette*. On le considère parfois comme le point d'insertion des branchies.

Ce qui fait le très grand intérêt de l'empreinte découverte par M. J. Dubois, c'est que la patte, tout à fait semblable à celles que j'ai déjà décrites, se trouve, sur la plaque de schiste, insérée immédiatement à la base d'un organe en rosette (fig. 1). Nous observons donc sur ce fossile pour la première fois la *connexion* indiscutable entre une extrémité du type que j'ai fait connaître et un fragment incontestable d'*Arthropleura*, dans une situation qui confirme mes suppositions antérieures.

Ainsi il est maintenant bien établi que les *Arthropleura* portaient à la face ventrale, immédiatement sous l'organe en rosette, une paire de pattes par segment, pattes courtes, recourbées en arrière, formées d'un petit nombre d'articles trapus (10 si l'on compte l'article basilaire et la griffe terminale), chacun muni d'une épine dirigée vers l'arrière.

En l'absence de fragment de la face dorsale dont l'ornementation sert à distinguer les espèces d'*Arthropleura*, il m'est impossible de dire à quelle espèce a appartenu l'intéressant débris de Courcelles-Nord.

---

(1) M. Boule, BULL. INDUSTRIE MINÉRALE 1890. Atlas, pl. LV.

VI. Des notes sur le *Famennien du bord Nord du bassin de Namur*, présentées par M. X. Stainier, sont publiées aux ANNALES sur rapport de M. le Lieutenant-Général baron Greindl.

Le bord Nord du bassin de Namur est remarquable par les exemples de transgression et de lacunes de sédimentation qu'il nous offre durant toute la période qui s'étend du Devonien moyen au sommet du Carbonifère. C'est durant le Famennien surtout que ces phénomènes abondent et depuis longtemps on sait que cet étage, tantôt fait complètement défaut, tantôt présente de rapides variations de facies et de puissance. Pour faire l'étude précise des transgressions de cette période, il importe d'être d'abord bien renseigné sur l'extension géographique et la composition de cet étage. Or, dans la région qui nous occupe l'observation est loin d'être toujours facile. On se trouve là à la limite de la haute et de la basse Belgique, dont les massifs tertiaires débordent largement sur la première. Aussi ce n'est guère que dans le fond des vallées que les affleurements sont bien visibles. Nous croyons donc chose utile de publier les renseignements inédits que nous possédons sur la région et nous nous bornerons à parler de la partie du bord Nord du bassin de Namur qui est comprise entre la bifurcation des deux chaussées allant des Quatre-Bras vers Namur et vers Charleroi.

La vallée de l'Orneau donne une bonne coupe de l'étage. Nous l'avons décrite jadis (ANN. SOC. GÉOL. DE BELG., t. XIX, MÉM. p. 298). La puissance de l'étage est réduite à 22 m. dont plus de la moitié appartenant au Famennien inférieur ; le reste, par suite de l'absence de fossiles et l'abondance de l'élément calcaire, pourrait tout aussi bien être rapporté au Carbonifère. A moins d'une lieue à l'Est, aux Isnes, la puissance du Famennien est d'au moins 45 m., au puits de la minière Cockerill et Ougrée situé entre les deux Isnes. Sur cette épaisseur le Famennien à facies typique des Psammites du Condroz, inconnu dans la vallée de l'Orneau, en a 30 mètres. On voit donc le rapide développement local de ce facies. Le développement de la partie inférieure schisteuse du Famennien, sur le même intervalle, a été moins rapide, passant de 12 m. à 15 m. environ.

L'oligiste olithique du Famennien inférieur, inconnue dans la vallée de l'Orneau, apparaît immédiatement à l'Est, car une galerie de chassage de 150 m. de longueur a jadis été ouverte sur la rive gauche de l'Orneau par la Société Demerbe et C^{ie}. On en voit encore l'ouverture aujourd'hui. Elle a suivi l'oligiste tout le temps, mais est trop mince et trop impure pour être exploitée. Nous avons revu la couche 2 kil. à l'Est de l'Orneau dans la tranchée ouverte le long de la chaussée de Namur, pour la conduite des Eaux du Bocq, à mi-chemin entre les bornes 13 et 14. Elle y était encore inexploitable. Mais trois kil. plus loin, aux Isnes elle a été largement travaillée à la minière Cockerill et Ougrée.

A l'Ouest de la vallée de l'Orneau le Famennien inférieur semble disparaître, car il n'a jamais été signalé de façon formelle plus à l'Ouest. Par contre, comme nous allons le montrer, le Famennien supérieur du type des Psammites des Isnes se développe largement.

A St-Martin, le long de la route vers Villeret par la rive droite de la Ligne, on voit le Tournaisien tellement près du Frasnien que le Famennien doit être complètement disparu ou réduit à presque rien. Le contact entre les deux étages susdits étant séparé par la largeur de la route, on ne peut voir s'il se fait par faille ou par transgression.

Dans toute la région au Sud de Sombreffe et de Tongrinne, la largeur de la bande dinantienne s'accroît fortement, la limite débordant vers le Nord, au détriment du Famennien et surtout du Frasnien.

Dans mes tracés de la carte géologique (Feuille Fleurus-Spy), j'ai considéré cette réduction de près des deux-tiers de l'affleurement de la bande frasnienne comme due à une faille normale inclinée au Sud. Mais je n'ai vu nulle part la faille et l'on pourrait expliquer cette réduction par une forte trangression du Carbonifère vers le Nord. Ce qui m'a fait pencher pour l'hypothèse d'une faille, c'est que cette transgression serait très locale, ne s'étendant pas même sur 5 kil., car à l'Ouest, toutes les assises reprennent leur largeur normale. De plus, aux endroits où cette transgression ferait sentir ses effets, on voit l'inclinaison du Carbonifère diminuer fortement et s'étaler vers le Nord, ce qui se produirait dans le cas d'une faille normale.

En faveur de l'hypothèse d'une transgression, on pourrait dire que celle-ci affecte en réalité une région plus étendue que celle que je viens d'indiquer et qu'elle s'étend en fait des Isnes jusque Ligny, soit sur 13 kil. Faible d'abord aux deux extrémités de cette distance, elle se serait fortement et rapidement accentuée au Sud de Tongrinne et de Sombreffe.

Dans ce cas en allant des Isnes vers Tongrinne, le débordement, qui aurait commencé au début du Carbonifère, aurait masqué successivement, le Famennien supérieur, puis l'inférieur, puis le sommet du Frasnien.

La découverte d'une bonne coupe de contact suffirait pour trancher la question de savoir laquelle des deux hypothèses est la bonne.

Le premier point où j'ai revu du Famennien, vers l'Ouest, est sur la route de Tongrenelle à Boignée par la rive droite de la Ligne. Il n'a pas plus de trois mètres d'épaisseur et appartient à ce facies calcareux du Famennien supérieur qui domine aux environs immédiats de l'Orneau.

Plus loin les plans de la mine de plomb de Ligny indiquent que le filon compris dans le Dinantien est venu buter, au Nord, contre du schiste famennien sur lequel il s'est épanché. Le puits creusé pour obtenir l'eau nécessaire à la construction de la nouvelle église de Ligny a traversé des psammites schisteux famenniens. Ceux-ci affleurent dans le talus du chemin pavé conduisant de Ligny à Brye, presque en face de la ferme Thalie.

Un puits creusé dans la prairie au N. et contre la ferme Thalie a percé :

Psammite jaune très micacé Schiste gris verdâtre micacé » psammitique verdâtre	6,50 m. Incl. Sud faible.

Coordonnées du puits par rapport à l'église de Ligny : Long. O = 460 m. Lat. N. = 120 m.

Un puits domestique situé tout près du chemin de fer à 400 m. à l'O. et à 80 m. au N. du précédent a aussi traversé des psammites schistoïdes. La position de ces divers points indique un rapide élargissement de la bande famennienne vers l'O. Ajoutons que, coïncidence qui n'est peut-être que fortuite, c'est au même point que de façon très rapide on voit le passage latéral du facies dolomie au facies petit granit du Tournaisien.

La carte géologique de Gouy-le-Piéton-Gosselies par A. Briart renseigne l'existence du Famennien plus à l'Ouest à Wagnelée, mais il n'y renseigne aucun affleurement quoique je lui eusse signalé les observations suivantes.

Dans la prairie de la ferme démolie de Ladsous il existe un étang-abreuvoir. Celui-ci ayant été mis à sec pour nettoyage, j'ai constaté qu'il était creusé, sous une faible couche végétale, entièrement dans des psammites brunâtres en petits bancs très durs faiblement inclinés au Sud.

En face de l'entrée de cette prairie et de l'autre côté du chemin, lorsque l'on a voulu creuser la cave du cabaret dit Paul du champêtre, on a rencontré à fleur de terre du psammite bleuâtre à croûte jaunâtre tellement dur qu'il a fallu utiliser la poudre pour achever la fouille.

Certains bancs tendres contenaient en abondance des spécimens bivalves de la Cucullea Hardingi si fréquente aux carrières des Isnes. Les roches avaient d'ailleurs absolument l'aspect de celles que l'on exploite aux Isnes. Au bord Sud de la route empierrée de Wagnelée au Longpré (St-Amand) à 120 m. au N.-E. de l'église de Wagnelée et en face de l'entrée de l'ancien cimetière, l'eau dans un puits est à fleur de terre. D'après le propriétaire, ce puits est creusé dans du grès schisteux.

A l'Ouest de Wagnelée se développe le grand plateau tertiaire de la crête de partage du bassin de la Meuse d'avec celui de l'Escaut. Aucun affleurement primaire n'est plus visible et il faut aller jusqu'à la vallée de la Sennette, à Feluy, pour retrouver le Famennien bien développé et bien connu de cette localité.

Sur sa carte, Briart représente le Tournaisien inférieur comme s'élargissant fortement à l'Ouest de Wagnelée et la limite entre le Carbonifère et le Devonien prend par conséquent une direction nettement au N.-O.

Continuée dans cette direction elle passerait bien au N. des affleurements de Feluy. S'il n'y a pas à l'O. de Wagnelée de transgression famennienne inconnue, rien ne justifie cette déviation de la limite. M. Briart s'est probablement basé sur le fait suivant pour adopter cette allure.

A un kil. au N.-O de Wagnelée s'étend l'agglomération des établissements industriels de Chassart. Je dois à l'obligeance de feu M. Léopold Dumont, co-propriétaire de ces établissements, la coupe de quatre puits artésiens qui de 1858 à 1887 furent successivement creusés dans ces établissements.

M. Briart a rapporté au Tournaisien la roche rencontrée dans le fond des quatre sondages. De là son tracé. Mais la chose n'est rien moins que certaine.

Pour permettre d'en juger, nous donnons la coupe résumée et interprétée, d'ailleurs inédite, de ces quatre puits.

Puits N° 1 creusé en 1858 dans la cour de l'ancienne sucrerie :

Q3m. Limon ordinaire	8,50
B. Sables variés avec gravier à la base	9,50
Yc. Argile noire	3,80
Fa2. Grès très tendre	1,20
» Argile ardoise (schiste décomposé ?)	3,70
Fr. Pierre fort dure, puis tendre	1,10
Vide	0,60
Pierre granit	0,50
Argile sable et gravier (probablement une poche)	0,84
	29,74

Puits N° 2 creusé en 1877 dans la nouvelle sucrerie :

Q3m. Limon ordinaire	9,50
B. Sables argile et gravier	6,60
Yc. Argile noire	1,00
Fr. Pierre tendre, puis dure avec un vide de $0^{m}35$ au bas	16,90
	34,00

Puits N° 3 creusé en 1877 à proximité du premier :

Q3m. Limon ordinaire	6,00
B. Sables et gravier	11,30
Yc. Argile noire puis grise	4,70
Fr. Pierre dont $0^{m}80$ de très tendre en trois nuances	11,60
	33,60

uits N° 4 creusé en 1877 pour la distillerie dite du Congo :

Q3m. Limon ordinaire	10,00
B. Sables argile et gravier	16,50
Yc. Argile grise et noire avec gravier à la base	3,50
Fr. Pierre avec un vide de $0^{m}40$ à la base	11,10
	41,10

En l'absence d'échantillons et vu la désignation très vague de la roche rencontrée aux quatre puits, il est difficile de trancher avec certitude la question de son âge. Je l'ai rangée dans le Frasnien plutôt que dans le Tournaisien, comme l'a fait Briart, voici pourquoi :

Notons d'abord la diversité des coupes de ces puits cependant voisins. Elle provient évidemment de ce que, incontestablement, la roche du fond est du calcaire. La présence de vides complètement béants à trois de ces puits, ou de poches de sable à grande profondeur, le fort débit des quatre puits (en moyenne 2200 m. cubes par 24 heures) tout cela indique avec certitude une roche calcaire. Sous les plateaux les calcaires sont fortement altérés et leur surface est creusée d'entonnoirs, parfois de fortes dimensions, où les formations meubles supérieures se sont lentement effondrées. D'où la diversité des coupes.

Si l'on admet que la roche est du Tournaisien, je ne vois pas ce que peuvent être le grès tendre et l'argile ardoise du puits N° 1.

Il est vrai que la coupe de ce puits renseigne $0^{m}50$ de pierre granit. Si la roche était du Tournaisien, tout devrait être du petit granit, et non pas seulement ces $0^{m}50$. Il faut noter que la présence du petit granit est connue dans le pays, où on l'exploitait alors dans les grandes carrières de Ligny. On devait donc être tenté de rapporter à cette roche tout calcaire rencontré, tandis que l'existence du calcaire Frasnien est inconnue. Je suppose que ces $0^{m}50$ représentent un banc cristallin du Frasnien. Enfin si l'on admettait que le tout est du Tournaisien, celui-ci s'étendrait au moins jusque 41 m. Avec la faible pente que les roches ont dans la région, la limite inférieure du Tournaisien devrait alors passer beaucoup plus loin au Nord des établissements de Chassart que ne la fait passer Briart. Or nous avons déjà vu qu'il la fait déjà diriger trop au Nord d'après la position du Famennien de Feluy. La solution du problème, tout en étant encore douteuse, me paraît donc pencher vers l'âge Frasnien des puits de Chassart.

La sécheresse et la migration des oiseaux, par M. A. Proost.

On a constaté cette année à Bruxelles, comme à Paris, le départ des hirondelles dès les premiers jours du mois d'août, tandis que les martinets continuaient à survoler la citadelle de Namur et bon nombre de hauts clochers.

L'on observe généralement le contraire en Belgique.

Nous avons observé jadis à Namur que les martinets se livrent de préférence à la chasse des diverses espèces d'éphémérines dont les larves vivent dans les affluents de la Meuse et de la Sambre.

C'est généralement vers le 15 août que l'on voit voltiger ces nuées d'Ephémères blanches qui ne vivent que le temps de s'accoupler dans l'air et qui jonchent les ponts comme d'une neige formée de leurs dépouilles *(Palingenia Virgo* Réaumur).

Sur les bords de la Seine et de la Marne les pêcheurs à la ligne l'appellent la *manne,* mais c'est une manne qui ne nourrit guère que les oiseaux et les poissons, n'en déplaise à certains naturalistes incrédules qui croient y voir l'origine de la légende des Hébreux dans le désert.

Dans certaines régions cette pluie d'insectes est tellement abondante, qu'on s'en sert comme engrais azoté.

C'est un phénomène curieux que la vie de cet insecte qui vit, dit-on, trois ans dans l'eau à l'état de larve et qui ne vit que quelques heures dans l'air, le temps de reproduire l'espèce, sans pouvoir se nourrir, faute de bouche.

Bel exemple de la loi du *Balancement organique et fonctionnel*, de l'économie de la nature qui supprime parfois les organes les plus indispensables en apparence, pour assurer la reproduction intensive et rapide.

M. l'abbé G. Delépine étudie *les formations supérieures du Calcaire carbonifère de Visé.* Ce travail donne lieu à un échange de vues entre l'auteur, MM. Arm. Renier et le Lieutenant-Général baron Greindl.

Dans les carrières ouvertes à Visé, au N. de Liége, on abat, pour en faire de la chaux, un calcaire massif, de structure bréchoïde ou zonaire, très riche en brachipodes, lamellibranches et gastéropodes, et qui appartient — l'étude de la faune a permis de l'établir d'une manière définitive — à la partie la plus élevée du Dinantien, à la zone à *Productus giganteus*, et, pour préciser, au niveau moyen de cette dernière zone, celle qui, en Angleterre, a été notée D_2 par A. Vaughan (¹). Au calcaire se superposent des couches en grande partie siliceuses, des phtanites en bancs minces qui alternent avec des sortes de schistes noirs ou gris. Ces dernières formations, parfois désignées sous le nom d'ampélites (²), sont attribuées au Houiller inférieur (H_1a).

Entre les deux séries, calcaire massif et phtanites qui le surmontent, le contact est impossible à suivre pas à pas, mais il laisse voir, quand on l'examine à distance, des irrégularités et des discordances ; il semble aussi que dans l'épaisseur même des couches schistoïdes et des phtanites on aperçoive des traces de stratification croisée. Ce sont ces faits qui ont été interprétés récemment par M. Lohest (³) comme fournissant à Visé une preuve qu'il a existé entre le Calcaire carbonifère et le Houiller inférieur une période d'émersion avec ravinement, suivie d'une transgression.

Dans la présente note j'exposerai les résultats de recherches nouvelles qui ont eu pour objet :

1) Étudier le contact entre le calcaire et les couches qui le surmontent à l'endroit où l'on peut l'examiner directement,

---

(¹) On rappelle pour mémoire que dans la zone à *Prod. giganteus*, la plus élevée du Viséen, on a pu distinguer 3 sous-zones : une inférieure à *Prod. undatus*, une moyenne à *Prod. giganteus*, une supérieure à *Prod. latissimus*, dans la classification de A. Vaughan D_1, D_2, et D_{2-3} (cette dernière encore désignée par D_y et P).

(²) Horion et Gosselet, *Étude stratigraphique sur les Calcaires de Visé*. A. S. G. N., XX, 1892, p. 194-212

(³) A. S. G. B., XLII, B. p. 215.

l'extrémité nord de la carrière la plus rapprochée de Visé, à quelques centaines de mètres de la halte de Souvré (1) ;

2) Recueillir et déterminer la faune des couches phtaniteuses et la comparer avec celle du calcaire massif sous-jacent ;

3) La position stratigraphique de ces couches supérieures ainsi précisée, examiner les rapports de ces formations carbonifères de Visé avec les formations de même niveau en Belgique et en Angleterre.

I. — Dans la partie Nord de la carrière on décrira : A. le sommet du calcaire massif ; B. quelques bancs calcaires minces qui le recouvrent ; C. les couches schistoïdes et les phtanites supérieurs.

A. — *Le calcaire massif*

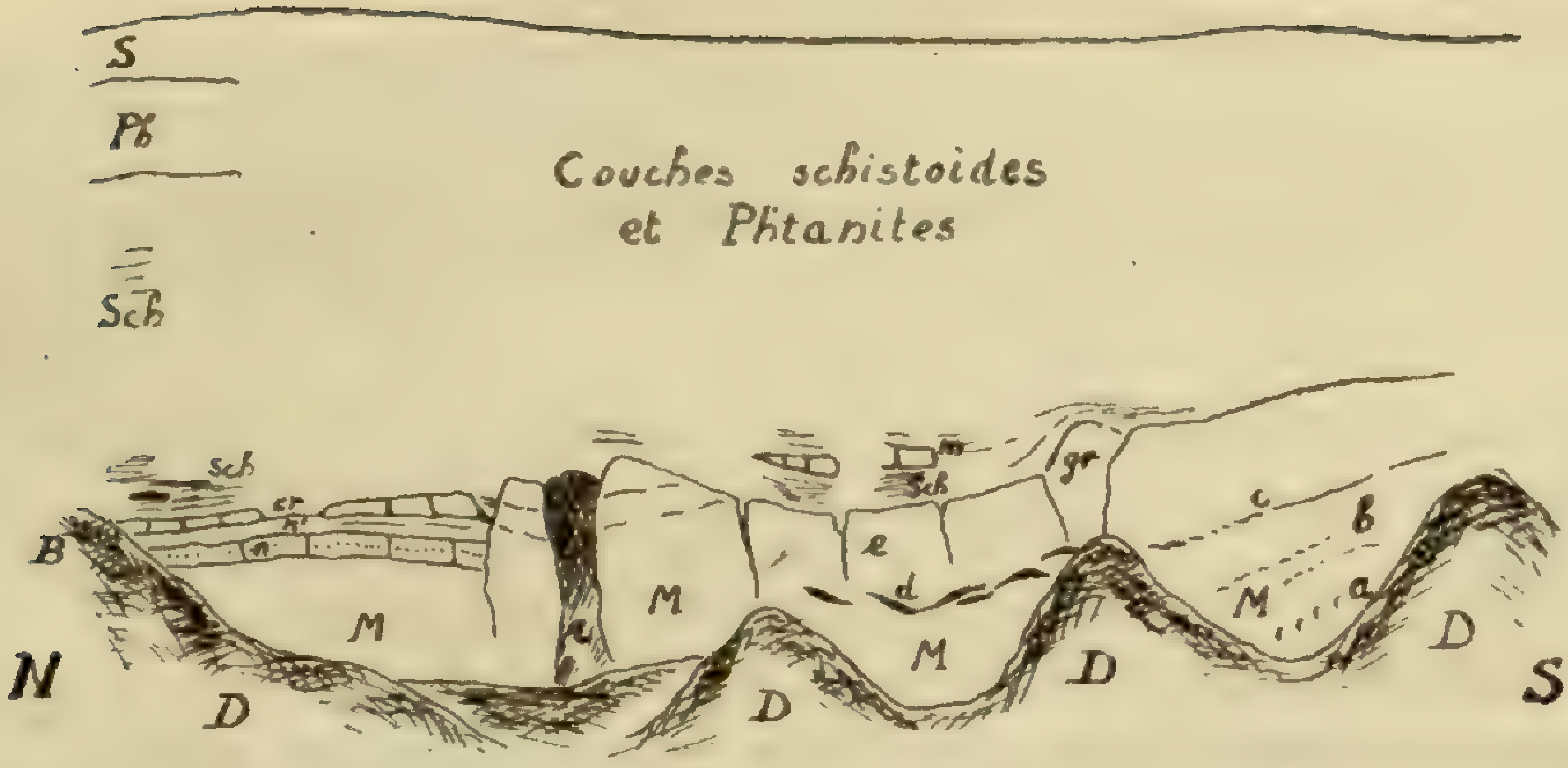
Le calcaire massif présente successivement, en s'élevant vers sa limite supérieure *(figure*, M) un niveau à *Productus giganteus* (*a*), un niveau à structure nettement héchoïde avec cordons de Brachiopodes et en particulier deux lignes qui se distinguent par la présence de *Daviesiella llangollensis* de grande taille (*b*), des surfaces couvertes de *Productus striatus* (*c*) de forme très allongée. De petits délits schisteux noirs (*d*), irréguliers, séparent ce dernier niveau d'un banc (*e*) épais de 3,50 m. à 4 mètres d'un calcaire plus foncé avec des traînées de grosses crinoïdes d'ailleurs peu abondantes, qui couronne de ce côté la masse calcaire. Ce gros banc est incliné vers le Nord, de sorte qu'on peut examiner un peu plus loin la partie supérieure et voir comment se fait le passage aux couches phtaniteuses.

B. — *Formations de passage*

La figure ci-jointe indique l'allure de ces formations de passage ; en voici le détail (*fig.*, en B).

---

(1) Sur la carte autrefois dressée par Gosselet et Horion cette carrière a été notée par les lettres F, G et H ; aujourd'hui ces trois sièges d'exploitation sont réunis en un seul ; c'est dans la partie F, la plus rapprochée de Souvré, qu'on peut actuellement accéder au point de contact.



Coupe verticale prise à l'extrémité nord de la carrière de Visé-Souvré.

M. Calcaire massif; *D.* déblais; *a.* niveau à *Prod. giganteus*; *b.* niveau à *Dav. llangollensis*; *c.* niveau à *Prod. striatus*; *d.* délit schisteux noir; *e.* calcaire massif à gros articles d'encrines;

B. Formations de passage { *n. n'* calcaire noir.
cr, calcaire crinoïdique.

Sch. couches schistoïdes et phtanites rubannés; *Ph.* phtanites à encrines; *S.* schistes et phtanites noirs; *Gr.* grotte; *r.* fente remplie de limon (correspondant peut-être, comme la fente verticale voisine, à une petite faille).

Un premier banc (*n*) de 0,30 m. est composé de calcaire noir subcompact, avec des lentilles de calcaire finement grenu; ce type lithologique est celui du calcaire de Bachant et de certains niveaux du marbre noir de Dinant; en coupes minces, ce calcaire a une structure analogue à ceux-ci, et renferme notamment des spicules de spongiaires. — Un deuxième banc (*n'*) de 0,35 m. est divisé par un joint en un lit inférieur, de 0,15 m., qui est fait d'un calcaire argileux en partie décomposé et partagé en plaquettes de 2 à 3 centimètres, semblables à celles qu'à Tournai on appelle improprement calcschistes; la partie supérieure de ce banc, 0, 20 m., est faite d'un calcaire plus dur, probablement plus siliceux, à cassure légèrement conchoïdale. — Un troisième banc (*cr*) est formé par du calcaire à crinoïdes, qui rappelle tout à fait au point de vue lithologique, par le calibre et par l'abondance des encrines, le *petit granite* des Écaussines; ce banc, épais de 0,20 m. à 0,25 m., est remplacé sur quelques décimètres par une argile noire de décomposition, puis on le retrouve et il atteint ensuite 0,35 m. et 0,60 m.

Ces bancs calcaires, d'épaisseur si peu considérable, ont néanmoins une grande importance : ils marquent un changement radical au point de vue lithologique par rapport au calcaire massif sous-jacent. — Enfin on n'observe point à la hauteur de ces bancs de surfaces durcies et taraudées qui attesteraient qu'il y eut immédiatement après leur dépôt une période d'émersion suivie d'un retour de la mer.

C. — *Couches schistoïdes et phtanites supérieurs*

Sur ces calcaires repose directement une série (sch), qui atteint environ 15 mètres, composée de couches schistoïdes noires, alternant plus haut avec des phtanites rubannés et avec une roche siliceuse, grisâtre ou même blanche, poreuse, qui se délite en plaquettes épaisses de 2 à 7, au maximum 10 centimètres, dont les surfaces sont souvent fossilifères ; quelques bandes de phtanites crinoïdiques s'intercalent dans cette première série. — Celle-ci est surmontée de 4 à 6 mètres de phtanites (ph), criblés de cavités correspondant à la place primitivement occupée soit par des brachiopodes, soit surtout par des encrines, soit plus rarement par des polypiers. — Ces phtanites à encrines sont recouverts par 3 à 5 mètres de couches schisteuses et phtaniteuses noires (s). — Toutes ces couches supérieures, minces, de couleur noire ou grise, souvent phtaniteuses, forment donc un ensemble qui atteint 22 à 25 mètres en ce point (¹).

La structure de ces couches supérieures nous porte à admettre qu'une partie au moins a dû se déposer à l'état de calcaire : calcaire noir argilo-siliceux en bancs minces, calcaire à encrines, alternant avec quelques lits de véritables schistes et de schistes calcarifères. Ces roches auraient subi une décalcification partielle ou totale, tandis que la silice provenant pour une part des spicules de spongiaires, qui abondent dans certains de ces bancs, était remise en mouvement et les transformait en phtanites, ou en

---

(¹) Il ne m'a pas été possible d'atteindre les bancs qui apparaissent en *m* au milieu de la masse des couches schistoïdes : il serait intéressant de connaître leur composition.

cette roche siliceuse, grenue et poreuse qui forme les plaquettes grises ou blanchâtres que nous avons signalées plus haut. — En attendant que l'étude détaillée de nombreuses plaques minces permette de vérifier la valeur de cette hypothèse pour toutes ces roches, il paraît certain que tout au moins pour les phtanites à encrines et à polypiers composés, comme *Alveolites*, et aussi pour certains bancs de phtanites noirs rubannés, on se trouve en présence de roches maintenant silicifiées, mais qui ont été déposées à l'état de calcaires qui ne devaient point se différencier sensiblement des calcaires noirs et des calcaires crinoïdiques qui forment les quelques bancs que nous avons décrits sous le nom de *Couches de passage*. Ce sont ces dernières dont la formation a inauguré le changement de régime qui s'est produit à Visé vers la fin du Dinantien et qui s'est ensuite continué sans interruption pendant la période correspondant au dépôt des couches supérieures.

Les irrégularités dans la stratification, qu'on observe en s'éloignant de Souvré vers le Sud et sur lesquelles M. Lohest a très justement attiré l'attention, pourraient résulter peut-être des phénomènes de décalcification qui ont affecté les couches supérieures, et qui s'accompagnent parfois d'affaissements. Ces discordances seraient alors de même ordre que celles que l'on peut observer à Tournai, dans la carrière dite du Cornet, où des roches carbonifères décalcifiées, parfois litées, sont plissées, affaissées et obliques par rapport aux couches de calcaire non modifié. — Toutefois, étant données les observations nouvelles faites, notamment sur les couches de passage à Souvré, je proposerais plus volontiers une autre explication suggérée par l'observation de nombreux cas analogues dans des formations calcaires appartenant à d'autres âges. Ces irrégularités dans la stratification, ces couches terminées en biseau engendrant des apparences de discordance, résulteraient du dépôt de calcaire en bancs minces succédant à celui d'un calcaire massif, comme celui de Visé, qu'il faut ranger dans les facies d'accumulation du même type que les calcaires massifs waulsortiens en Belgique, les *Brachiopod-beds* et les *Knolls* du Carbonifère en Angleterre, et les récifs à polypiers de toutes les périodes. Très fréquemment la bordure et les dessus de ces diverses formations récifales, en particulier dans le Jurassique du Bassin de Paris et du Jura, offrent des contacts irréguliers, des couches qui se terminent en biseau et sont relayées par d'autres, des entrecroisements dans la stratification, comme ceux qu'on voit à Visé entre le calcaire massif et les couches qui le surmontent. Ce phénomène ne peut être considéré en lui-même comme une preuve de transgression.

II. — *Faune des couches supérieures.* — Dans les phtanites et les couches schistoïdes nous avons pu recueillir et déterminer de nombreux fossiles. En voici la liste :

Acanthodes : fragment de l'exosquelette et nombreuses épines de nageoires.
Phillipsia aequalis H. v. M.
Phillipsia gemmulifera Phill.
Spirifer bisulcatus Sow.
» » var. *oystermouthensis* Vaugh.
» » var. *wickensis* Vaugh.
» *calcaratus* Mc Coy.
» *convolutus* Phill. (? moule interne).
Athyris globularis Phill.
Fenestellides (très communes).
Productus latissimus Sow.
» *striatus* Fischer (forme étalée et transversale).
» *semireticulatus* Mart.
» *longispinus (Pr. flemingii* Phill.)
» *punctatus* Mart.
» *scabriculus* Mart.
» *aculeatus* Mart.
Densiphyllum rushianum Vaugh.
» *nodosum* L. Smyth.
Cyathaxonia costata.
Koninckophyllum interruptum Th. et N.
Lithostrotion irregulare M. E. et H.
Chaetetes tumidus M. E. et H.
Alveolites septosa Flem.

Un petit polypier astréen (indéterminé).

Les éléments caractéristiques de cette faune, qui permettent de fixer sa position stratigraphique, sont 1° parmi les *Productus* : *Pr. latissimus* qui appartient à la subdivision la plus élevée de la zone à *Pr. giganteus ; Pr. punctatus, Pr. striatus, Pr. longispinus* qui n'apparaissent ou n'atteignent leur taille et leur développement normal que dans la zone à *Productus giganteus*. 2° Les *Spirifer* à côtes aplaties dont *Sp. bisulcatus* est le type répandu dans tout le Viséen et qui monte dans le Westphalien ; les formes et variétés recueillies à Visé sont précisément celles qui sont localisées tout au sommet du Viséen dans le sud-ouest de l'Angleterre. 3° Parmi les polypiers dominent comme nombre les polypiers cornus du groupe des *Zaphrentis (Densiphyllum)* et *Cyathaxonia* (¹).

On peut en conclure qu'*au point de vue de la faune il n'y a pas d'hiatus à Visé* entre le calcaire massif et les couches qui le surmontent. Le calcaire massif contient la faune caractéristique du niveau moyen de la zone à *Prod. giganteus,* soit D2, et les couches phtaniteuses contiennent la faune du niveau immédiatement supérieur soit D2-3 (sous-zone à *Prod. latissimus).*

Les observations que l'on peut faire dans la tranchée nouvelle ouverte au Nord de Visé le long de la ligne d'Aix-la-Chapelle à Tongres ne modifient point ces données : la faune qu'on y observe situe ces couches au même niveau que celles que l'on recueille dans les carrières au sud de Visé (²).

III. — *Comparaison avec les formations situées au même niveau en Belgique et en Angleterre.*

En Belgique, les formations qui correspondent à ces couches supérieures de Visé sont les ampélites de Chokier à *Glyphioceras diadema*, les phtanites à *Posidoniella laevis* qu'on voit par

---

(¹) Horion et Gosselet, *op cit.*, y ont signalé aussi *Glyphioceras diadema* et Destinez y aurait trouvé *Prod. carbonarius* : ces deux espèces ne sont point pour infirmer ces conclusions : elles se rencontrent au même niveau D2-3 à Warnant, et en Angleterre.

(²) Les formations qu'on observe dans cette tranchée seront examinées en détail dans une note suivante.

exemple aux environs de Mons, les calcaires noirs et les schistes de la partie supérieure des carrières de Warnant, etc. Ces formations sont superposées à une série partout peu épaisse de calcaire équivalent au calcaire exploité à Visé entre Souvré et Richelle. A Samson par exemple, au sud de Namèche, le calcaire atteint une épaisseur de 15 à 20 mètres, dont une lentille de calcaire très crinoïdique, et au-dessus, après un banc de calcaire noir de 0,60 m. qui fait le passage, des schistes et des bancs gréseux succèdent immédiatement au calcaire. De même à Anhée et dans le Condroz. — En résumé, presque partout en Belgique, et aussi dans le Nord de la France, le régime calcaire est peu développé à la fin du Dinantien, et très tôt s'introduit (malgré quelques retours localisés de calcaire à encrines) (¹) un régime assez semblable à celui du Westphalien pour avoir été désigné en Belgique sous le nom de Houiller inférieur et noté sur la carte géologique par le signe H1a.

Visé offre un régime différent : le dépôt de calcaire y a pris à la fin du Dinantien un développement plus grand et s'est aussi prolongé plus longtemps que partout ailleurs en Belgique et dans le Nord de la France.

La région où a existé le même régime qu'à Visé se trouve *en Angleterre*, et spécialement dans une aire comprise entre le Derbyshire, le Nord du Pays de Galles et Ingleborough. Là les accumulations de calcaires à brachiopodes, de calcaires bréchoïdes ou crinoïdiques avec polypiers (*Brachiopod beds* du Midland, *Knolls* au sud des Craven Faults) qui appartiennent aux niveaux D1 et surtout D2, et que surmontent des séries de calcaire noir, de calcaire à phtanites ou à encrines, de schistes ou calcschistes (Yoredale, Pendleside serie, D2-3), ont pris une ampleur qui n'est réalisée nulle part ailleurs dans l'Ouest de l'Europe à la fin du Dinantien, la région de Visé exceptée (²). C'est donc vers le Nord

---

(¹) X. Stainier : *Les calcaires à crinoïdes du Houiller belge*, B. S. B. G., XXIX, p. 77, 1920.

(²) Le Dinantien inférieur et moyen avait déjà offert des particularités de ce genre, localisées en d'autres régions : les accumulations récifales de calcaire à veines bleues propres aux facies waulsortiens n'ont été rencontrées jusqu'ici qu'en Belgique, dans le Nord de la France et à l'Ouest de l'Irlande.

et le Nord-Ouest, qu'il faut chercher le prolongement de la mer qui recouvrait Visé à la fin de l'époque du calcaire carbonifère, et les conditions de profondeur et de sédimentation qui y régnaient.

Il est par conséquent inutile, pour expliquer le caractère si spécial les formations de Visé, de recourir à l'hypothèse d'un gigantesque charriage venant du Sud, qui vient d'être reprise, comme s'autorisant des travaux récents sur les charriages du bassin houiller belge (¹).

Nulle part aux environs de Liége ni dans le Condroz, il n'existe à ce niveau de formations analogues, d'où ce lambeau de charriage pourrait provenir ; et plus loin, au Sud de l'Ardenne, on se trouve dans des régions où les facies du Culm apparaissent.

Conclusions. 1. Les couches phtaniteuses et schistoïdes et le calcaire massif qu'elles recouvrent à Visé sont en continuité stratigraphique. Au point de vue lithologique ces deux formations sont reliées par des bancs minces de calcaire noir et de calcaire crinoïdique ; au point de vue paléontologique la faune du calcaire massif et celle des phtanites se succèdent sans hiatus. Les irrégularités qu'on remarque dans l'allure des couches peuvent s'expliquer par d'autres causes qu'une discordance de stratification. Il n'existe donc point à Visé de preuve d'une période d'émersion entre le Calcaire carbonifère et le Houiller inférieur.

2. Les particularités qui mettent les formations de Visé à part de toutes celles qui sont situées au même niveau stratigraphique en Belgique et dans le Nord de la France n'autorisent point à conclure que ce massif représente un lambeau de charriage, une *clippe*, venu du Sud. La région de Visé a ses analogues dans l'Angleterre centrale et septentrionale : elle formait avec celle-ci à la fin du Dinantien une même province maritime, où les conditions de dépôt différaient profondément de celles qui régnaient alors dans le reste de la Belgique, le Nord de la France et le

---

(¹) A. Briquet : *Le sous-sol des Pays-Bas d'après des recherches récentes.* Ann. de Géogr. XXX, n° 167, p. 336. 15 sept. 1921. — M. Lohest avait suggéré cette idée en 1911 à propos du sondage de Chertal. Voir A. S. G. B., XXXVIII, B., p. 189, 1911.

Sud-Ouest de l'Angleterre. — Dans une prochaine note seront étudiées les régions et formations intermédiaires par où Visé et le centre de l'Angleterre étaient rattachés.

Description de Lamellicornes coprophages indo-malais (¹), par Joseph J. E. Gillet.

Copris Marcus n. sp. ♂.

De forme oblongo-ovalaire ; noir, brillant ; les pattes, la tête et le prothorax ciliés de roux brillant, les organes de la bouche et les antennes d'un brun-roux.

♂ Tête lisse avec quelques points autour des yeux ; ces points très apparents chez les petits exemplaires disparaissent entièrement chez les grands. Clypeus, à fine carène submarginale, fortement relevé sur tout son pourtour, coupé droit en avant, puis étroitement sinué de chaque côté ; sutures générales enfoncées, très apparentes. La partie centrale, surélevée, se termine par une carène peu marquée ou même interrompue en son milieu, mais à extrémités nettement distinctes ; elle se prolonge en arrière en une lame triangulaire courte, épaisse, suivie d'une impression transverse de chaque côté.

Prothorax arrondi latéralement, largement échancré en avant, avec deux impressions submarginales peu profondes derrière les yeux ; les fossettes latérales, larges, sont également peu profondes ; angles antérieurs coupés droits ; sillon longitudinal médian bien marqué dans toute sa longueur ; disque finement pointillé, sauf une aire à ponctuation assez forte entre le milieu et les bords latéraux ; chez les petits exemplaires, la ponctuation envahit complètement la partie latérale.

Elytres élargis au delà du milieu, à bord latéral fortement caréné dans toute sa longueur, subcarénés et comprimés vers l'extrémité ; les stries très nettes et crénulées, la huitième effacée en arrière ; les interstries peu convexes, ponctués surtout à la base et sur les côtés des élytres. Pygidium couvert d'une ponctuation forte et peu serrée.

Dessous du clypeus à bord antérieur concave, prolongé en tri-

---

(¹) Tous les « types » des espèces nouvelles font partie de ma collection (J. G.).

angle très obtus à sa partie postérieure et marqué d'une série de gros points.

Dessous du prothorax et de l'abdomen ponctués sur les côtés : mésothorax peu développé, à ponctuation forte et dense, séparé du métathorax par une suture en angle obtus ; métathorax lisse, à sillon longitudinal peu apparent.

Cuisses bicarénées à leur bord postérieur, les antérieures lisses, les quatre autres ponctuées vers l'extrémité ; tibias antérieurs quadridentés, éperon terminal, aplati, dirigé en avant et acuminé.

Long. — 17 à 21 mm.

Hab. — Malacca ; Cambodge (R. VITALIS DE SALAZA, 1912).

Cette espèce est voisine de *C. punctulatus* WIEDEMANN dont la tête a une conformation analogue et dont le bord antérieur est également prolongé en-dessous en forme de triangle.

Copris Vitalisi, n. sp. ♂ ♀.

De forme ovalaire, très convexe. Noir, brillant ; antennes et organes de la bouche d'un roux brunâtre ; cils de la tête, du prothorax et des pattes également roux.

Tête en forme de demi-ellipse à grand axe transverse, à rebord doublé d'une fine carène submarginale ; clypeus échancré et subbidenté en avant, portant en arrière un tubercule peu saillant ; angles postérieurs des joues arrondis ; sutures génales bien marquées.

Prothorax convexe, rebordé sur tout son pourtour, à angles antérieurs aigus, arrondis au sommet, les postérieurs très obtus ; la partie médiane avec une très légère trace de sillon longitudinal.

Elytres à stries assez fines, peu approfondies au sommet, finement ponctuées : interstries plans, lisses. Pygidium très convexe. Dessous du corps présentant aux angles antérieurs du prothorax une excavation nettement délimitée et rebordée à sa partie inférieur ; mésothorax trè scourt, séparé du métathorax par une suture en angle très obtus ; métathorax à sillon longitudinal très faible.

Cuisses antérieures ciliées de longs poils roux enroulés sur eux-mêmes ; tibias antérieurs quadridentés, à première dent peu marquée ; la deuxième et la troisième sont très larges à la base et la quatrième beaucoup moins développée ; éperon apical large et court.

Une ponctuation forte et écartée recouvre la tête (à l'exception de la partie antérieure et du vertex), le prothorax (elle s'atténue sur le disque et n'atteint pas la partie médiane), le pygidium et tout le dessous du corps (sauf le milieu du métathorax et la face extérieure des quatre cuisses postérieures).

Long. — 10 à 12 mm.

Hab. — Laos tonkinois : Muong-Xa (R. VITALIS 1920) ; Haute-Birmanie : Carin Cheba (L. FEA, 1888).

Je me suis assuré par dissection que je possède les deux sexes de cette espèce, mais sauf une légère dilatation de l'avant-dernier segment ventral, je ne trouve aucun caractère extérieur permettant de distinguer les femelles des mâles.

Copris sumatrensis, n. sp. ♂.

Noir, brillant ; aspect de *C. tetraodon* GILLET. Tête conformée de la même manière ; corne frontale non denticulée à la face postérieure. La partie rétuse du prothorax est plus courte, plus excavée ; elle est aussi plus large à sa partie supérieure ; les impressions submarginales en arrière des yeux, n'atteignent pas les fossettes latérales, comme c'est le cas dans l'espèce citée. Le bord antérieur de la partie élevée est proéminent en son milieu ; il porte quatre tubercules, les deux du milieu rapprochés, les deux latéraux peu développés, dirigés en dehors ; chez *C. tetraodon* au contraire, le bord antérieur est droit et les deux tubercules latéraux sont dirigés en avant. La ponctuation du prothorax est la même dans les deux espèces.

Stries des élytres crénulées ; interstries subconvexes, visiblement aciculés. Pygidium convexe, couvert d'une ponctuation grosse et écartée. Metasternum lisse, impressionné en avant ; sillon médian très peu apparent, sauf dans sa partie antérieure.

Long. — 18 mm.

Hab. — Sumatra : Déli.

Je ne connais que d'après la description *C. punctipennis* BOUCOMONT, mais il diffère certainement de l'espèce actuelle par sa corne frontale bidentée à la base et son prothorax avec *six* tubercules au bord antérieur de la partie élevée.

Copris tripartitus Waterhouse, var. **formasanus** nov. var. ♂.

Diffère de la forme normale du Japon et de Corée par les denticules de la corne céphalique qui sont spiniformes et plus développés, par le lobe prothoracique plus large, à partie antérieure concave dépourvue de pli longitudinal médian et à partie élevée uniformément et complètement ponctuée.

Long. — 15 mm.

Hab. — Formose (H. Sauter).

Copris punjabensis n. sp. ♂♀.

Espèce voisine de *C. Andrewesi* Waterhouse, dont elle a l'aspect et la structure générale ; elle en diffère surtout par la conformation de la tête qui n'a ni carène, ni tubercule et par la ponctuation plus forte et plus serrée des téguments.

Bord antérieur de la tête moins relevé ; dent médiane étroite, à sommet nettement arrondi, tandis qu'elle est large et à sommet presque droit dans *C. Andrewesi*. Prothorax à bord antérieur plus arrondi en son milieu ; interstries des élytres, subconvexes ou légèrement tectiformes, marqués de petits points profonds, écartés et subsériés.

Chez les mâles bien développés le vertex est plus en relief et la fossette postérieure moins large et plus profonde que dans l'espèce précitée ; l'espace compris entre cette fossette et la partie frontale est occupé par un renflement longitudinal déclive en avant, tronqué au sommet et déprimé transversalement en arrière ; la troncature vue du dessus est presque plane et figure un trapèze isocèle. Chez les mâles de développement moindre ces détails s'effacent et le renflement en question n'est plus indiqué que par une élévation longitudinale tuberculée aux deux bouts.

Chez la femelle la tête est uniformément mais légèrement renflée à la partie centrale et la fossette du vertex se réduit à une impression transverse peu apparente.

Long. — 9 à 12 mm.

Hab — Punjab (G. Babault) : Kutola IV, 1914 ; Kalka IX, 1914.

Copris ramosiceps, n. sp. ♂.

Cette espèce fait partie du même groupe que la précédente ; elle est voisine de *C. excisus* Waterhouse, décrite d'Assam, mais en diffère notamment par l'armature céphalique.

Clypeus, caréné longitudinalement à sa partie antérieure, prolongé en son milieu en un tubercule cylindrique dirigé en avant et recourbé vers le haut, puis bifurqué en deux rameaux divergents ; la première moitié de chaque rameau est régulièrement dilatée à partir de la base et forme vers le milieu une dent arrondie ; la moitié apicale, un peu contournée, se termine en une pointe émoussée dirigée vers l'arrière. De chaque côté du tubercule médian, le bord du clypeus présente une échancrure large et peu profonde déterminant une dent latérale.

Prothorax convexe, à ponctuation très fine, très serrée, uniformément répandue sur toute la surface.

Elytres à stries superficielles, interstries non convexes, ponctués comme le prothorax.

Long. — 13 mm.

Hab. — ?

La description qui précède a été faite d'après un exemplaire unique qui m'a été offert par M. Boucomont et qui provient de la Collection Neervoort van de Poll : il ne porte aucune indication de patrie ; tout ce qu'on peut dire à ce sujet c'est que le groupe dont cette espèce fait partie étend son habitat sur l'Inde, l'Indochine et la Chine méridionale.

Copris Servius Harold.

Cette espèce a été décrite (Ann. Mus. Genova, X, 1877, p. 46) d'après un seul exemplaire que Harold supposait être une femelle. Grâce à l'obligeance de M. Gestro, j'ai pu examiner cet exemplaire : c'est bien un mâle, très distinct d'ailleurs des individus *de même sexe*, décrits par Sharp, sous le nom de *C. Agnus* (Coleopt. Hefte, XIII, 1875, p. 47). Il en diffère notamment par la présence au bord antérieur du clypeus de deux petites protubérances obsolètes, peu apparentes, et par la ponctuation uniforme et régulière du prothorax qui ne laisse pas d'espace lisse de part et d'autre du sillon médian (1).

---

(1) Relativement au genre *Copris*, il y a lieu de signaler les synonymies suivantes :

Copris insidiosus Péringuey = **C. obesus** Boheman (f. minor).
Copris Alluaudi Gillet *in litt.* = ♀ **C. atropolitus** Gillet.
Copris Graueri Gillet *in litt.* = **C. camerunus** Felsche.

Onthophagus nilgirensis n. sp. ♂♀

Très voisin de *O. diabolicus* Harold, décrit de Sarawak avec lequel on le confond aisément.

♂ Clypeus un peu plus allongé, plus fortement relevé à l'extrémité lisse devant la carène frontale qui est plus en relief et *n'atteint pas* les sutures génales ; derrière cette carène, la surface est concave, presque lisse ainsi que les joues. La lame du vertex est plus convexe dans sa partie médiane et ses denticules latéraux, mieux marqués, sont plus éloignés de la base ; le rétrécissement qui suit est plus brusque et la partie apicale plus effilée.

Prothorax plus largement excavé en avant, l'excavation limitée en arrière par un pli transverse presque droit dont les renflements latéraux sont beaucoup plus distants ; prolongement angulaire de la base moins long et par suite plus obtus. Surface complètement lisse, à l'exception de quelques rares points aux angles antérieurs.

Stries des élytres beaucoup moins marquées ; interstries non ponctués. Pygidium plus convexe, sans trace de carène médiane, très finement ponctué.

♀ Ressemble beaucoup au même sexe de *O. diabolicus*, mais la carène frontale à extrémités très nettes est, comme chez le mâle, tout à fait droite et n'atteint pas les sutures génales ; le tubercule du vertex est moins conique et les deux renflements du thorax sont remplacés par deux petits tubercules *deux fois aussi distants* l'un de l'autre que dans l'espèce de Harold.

Long. — 14 à 17 mm.

Hab. — India : Nilgiri Hills (H. L. Andrewes, X, 1907, 2500 ft).

Onthophagus megathorax, n. sp. ♂.

Brun noirâtre, à reflet bronzé appréciable surtout sut le thorax, le pygidium et la partie postérieure du métathorax ; antennes rousses, à premier article non serriforme.

Tête pentagonale ; clypeus prolongé en avant en angle aigu à sommet arrondi ; bord latéral sinué aux sutures génales, qui sont bien distinctes ; jones dilatées, à angle postérieur presque droit ; yeux à peine visibles du dessus. La partie postérieure de la tête, peu élevée, est surmontée d'une très petite carène transverse, en angle obtus, suivie en arrière d'une légère excavation traversée par un pli longitudinal caréniforme ; le bord postérieur du vertex est relevé en lame transverse largement sinuée au milieu.

Prothorax très développé, rebordé sur les côtés et au milieu de la base ; partie antérieure déclive un peu renflée longitudinalement en son milieu ; partie postérieure échancrée en avant, très convexe sur les côtés, faiblement impressionnée à la partie médiane, mais sans aucune trace de sillon longitudinal.

Stries des élytres géminées, à ponctuation obsolète, peu profondes sur le disque, mieux marquées sur les côtés et vers l'extrémité. Interstries subconvexes. Pygidium marginé à la base. Tibias antérieurs non amincis, ni prolongés en une griffe au côté interne du sommet.

Le clypeus est ridé transversalement ; les joues, le vertex, le devant et les côtés du prothorax sont couverts d'une granulation forte et serrée ; le disque du prothorax, les élytres et le pygidium sont ponctués.

Long. 13 mm.

Hab. — Sumatra (W. Morton).

Onthophagues tonkineus, n. sp. ♀.

Je donne ce nom à une espèce dont je ne possède jusqu'à présent que des exemplaires femelles ; elle appartient au groupe de *O. Lenzi* Harold et est voisine de *O. japonicus* Harold et de *O. dorsofasciatus* Fairmaire.

Tête et thorax d'un brun faiblement bronzé, élytres noir de poix avec des taches jaunes à la base des intervalles 2, 3, 4, 6 et 7, celle du 3ᵉ plus courte, et au sommet des intervalles pairs, pygidium plus ou moins taché de testacé sur la périphérie.

Tête avec deux carènes courbes concentriques, l'antérieure reliée aux sutures génales, la postérieure placée en avant du bord des yeux ; thorax avec deux fovéoles longitudinales déterminant à leur bord interne une sorte de lobe discal surélevé et muni d'un tubercule globulaire de chaque côté.

Ponctuation simple, forte, celle du thorax irrégulière, celle des élytres râpeuse par endroits, déterminant des rides longitudinales.

Long. — 8 à 9 mm.

Hab. — Tonkin : Ile de la Table, dans la baie d'Along (R. Vitalis de Salvaza).

Sur des Névroptères nouveaux ou critiques, par le R. P. Longin Navas, S. J. Quatrième série.

Famille NYMPHIDES

D'abord je suis d'accord avec M. P. Esben Petersen (PROC. LINN. SOC. N. S. W. 1917, p. 210) pour ne pas admettre la famille des Myiodactylides comme différente de celle des Nymphides, tenant compte de l'extrême affinité des genres de ce groupe avec le genre *Nymphes* Leach, type de la famille, et avec d'autres voisins. Néanmoins, afin de pouvoir inclure nettement tous ces genres sous une seule famille, il sera convenable de donner une caractéristique générale de la famille des Nymphides qui puisse s'appliquer également à tous ces genres.

1. **Nymphidae** (ampl.)

Nevroptera planipennia.

Caput sine ocellis ; antennis fortibus, ala anteriore brevioribus, articulis brevibus.

Prothorax fere longior quam latior.

Abdomen cylindricum, alis brevius.

Pedes teretes, tarsis brevibus, quinque articulis cylindricis, brevibus, unguibus longis, arolio grandi, bifido.

Alæ plerumque dense reticulatæ; subcosta et radio confluentibus, uno sectore radii, plurimis ramis instructo.

Ainsi constituée, la famille des Nymphides peut aisément se diviser en trois tribus.

2. **Nymphini** trib. nov. (¹).

Tribus Nymphidarum.

Tibiae posteriores calcaribus armatæ.

3. **Myiodactylini** nov.

Tribus Nymphidarum.

Tibiæ posteriores inermes.

Area subcostalis utriusque alae pluribus venulis dotata.

(¹) Banks, TRANS. AM. ENTOM. SOC., 1913, p. 211, employa le nom *Nymphini* (nom. nudum et mortuum ?), mais l'étendant non seulement à tous les genres des Nymphides, mais aussi au *Spilosmylus* et autres de la famille des Osmylies.

4. **Nymphydrini** nov.

Tribus Nymphidarum.

Tibiæ posteriores inermes.

Area subcostalis alae anterioris una venula basilari dotata.

Clé dichotomique de la famille des Nymphides.

La disposition de tous les genres de la famille des Nymphides peut s'exprimer comme il suit :

1. Tibias postérieurs armés de deux éperons *(Nymphini* Nav.) 2

— Tibias postérieurs dépourvus d'éperons 4

2. Procubitus des deux ailes simple, sans bifurcation . . . . 3. **Austronymphes** E. Pet.

— Procubitus bifurqué à l'aile antérieure, simple à la postérieure 3

3. Aile antérieure avec le procubitus bifurqué au niveau de l'origine du secteur du radius ; champ postcubital avec deux séries d'aréoles . . . . 1. *Nymphes* Leach.

— Aile antérieure avec le procubitus divisé au niveau de l'origine du premier rameau du secteur du radius : une seule série d'aréoles au champ postcubital . . 2. *Nesydrion* Gerst.

4. Champ sous-costal des deux ailes divisé par plusieurs veinules (*Myiodactylini* Nav.) 5

— Champ sous-costal des ailes libre, avec une veinule basilaire (*Nymphydrini* Nav.) 6

. . . . 6. **Nymphydrion** Bks.

5. Procubitus simple à l'aile antérieure, non bifurqué jusqu'au bout . . . . 4. **Myiodactylus** Brau.

— Procubitus de l'aile antérieure bifurqué près de la base, ou au premier tiers de l'aile . . . 5. **Osmylops** Bks.

5. **Myiodactylus chrysopoides** sp. nov.

Similis *osmyioidi* Brau., major.

Flavus, pilis flavidis.

Caput oculis in sicco fuscis ; fronte stria longitudinali laterali fusca prope oculos ; labro antice emarginato, lobis seu angulis lateralibus rotundatis.

Prothorax longior quam latior, capite multo angustior, antrorsum leviter angustatus, superne ad latera fascia lata longitudinali viridescente. Meso- et metathorax flavi, superne ad latera late

viridescentes ; præsiuto mesonoti duabus maculis fuscis notato.

Abdomen unicolor, pilis pallidioribus.

Pedes teretes, flavi viridibus, pilis longis ; unguibus longis, apice curvatis fuscisque ; pulvillis grandibus, albidis.

Alae reticulatione densa, flava, ad costam in regione stigmali macula subtriangulari flavida, parum distincta ; sub costa et radio ad regionem stigmaticam confluentibus, mox vena unica in arcum curvata et cum serie gradata venularum gradatarum externa et unica, longe distante ab apice et margine externo continuata ; venulis pluribus inter subcostam et radium.

Ala anterior lata, ad angulum posticum 6'5 mm., ad regionem stigmaticam 9 mm. ; area costali lata, prope basim latiore, venulis furcatis aut ramosis, longis densisque, fere 35 usque ad confluentiam radii cum subcosta ; sectore radii 8-9 ramis ; una venula radiali interna ; cubitis longis, indivisis, parallelis ; venis omnibus flavis ; venulis ramisve ad axillas furcularum marginalium, ad margines costalem et externum ; venulis in disco interdum alternis fuscis, plerisque flavis.

Ala posterior angustior, maxime prope basim, 3'5 mm. ad angulum posteriorem, 6'5 mm. ad regionem stigmaticam, nullis venulis fuscatis, paucis ad axillas furcularum marginalium ad margines costalem et externum leviter fuscis ; area costali angustiore quam in ala anteriore, venulis plerisque, in medio basilari omnibus simplicibus, fere 33 usque ad confluentiam radii cum subcosta : sectore radii 7-8 ramis ; margine posteriore recto usque ad angulum externum, levissime concavo juxta angulum internum.

Long. corp.	16'5	mm.
— al. ant.	20'5	»
— — post.	19	»

Patrie. Iles Phillippines : Mindanao, Surigao, 16 juin 1914. Un échantillon dans ma collection, don du P. G. Hulstaert Miss. S. C.

Cette espèce se distingue de *M. osmyloides* Brau. de l'Australie par sa taille plus grande, par la forme de l'aile postérieure, presque spatuliforme, par une plus forte densité de la réticulation des ailes, par ses couleurs différentes, etc.

6. **Osmylops Hulstaerti** sp. nov.

Similis *ornato* Mac Lachl.

Caput flavum, vertice et occipite vix inflatis, vertice duobus sulcis longitudinalibus, inter se proximis signato ; fronte macula ante et inter antennas fere in /\, livido-fusca, ramis latis ; labro antice levissime emarginato, lobis lateralibus rotundatis ; palpis flavis, immaculatis ; oculis fuscis ; antennis flavis.

Prothorax paulo longior quam latior, antrorsum leviter angustatus, flavus, superne ad latera viridis, in eaque fascia duabus striis fuscis, anteriore punctiformi, posteriore longitudinali prope marginem ; sulco anteriore transverso vix distincto, posteriore distinctissimo, marginem posteriorem efficiente, pone quem fossa profunda et transversa impressa, lobum collarem posteriorem rotundatum mesonoto contiguum formante. Meso- et metathorax flavi, superne ad latera late virides.

Abdomen, ut videtur, flavum (flavo-fuscum, quia male conservatum), pilis flavis ; septimo sternito postice in laminam grandem latamque producto, ex cujus margine posteriore procedunt duæ spinæ flavæ, in tertio apicali ferrugineæ, cylindricæ, sensim attenuatæ, inter se subparallelæ, singulæ in tertio basilari rectæ, mox sursum arcuatæ, omnino falciformes, apicem abdominis haud attingentes.

Pedes virides, viridi pilosi, tarsis flavescentibus, unguibus fortibus, arcuatis, apice fuscis ; aroliis laminaribus, albidis.

Alæ hyalinæ, irideæ, acutæ ; reticulatione pilisque viridibus, fimbriis flavidis ; stigmate flavescente, parum sensibili ; area subcostali angusta, pluribus venulis divisa.

Ala anterior venulis omnibus et furculis nigris, itemque insertione ramorum ; venulis costalibus plerisque simplicibus, multis in medio interno viridi interruptis ; radio puncto nigro notato ad basim ; una venula radiali interna, seu citra ortum sectoris radii ; sectore radii 10-11 ramis ; procubito furcato fere 3-4 areolis ultra ortum primi rami sectoris radii ; ramo cubiti longo, fere ad medium marginis posterioris desinente.

Ala posterior plerisque venulis viridibus, plerisque costalibus et radialibus, aliquot discalibus in quarto alæ externo, præcipue

gradatis externis et axillis furcularum marginalium breviter furcatis ; sectore radii 8-9 ramis.

Long. corp. ♀ 16 mm.
— al. ant. 24 »
— — post. 22 »

Patrie. Australie : Douglas Park, N. S. W. Deux échantillons dans ma collection, don du R. P. G. Hulstaert, M. S. C., à qui je me fais un plaisir de dédier l'espèce.

En comparant ces échantillons avec la description minutieuse que Mac Lachlan donne de son *armatus*, je n'ai pu nullement les rapporter à cette espèce. La structure de la tête, la couleur des palpes, la forme du prothorax, la couleur du corps et des ailes, la forme même des appendices ventraux, tout à fait comme une faux, avec son manche et sa lame, semblent différents.

Tableau de la famille des Nymphides

En conséquence, l'ensemble des espèces de cette famille connues jusqu'à l'heure actuelle est le suivant :

Tribu NYMPHINS Nav.

1. *Nymphes myrmeleonoides* Leach . . . Australie.
2. *Nesydrion fuscum* Gerst. . . . . Australie.
3. — *diaphanum* Gerst. . . . Australie.
4. — *pallidum* Banks, Queensland . Australie.
5. — *nigrinerve* Esb. Pet. Queensland . Australie.
6. *Austronymphes insularis* Esb. Pet. Ile Prince de Galles.

Tribu MYIODACTYLINS Nav.

7. *Myiodactylus osmyloides* Brau. . . . Australie.
8. — *extraneus* Walk. . . . Australie.
9. — *chrysopoides* Nav. . . . Australie.
10. *Osmylops placidus* Gerst. . . Peak Down, Australie.
11. — *sejunctus* Walk. . . N. et W., Australie.
12. — *armatus* Mac Lachl. . . . N. Australie.
13. — *Hulstaerti* Nav. Douglas Park, N. S. W. Australie.

Tribu NYMPHIDRINS Nav.

14. *Nymphydrion delicatum* Banks. Queensland, Australie.

Famille OSMYLIDES

7. **Spilosmylus vernans** sp. nov.

Corpus viridi-flavum, pilis flavidis.

Caput flavidum ; oculis fusco-testaceis ; antennis flavidis, flavo pilosis.

Abdomen inferne flavescens, lamina subgenitali acuta, testacea.

Pedes virides, viridi pilosis, femoribus posterioribus et tarsis flavescentibus.

Alæ acutæ, irideæ, hyalinæ, immaculatæ ; reticulatione densa, tota viridi ; stigmate insensibili ; pilis fimbriisque pallidis, tenuibus, brevibus ; venulis gradatis externis manifestis ; sectore radii 13 ramis.

Ala anterior area subcostali membrana flavo tincta, 5 striis longitudinalibus fusco-sanguineis distincta, costa ipsa præter tres ultimas strias, interdum radio etiam, fuscata ; procubito prope et ultra basim primi rami sectoris furcato ; bulla marginali flava, 5-6 striis subparallelis, fuscis fuscoque leviter limbatis, margini alæ subperpendicularibus nec confluentibus ornata.

Ala posterior angustior acutiorque, centridiis sectoris radii et procubiti manifestis.

Long. corp. ♂	9	mm.
— al. ant.	19'8	»
— — post.	17'8	»

Patrie. Inde Hollandaise : île Key petite. Deux échantillons dans ma collection, donnés par le P. G. Hulstaert, M. S. C.

Famille MYRMÉLÉONIDES

8. **Neuroleon hyalinus** sp. nov.

Caput fuscum ; clypeo, labro palpisque fulvo-flavis ; oculis fuscis ; antennis thorace brevioribus, fuscis, fulvo anguste annulatis, clava mediocri, brevi.

Thorax fuscus. Prothorax latior quam longior, antrorsum leviter angustatus ; superne duabus striis longitudinalibus ad latera ferrugineis, parum distinctis.

Abdomen totum fuscum, sublæve, pilis tenuibus rarisque.

Pedes flavo-fulvi, atomis fuscis respersi ; fusco setosi ; calcaribus testaceis, leviter arcuatis, primo tarsorum articulo longioribus.

Alæ angustæ, hyalinæ, irideæ, acutæ ; stigmate insensibili ; reticulatione densa, plerumque triangulari, fulva, nullatenus obscurata neve limbata ; area apicali angusta, sine venulis gradatis.

Ala anterior area costali angusta, venulis fere simplicibus ; area radiali 7 venulis internis ; sectore radii 12 ramis ; area apicali forte una venula interjecta gradiformi ; linea plicata anteriore vix indicata ; areis cubitali interna et postcubitali simplicibus.

Ala posterior similis, una venula radiali interna ; sectore radii 11 ramis ; area cubitali externa partim biareolata, cubitali angusta et postcubitali simplicibus.

Long. corp. ♀	28 mm.
— al. ant.	31'3 »
— — post.	28'2 »

Patrie. Afrique « Guinée franç., Fouta Djallon, Cercle de Pita, H. Pobeguin, 1910 » (Mus. de Paris).

9. **Nelees caligatus** sp. nov.

Caput flavum ; stria transversa fusco-nigra in vertice ; palpis flavis ; antennis flavis, inferne angustissime, superne distincte fusco annulatis ; clava forti, ovali, inferne subtota flava.

Thorax fusco-cinereus, fulvo indistincte striatus. Prothorax latior quam longior, superne striis longitudinalibus pallidioribus, media latiore ; pilis lateralibus albis.

Abdomen fusco-cinereum, superne aliquot maculis testaceis lateralibus parum definitis.

Pedes flavidi, albo pilosi, fusco setosi ; femoribus fascia anteapicali nigra cinctis ; tibiis posticis fusco punctatis ; calcaribus duos primos tarsorum articulos superantibus ; articulis tarsorum intermediis subtotis, ultimo ad apicem nigro.

Alæ hyalinæ, irideæ, acutæ ; reticulatione pallida ; venis venulisque fusco punctatis, maxime ad venularum insertionem et ad axillas furcularum marginalium ; stigmate albo.

Ala anterior area apicali venulis gradatis fere 5 fuscis instructa ; stigmate interne ad subcostam fusco limitato ; area radiali 7 venulis internis ; sectore radii 7 ramis ; area postcubitali simplice ; duabus striis obliquis fuscis distinctis, externa longiore ad rhegma, interna brevi, fere per duas areolas ad anastomosim rami obliqui cubiti.

Ala posterior area apicali angusta, sine venulis gradatis ; sectore radii 6 ramis ; striola fusca ad rhegma vix sensibili.

Long. corp.	12	mm.
— al. ant.	15'5	»
— — post.	13'9	»

Patrie. Afrique, « Somalie française, Djibouti, 24 mai 1904, coll. A. Bonhoure, 1909 » (Mus. de Paris).

Quatrième Section

La Section s'est réunie sous la présidence de M. le D^r Goris. Plusieurs membres de la Faculté catholique de médecine de Lille assistaient à la séance.

M. le D^r Vervaeck, retenu par des obligations professionnelles, s'est excusé de ne pouvoir, à son vif regret, assister à la séance.

La Section décide, en conséquence, que la discussion du mémoire de M. le D^r Vervaeck sur la *détermination de la Robusticité constitutionnelle* sera remise à la prochaine session.

M. le D^r Delassus, doyen de la Faculté de médecine de Lille, entretient la Section du *Traitement de l'Anthrax par l'ablation.* C'est la méthode qu'il emploie couramment. La technique est la suivante : Incision cruciale, relèvement, par dissection, des lambeaux, qui sont saisis par des pinces à griffes et détachés de la surface du « bourbillon ». La masse sphacélée est séparée par la pince et le bistouri, des parties profondes ; on ne provoque qu'une hémorrhagie capillaire facile à maîtriser. On se trouve alors devant un cratère plus ou moins vaste (dans un cas, de 31 centimètres de long sur 14 de large). On bourre de gaze iodoformée. Réapplication des lambeaux, qui sont suturés au crin de Florence, afin d'obtenir la réunion au moins des extrémités périphériques, la portion centrale étant en général comdamnée au sphacèle.

Les suites de cette exérèse sont remarquablement heureuses, bien plus satisfaisantes que celles des autres procédés, par simples incisions larges.

Un premier phénomène tout à fait frappant, et très apprécié — comme on pense — des opérés, c'est la sédation rapide de la douleur : après peu d'heures, elle a quitté le malade, le sommeil revient, et quelques mouvements locaux sont possibles. En même temps la température tombe, et l'état général se relève ; la suppuration, d'une abondance variable, s'élimine sans encombre avec détachement, dans les premiers jours, de quelques points sphacélés. Le bourrage à l'iodoforme est retiré le lendemain de l'opération.

M. le Professeur Delassus se trouve très bien d'un pansement au sérum sanguin (sérum de cheval); ce sérum facilite singulièrement la réparation, sans doute en raison d'une puissante action leucocytaire. Cette réparation est rapide, les éléments mortifiés sont promptement éliminés, et la plaie prend vite un aspect rouge, de bon aloi.

Comment s'opère cette cicatrisation ? Surtout par *rétraction* du tissu bourgeonnant, l'épidermisation périphérique se bornant à un mince liseré. Grâce à cette méthode d'exérèse, aussi sûre que rationnelle, le traitement est considérablement abrégé (du tiers au moins).

Cet exposé est appuyé par la relation succincte de quelques cas très démonstratifs ; il a été écouté avec le plus vif intérêt. M. le D^r^ Morelle confirme les conclusions de son éminent collègue de la Faculté de Lille, il a également obtenu d'excellents résultats par l'*ablation de l'Anthrax*, tout en s'écartant, par certains détails d'exécution (incision curviligne unique au lieu d'une incision cruciale), de la méthode qui vient d'être décrite. Comme lui, il obtient une réparation rapide et il relève également le fait, très frappant, de la prompte cessation de la douleur.

M. le Dr Delattre, prosecteur à la Faculté catholique de médecine de Lille, présente une étude traitant de la *structure de l'Axis humain.*

Le tissu osseux qui constitue le corps de l'axis et de l'apophyse odontoïde n'a pas l'aspect d'une masse spongieuse dont la trame est disposée sans organisation. Au contraire, ce tissu présente des travées osseuses bien visibles, leur orientation est toujours identique, et leur agencement réciproque est ici, comme pour toutes les autres pièces du squelette, la résultante des efforts de pression que supporte l'axis.

La structure intime de la seconde vertèbre cervicale suit cette loi générale de la biologie : « l'anatomie architecturale d'un os est déterminée par sa fonction ».

Il importe donc, avant d'étudier l'anatomie intérieure de l'axis, de préciser sa fonction physiologique.

L'axis est un pivot placé à l'extrémité céphalique de la colonne vertébrale. L'apophyse odontoïde représente l'axe, et ses surfaces articulaires supérieures peuvent être assimilées au plateau du pivot. Le crâne et l'atlas virent de droite ou de gauche autour de l'odontoïde, et leur poids est transmis aux deux surfaces articulaires supérieures par l'intermédiaire des condyles occipitaux et des masses latérales de l'atlas.

Il se produit donc à l'intérieur même de la seconde vertèbre cervicale une réunion des forces de pression dont l'origine et le trajet est primitivement double. Cette notion est capitale pour l'étude de l'axis.

L'architecture de l'axis a été étudiée sur toute une série de coupes pratiquées sur des os à l'état sec ou frais.

La disposition des travées osseuses montre comment celles-ci ont réalisé d'une façon parfaite le trajet théorique des lignes de forces tel que le demandait la fonction à remplir.

Deux coupes sont particulièrement instructives ; ce sont celles faites suivant des plans verticaux dont la trace passe les axes A et B de la figure (1).

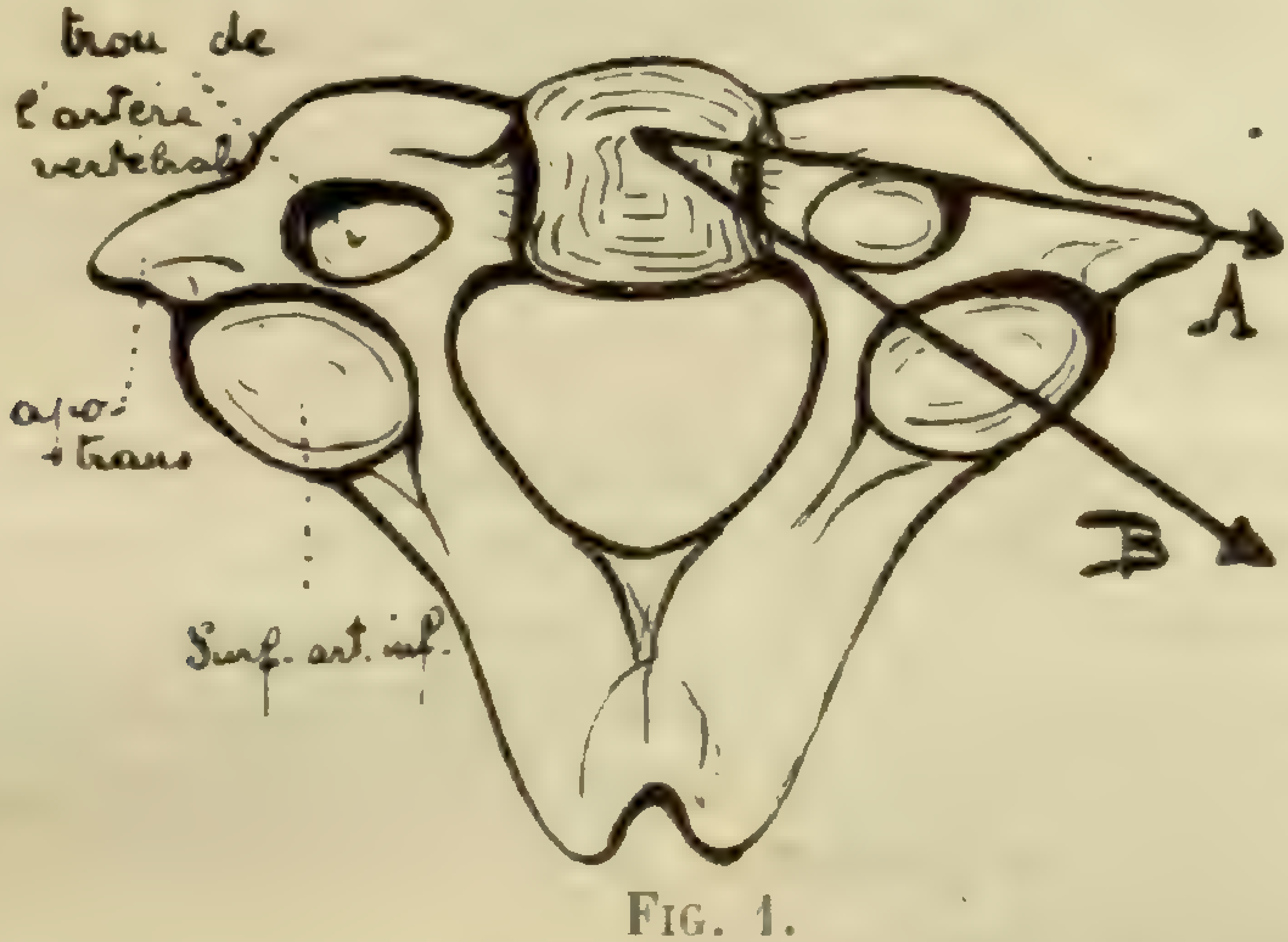


Fig. 1.

Vue inférieure de l'axis en projection horizontale ; A et B sont la trace dés plans verticaux de section (fig. 4 et 5).

La première coupe presque frontale intéresse l'apophyse odontoïde et l'apophyse transverse des deux côtés, elle est représentée sur la figure (4). Comme les deux apophyses transverses ne se trouvent pas dans le même plan frontal que l'apophyse odontoïde, nous avons été obligé de redresser la figure légèrement. La seconde coupe faite suivant l'axe B est plus oblique que la première, elle intéresse la surface articulaire inférieure d'un côté (fig. 5).

Ces deux sections choisies à dessein parmi bien d'autres permettent de faire les constatations anatomiques suivantes : Il existe dans l'axis comme dans tous les os longs des travées osseuses nettement différenciées et des zones de tissu osseux compact.

Tissu compact. — Indépendamment des épaississements normaux que l'on rencontre au niveau des diverses surfaces articulaires de l'axis, on remarque sur les tranches de section de cet os deux zones de tissu compact périphérique que nous avons nommées, pour faciliter la description, l'une la zone « odontoïdienne », l'autre la zone « pédiculaire ». Ces zones sont doubles ; il en existe une gauche et une droite.

Comme leur nom l'indique, les deux zones odontoïdiennes droite et gauche se trouvent situées sur l'apophyse odontoïde dont elles occupent les faces latérales du col. Elles sont réunies l'une à l'autre sur la face postérieure de la dent et leur ensemble figure un demi-cylindre creux. Les deux zones « pédiculaires » sont placées latéralement de part et d'autre du corps de l'axis à la naissance même de cette pièce osseuse vertébrale que l'on nomme « pédicule ». Ces zones pédiculaires, indivises à leur origine sur les flancs de la seconde vertèbre, sont séparées de chaque côté en deux parties par le canal osseux transversaire de l'artère vertébrale qui se coude sous la surface articulaire supérieure correspondante. La branche de bifurcation antérieure se dirige vers l'apophyse transverse (fig. 4), l'autre, postérieure, gagne la surface articulaire inférieure en se recourbant fortement (fig. 5).

L'étude embryologique de l'axis fournit une explication très satisfaisante de la présence de ces deux zones de tissu compact. Dans un précédent travail (1) nous avons insisté sur les diverses étapes des modifications extérieures de la seconde vertèbre cervicale. Or, il est intéressant de constater l'existence de tissu osseux densifié précisément aux deux points où l'axis a subi le maximum

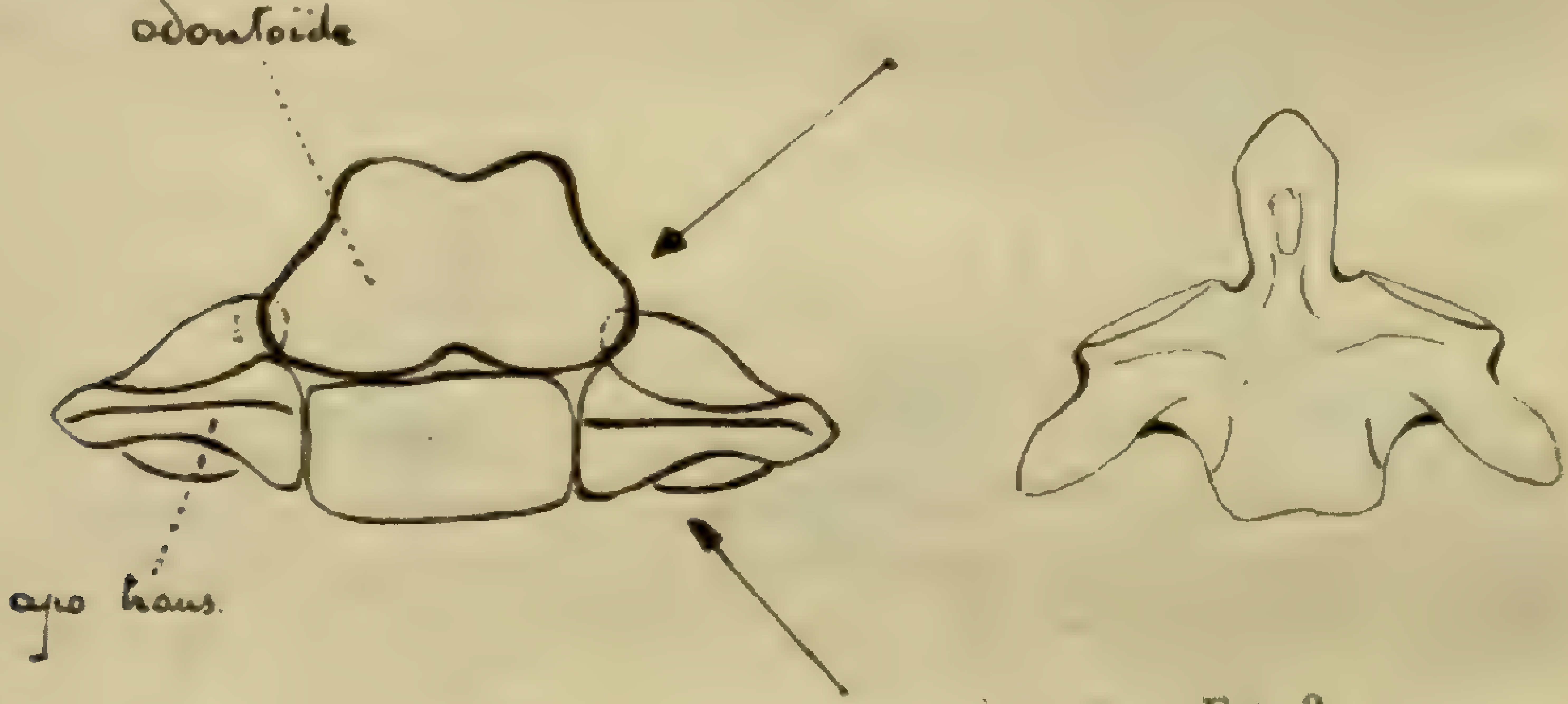


FIG. 2.

FIG. 3.

Stade initial (fig. 2) et terminal (fig. 3) du développement de l'axis.
Les deux flèches indiquent les points de refoulement de la coque osseuse
= tissu compact (fig. 4 et 5).

---

(1) *Le développement morphologique de l'axis.* — JOURNAL DES SCIENCES MÉDICALES DE LILLE, 9 octobre 1921.

de remaniement de sa forme : c'est-à-dire de part et d'autre de l'odontoïde et à la racine des apophyses transverses. Les phases initiales et terminales de ce développement de l'axis sont reproduites à dessein. Il est aisé de comprendre sur ces figures suggestives comment le tissu osseux, situé à la périphérie de l'axis, a été extérieurement refoulé et s'est condensé intérieurement en deux zones de tissu compact (fig. 2 et 3).

Celui-ci donne point d'appui aux différents pinceaux de travées osseuses.

Travées osseuses. — Elles sont réparties en deux systèmes rayonnants issus de chacun des points odontoïdien et pédiculaire signalés plus haut. Nous décrirons donc un système « trabéculaire odontoïdien », c'est-à-dire dépendant de la zone de tissu compact odontoïdienne, et de même un autre système « trabéculaire pédiculaire ».

Le premier, que l'on voit très nettement représenté sur les coupes passant par les axes A et B (fig. 4 et 5), prend naissance sur la face latérale droite ou gauche de l'odontoïde. Il comprend des travées « ascendantes » se réunissant à celles du côté opposé

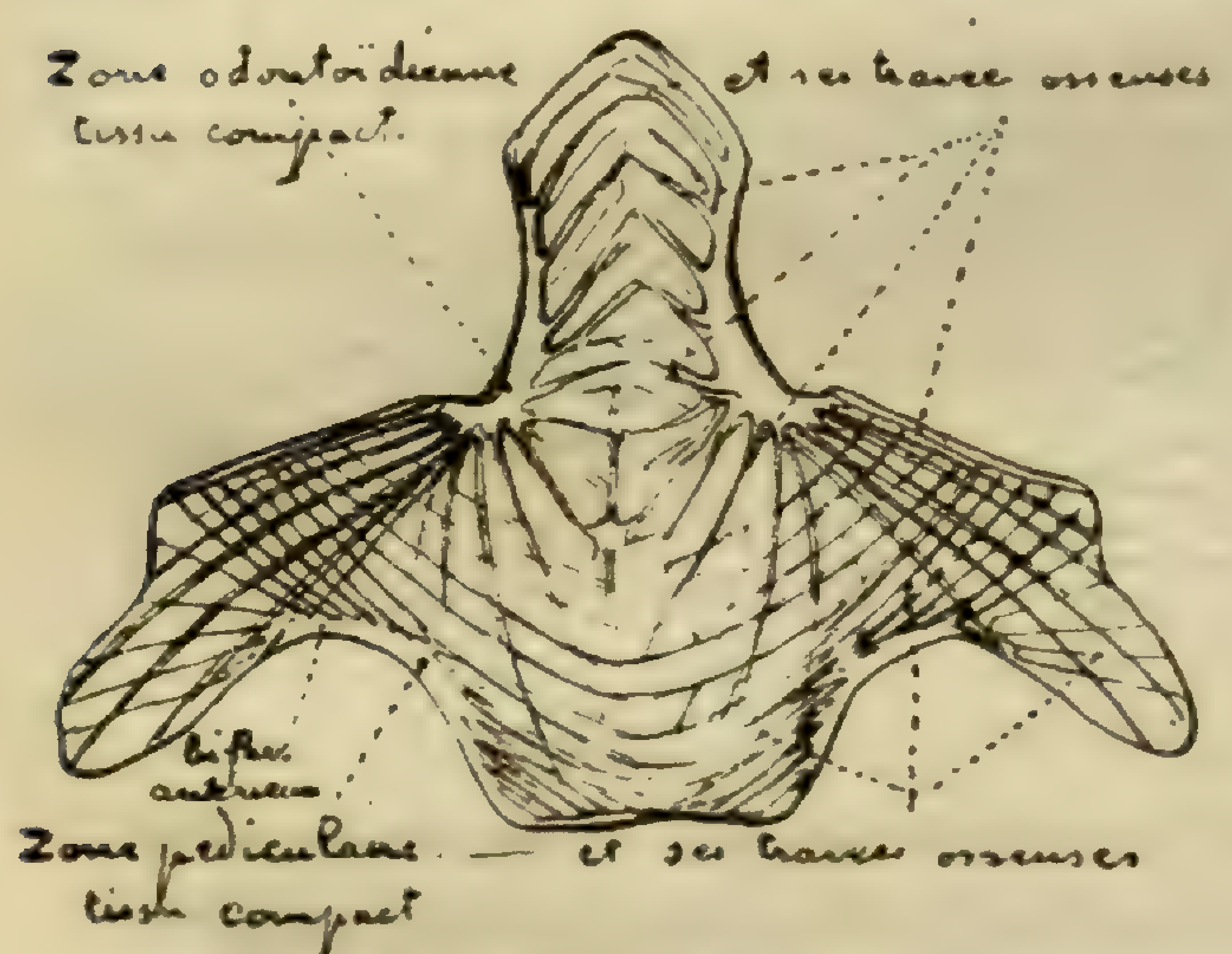

Zone odontoïdienne
tissu compact.
et ses travées osseuses
bifide antérieure.
Zone pédiculaire
tissu compact
— et ses travées osseuses

Fig. 4. *Coupe A.*

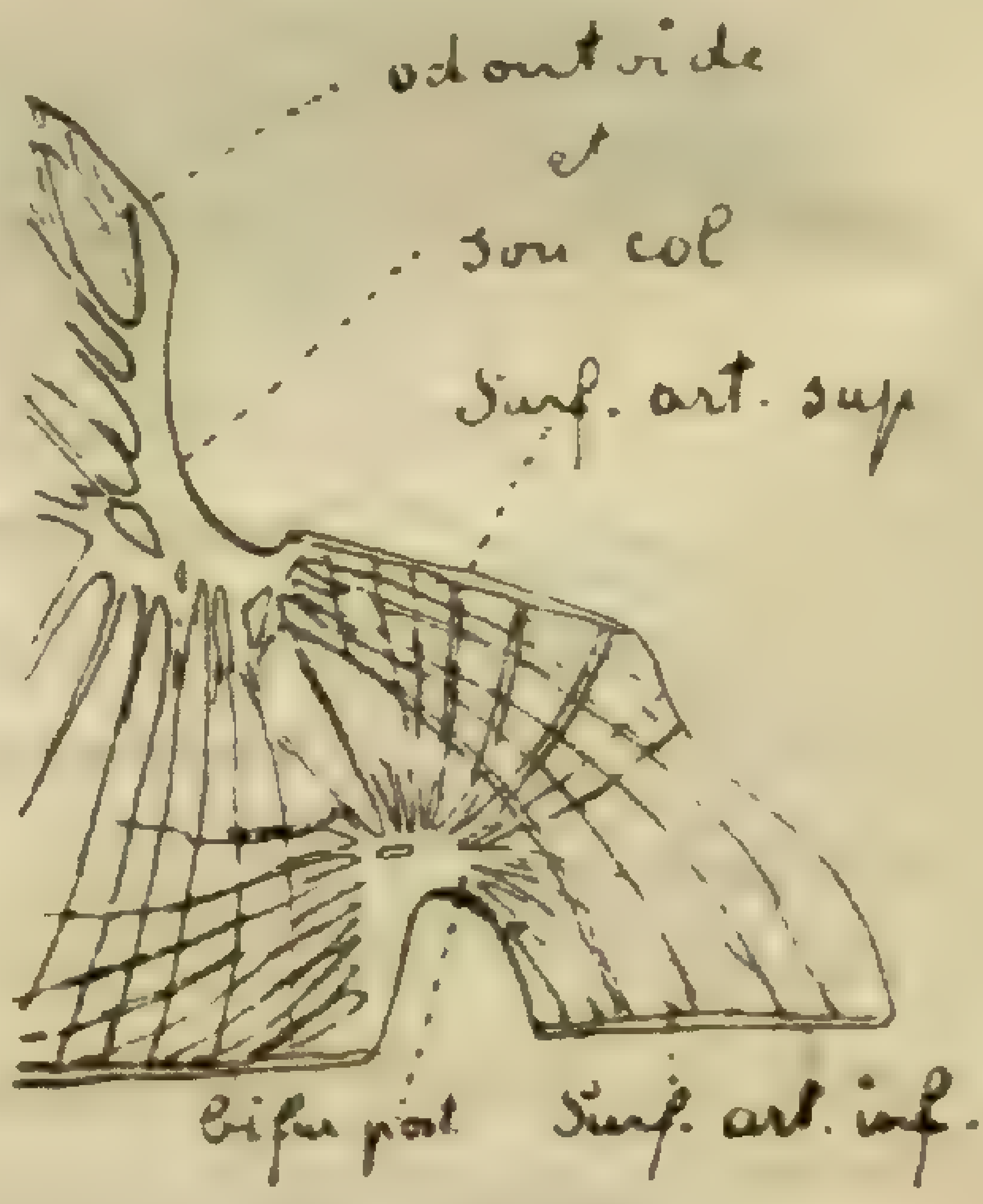

odontoïde
et
son col
Surf. art. sup
bifide post
Surf. art. inf.

Fig. 5. *Coupe B.*

Coupes verticales de l'axis passant par les axes A et B de la fig. 1.
On remarque les deux zones odontoïdienne et pédiculaire, celle-ci bifide, et les travées osseuses rayonnantes. Au centre, le noyau cartilagineux intervertébral.

en formant des ogives de plus en plus fermées à mesure qu'elles se rapprochent du sommet de la dent axoïdienne. Les plus inférieures se trouvent au contraire être « horizontales », et même quelques fibres « descendantes internes » vont se perdre vers la base de l'axis. Mais le plus grand nombre de ces travées osseuses descendantes forment un pinceau « oblique en bas et en dehors ». Ces travées se glissent sous la surface articulaire supérieure ; les plus externes sont tangentes à cette surface. Finalement elles se recourbent en crosse plus ou moins arrondie, et descendent soit les plus antérieures vers le sommet de l'apophyse transverse correspondante, soit les plus postérieures vers la surface articulaire inférieure du même côté. Ainsi donc, le système trabéculaire odontoïdien constitue un éventail de fibres rayonnantes, où nous avons isolé, pour la commodité de la description, des fibres ascendantes, horizontales, descendantes internes, obliques en bas et en dehors.

Les deux systèmes odontoïdiens droit et gauche réunis dans un même schéma (fig. 4), représentent assez bien une arche sur laquelle reposent les deux plateaux du pivot axoïdien, c'est-à-dire les deux surfaces articulaires supérieures.

Le second système de travées osseuses qui dépend de la zone de tissu compact pédiculaire est indivis dans sa partie inférieure comme la zone pédiculaire qui lui donne appui, puis il se divise en deux pinceaux de travées osseuses, l'un « transversaire », l'autre « articulaire inférieur ».

La partie commune comprend une série de fibres osseuses qui prennent naissance à la racine du pédicule de l'axis. Celles-ci sont « obliques en bas et en dedans », et se terminent les unes sur la surface inférieure ou base de l'axis, les autres en se réunissant à celles du côté opposé. A cette partie commune font suite les pinceaux transversaire et articulaire inférieurs, séparés l'un de l'autre par le canal osseux de l'artère vertébrale.

Ils présentent tous deux des travées « ascendantes », qui se terminent perpendiculairement sur la surface articulaire supérieure du même côté, en s'entrecroisant avec les travées descendantes externes issues du système odontoïdien. Enfin les travées les plus externes se dirigent vers l'extrémité de l'apophyse transverse ou vers la surface articulaire inférieure, suivant qu'elles appartiennent au pinceau transversaire ou articulaire inférieur.

Comme le système trabéculaire odontoïdien, l'ensemble des travées pédiculaires rayonne en éventail à partir du tissu compact qui lui donne naissance ; mais toute la série de ses lamelles osseuses présente en général des courbures opposées à celle du premier système. Il importe de remarquer la disposition toute spéciale des travées sous les surfaces articulaires supérieures. Celles-ci reposent sur les travées « odontoïdiennes » qui glissent tangentiellement, tandis qu'elles s'appuyent sur les travées « pédiculaires » qui se présentent normalement à elles. Enfin il résulte aussi de ces descriptions que les deux zones de tissu compact de l'axis sont également analogues, comme fonction, au tissu compact diaphysaire des os longs, elles servent de relais aux travées osseuses des différents systèmes. Ce tissu organisé du corps de l'axis se continue de part et d'autre du trou vertébral à l'intérieur des arcs neuraux. Les travées osseuses qui prennent part à la constitution des lames vertébrales naissent sur les surfaces articulaires inférieures de l'axis ; elles se rendent de là aux bords supérieur et inférieur des lames, où elles prennent relais avant de gagner l'apophyse épineuse.

La partie centrale du corps de l'axis où confluent un certain nombre de lamelles osseuses ne présente pas une organisation nette ; elle a l'aspect du tissu spongieux ordinaire. Toutefois, sur les sections exactement médianes, on remarque d'une façon constante l'existence d'une cellule osseuse surmontée d'un mince canal vertical qui se poursuit dans l'odontoïde (fig. 4). Ces formations sont les restes du disque intervertébral et de la notocorde encerclés de tissu osseux.

Telles sont, brièvement exposées, les constatations anatomiques que nous avons faites. Il était intéressant de montrer l'influence du développement de l'axis sur sa constitution intime et d'esquisser les grandes lignes de son anatomie architecturale.

M. le D^r Dubois-Verbrugghen (Bruxelles) donne la relation de trois observations cliniques dont il dégage d'utiles enseignements :

I. Il y a un peu plus d'un an, en mai 1920, lors du 14ᵉ Congrès des Médecins de Langue française, notre excellent confrère, le Docteur Grenet de Paris, en son nom et au nom de son collègue, le Docteur Drouin, fortement appuyé par le Professeur Rénon, faisait une communication sur les sels de terres rares, de la série du Cérium, dans le traitement de la Tuberculose pulmonaire chronique.

Comme vous le savez et comme le rappelle le Professeur Denigès, on appelle métaux terreux ceux dont les oxydes, insolubles dans l'eau, ont l'aspect et les propriétés physiques grossières de la terre végétale, surtout de celle qui provient de certains sols crayeux ou argileux, et l'on désigne sous le nom de terres ces oxydes eux-mêmes. Les unes sont des terres communes comme l'alumine, d'autres des terres rares comme l'oxyde de Cérium, d'autres des terres nobles comme la Thorine qui à haute température ont un pouvoir émissif lumineux extraordinaire et furent, pour cette raison, appliquées à l'éclairage par Auer von Welsbach.

Quand on étudia, à fond, l'oxyde de Cérium impur, on constata qu'il contenait divers corps :

le *Cérium* vrai, dont le nom est tiré de la planète Cérès, qui venait d'être signalée, au moment du début des études en 1803 ;

le *Lanthane,* de lanthanéin = se cacher, car il échappe souvent à l'isolement et à l'identification ;

le *Didyme,* de didumoy = les jumeaux, parce que Mosander l'envisageait comme un frère jumeau du Lanthane, mais que Auer von Welsbach a dédoublé en deux véritables jumeaux : le Néodyme aux sels roses, le Préséodyme aux sels verts.

Actuellement, grâce aux travaux du Professeur Urbain (France), les métaux correspondant à ces terres sont au nombre d'une quinzaine que l'on divise en groupe cérique, en groupe terbique et en groupe ytterbique, et ils comprennent :

Le Cérium, le Lanthane, le Préséodyme, le Néodyme, le Samarium (de Delafontaine), l'Europium (de Demarçay), le Gadolinium, le Terbium, le Dysprosum, le Néo-Holmium, l'Yttrium, le Néo-erbium, enfin le Lutecium et le Néo-ytterbium, isolés par Urbain et dont le mélange constitue l'ancien Ytterbium de Marignac.

Tous ces renseignements sont extraits d'un article du Professeur

Denigès dans la GAZETTE HEBDOMADAIRE DES SCIENCES MÉDICALES, de Bordeaux, 27 juin 1920.

Tandis que la chimie s'occupait du Cérium en vue des applications industrielles, Job en 1902 employait les sels de Cérium à l'oxydation du glucose en solution alcaline et constatait de grandes analogies avec les processus biologiques.

Drouin l'appliquant aux animaux supérieurs, à raison d'un 1/2 milligramme par kil. et par 24 Hs en injections intra-veineuses, résume ainsi ses observations :

1° Augmentation du poids des animaux ;
2° Augmentation de l'activité des diastases de l'organisme ;
3° Augmentation du nombre des leucocytes, surtout des mononucléaires ;
4° Augmentation de la résistance globulaire ;
5° Apparition d'hémolysines dans le sérum (A. Drouin et Melle S. Ledebt).

Action sur les microbes : A la dose de 1 pour 50.000 ou de 1 pour 10.000 ajoutés aux bouillons de culture, ces sels favorisent le développement de la plupart des bactéries. A des doses de 1 pour 2.000 ou de 1 pour 1000 ils sont antiseptiques ; mais même à la dose où ils paraissent favoriser le développement microbien, ils modifient en même temps les propriétés biologiques des microbes (augmentation des pigments du bacille pyocyanique. — A. Frouin et Melle S. Ledebt).

Action sur le bacille tuberculeux : Le bacille se développe moins abondamment et renferme moins de graisse.

Expérimentalement, chez les cobayes et les lapins tuberculeux, l'injection des sels de terres rares a assuré une survie très marquée des animaux et a déterminé une réaction sclérosante des tubercules.

Voilà donc les produits qui, spécialisés sous le nom de Pélospanines par la Maison Fournier et de Géodyl par Robert et Carrière, étaient annoncés par le Docteur Grenet, confident des expériences de Drouin, comme devant rendre les plus grands services dans la Tuberculose pulmonaire chronique. Ils ont été appliqués, par après, à toutes les manifestations cutanées, osseuses et ganglionnaires de la tuberculose.

Ce produit, je l'ai, quant à moi, appliqué jusqu'à présent dans une vingtaine de cas ; je ne vous en citerai que deux pour ne pas abuser de votre attention.

1. ADÉNITE CERVICALE

Adénite : Femme de 35 ans ; état général excellent, présente au côté gauche du cou un paquet ganglionnaire gros comme le poing. On a essayé différentes huiles créosotées, le naphtol, la pâte de Callot, en même temps qu'on soutenait les forces de l'organisme par le cacodylate à doses variables, la cacodyline, le sucrénol ; en un mot, tout a été fait, y compris 6 mois de sanatorium avec héliothérapie, le tout sans aucun résultat sensible. C'est alors qu'on tenta le Géodyl avec assez peu d'enthousiasme vu les échecs éprouvés antérieurement. Or, au bout de deux séries de piqûres intra-veineuses à 5 cc. par ampoule, le paquet ganglionnaire avait disparu.

2. TUBERCULOSE PULMONAIRE

Une femme se présente chez moi, 31 ans, fort amaigrie, elle est tombée à 40 kilogr. A l'examen : matité aux deux sommets et matité étendue à la base droite. Pas d'épanchement. Mais dans les deux poumons tous les signes auscultatifs de la tuberculose pulmonaire — température, à 3 h. de l'après-midi, 39,5 et je vous présente, ci-joint (¹), une radiographie de ses poumons au moment où elle se présente à ma consultation. Comme vous le voyez, ses poumons sont farcis de tubercules. Après 8 jours de repos au lit, la température étant tombée à environ 37,5, je lui fais tous les deux jours, une injection intra-veineuse de Géodyl ; la première fois 1 cc., puis une série de 4 piqûres de 2 cc., puis chaque fois 5 cc. Aucune réaction ne se produit au point de vue thermique, mais dans l'état de la malade c'est une véritable

---

(¹) La radiographie a été montrée par l'auteur aux membres de la Section.

résurrection, et au bout d'un temps relativement court je l'autorise d'abord à se relever, puis à se remettre tout doucement aux travaux du ménage, en évitant les besognes fatigantes, bien entendu.

Chose impressionnante pour qui débute dans l'emploi du Géodyl : aussitôt que l'aiguille est entrée dans la veine et que le sang s'écoule dans la seringue, il est caillé en fins grumeaux et ce sont ces grumeaux qu'on réinjecte avec le médicament dans l'arbre circulatoire, et ces grumeaux non seulement se dissolvent, mais le sang devient incoagulable in vivo. — Pendant les vacances, cette femme, qui allait très bien et qui était arrivée à 43.300 kgs, me demande l'autorisation d'aller passer quelques semaines à la campagne. Elle y a fait naturellement des imprudences comme tout malade qui échappe à la surveillance de son médecin,et est revenue maigrie, fiévreuse 38-39 et à bout de forces. — Nouveau repos au lit, nouvelles piqûres progressives de Géodyl, nouvelle résurrection. La malade est à présent en bonne voie, je ne dirai pas de guérison, le terme est trop fort, mais d'une amélioration que je n'aurais pu obtenir, je crois, ni aussi rapide, ni aussi réconfortante par aucun autre médicament.

II. RADIODIAGNOSTIC D'UNE SUPPURATION QUI SEMBLAIT STERNALE ET QUI ÉTAIT PRÉPLEURALE

Le cas que j'ai l'honneur de vous présenter est celui d'un ouvrier âgé de 45 ans, qui, il y a quelques mois, vint me consulter pour une adénite suppurée dans l'aisselle — extirpation du ganglion, guérison. Peu après il revient portant dans le haut du sternum, à gauche, une plaque rouge, avec centre surélevé — douleur seulement en région sternale peu de jours après, apparition d'un orifice et suppuration jaune — abcès osseux tuberculeux. Cependant malgré les soins appropriés : huile iodoformée,pâte de Callot, cet orifice continue à donner énormément, et des sondages prudents ne fournissent aucun renseignement sur la direction d'où provient le pus. Je fais une plaque radiographique qui ne me donne aucun renseignement. Sur ces entrefaites, j'enfonce, par l'orifice, un drain en caoutchouc qui me semble descendre verticalement derrière le sternum et qui me ramène, par aspiration, 100 gr. de pus. Or, aucun symptôme ne pouvait faire supposer que la poche purulente se trouvait dans le médiastin antérieur. Alors, je replace mon drain et, par le drain, j'injecte de la pâte de Beck qui est, comme vous savez, de la vaseline contenant 33 % de Bismuth et je fais une nouvelle radiographie, qui cette fois fut autrement concluante (fig. 1). Ma sonde, après être descendue derrière le sternum sur une longueur environ de 2 cm., décrivait une grande courbe à concavité supérieure, puis s'avançait transversalement vers l'aisselle et arrivait à une poche dans laquelle le bismuth s'accumulait. De même que, quand sa poche était remplie de pus, le malade se plaignait du bras, de la poitrine et du dos, de même, quand je lui injectais de la pâte de Beck et que j'insistais un peu pour injecter davantage, les mêmes douleurs apparaissaient.

J'ai pensé qu'on pourrait évidemment, au niveau de la poche, sectionner une ou deux côtes sur un espace de quelques centimètres et drainer ainsi la suppuration, mais mon malade habite un quartier qui n'est guère salubre, il doit se rendre, chaque jour, à son atelier pour y gagner le pain quotidien ; en conséquence, j'ai résolu de lui faire suivre une cure de Géodyl.

III. UN ULCUS MÉDIOGASTRIQUE

Le 27 mai 1920, j'étais appelé en consultation auprès d'une malade pour troubles bizarres. J'ai trouvé une femme de 45 ans, les cheveux tout blancs, d'une maigreur squelettique et la peau blanche comme l'oreiller sur lequel elle reposait. Le ventre flasque me fait percevoir, dans la région de la petite courbure, une tuméfaction légèrement douloureuse et j'ai cru, en ce moment, vu l'état lamentable de la patiente, à un cancer de l'estomac. Comme antécédents, elle souffrait de l'estomac depuis une trentaine d'années, avait pesé 38 kil. en 1911, et elle avait eu, à différentes reprises, des crises de ce genre-ci, mais jamais aussi fortes. Je demandai au médecin traitant l'autorisation de revenir l'après-midi pour faire un tubage ; quand je revins, la famille me montra deux récipients : l'un contenait le produit d'une hématémèse considérable, l'autre des selles noires, de la couleur du goudron, caractéristiques de melaena. Le sous-nitrate de Bismuth étant hors de prix, je le remplaçai par du sulfate de Ba chimiquement pur, à haute dose, et mis ma malade tout d'abord à une diète absolue, puis à un régime sévère. Ses forces revenaient lentement, quand, au bout de quelques jours, je lui fis des injections intra-veineuses d'extrait de Pancréas, recommandées par Maurice Loeper dans les cas de cancer de l'estomac. A partir de ce moment les progrès furent excessivement rapides ; la malade reprit de l'embonpoint, reprit de l'appétit et son chimisme gastrique ayant révélé une hyperchlorhydrie manifeste, je continuai les alcalins et le pancréas intra-veineux.

Cependant les faits venaient incriminer mon diagnostic :

1° La malade se remettait complètement ;

2° Quand on cessait l'extrait de pancréas, il n'y avait pas de réapparition d'hémorragie ou de douleur comme le signale Loeper dans ses publications. Enfin la malade put sortir et vint, chez moi, se faire examiner aux Rayons X. Voici ce que j'ai trouvé :

Estomac nettement biloculaire (voir fig. 2), avec la poche supérieure séparée de la poche inférieure par un long tuyau excessivement mince. Il fut convenu, à ce moment-là, qu'aussitôt que ses forces le permettraient je l'opérerais. Or, les douleurs avaient complètement disparu ; j'avais augmenté considérablement son régime, si bien qu'elle en était arrivée à manger de tout, y compris du bouilli, des carbonades, de la salade, toutes choses qui théoriquement ne pouvaient pas passer au moins sans douleurs considérables par la cylindroïde, large comme un crayon, allant de la poche supérieure à la poche inférieure.

Je décidai un nouvel examen radiologique et voici ce qu'il m'a donné : A l'arrivée de la malade à jeun, prise de Ba ; il y a toujours l'estomac biloculaire, l'image n'est pas identique à celle de la première fois, mais si possible le chenal reliant la poche supérieure à la poche inférieure est encore plus étroit qu'auparavant.

Couchée, la malade présente une image à peine différente, je lui fais alors une piqûre d'atropine (1 milligramme), et voici ce que devient son estomac : il y a une poche supérieure, petite et puis un espace clair et puis un estomac qui a à peu près le calibre d'un estomac normal (fig. 3). Il y a donc certainement ici un ulcus haut situé, capable de sommeiller pendant longtemps sans

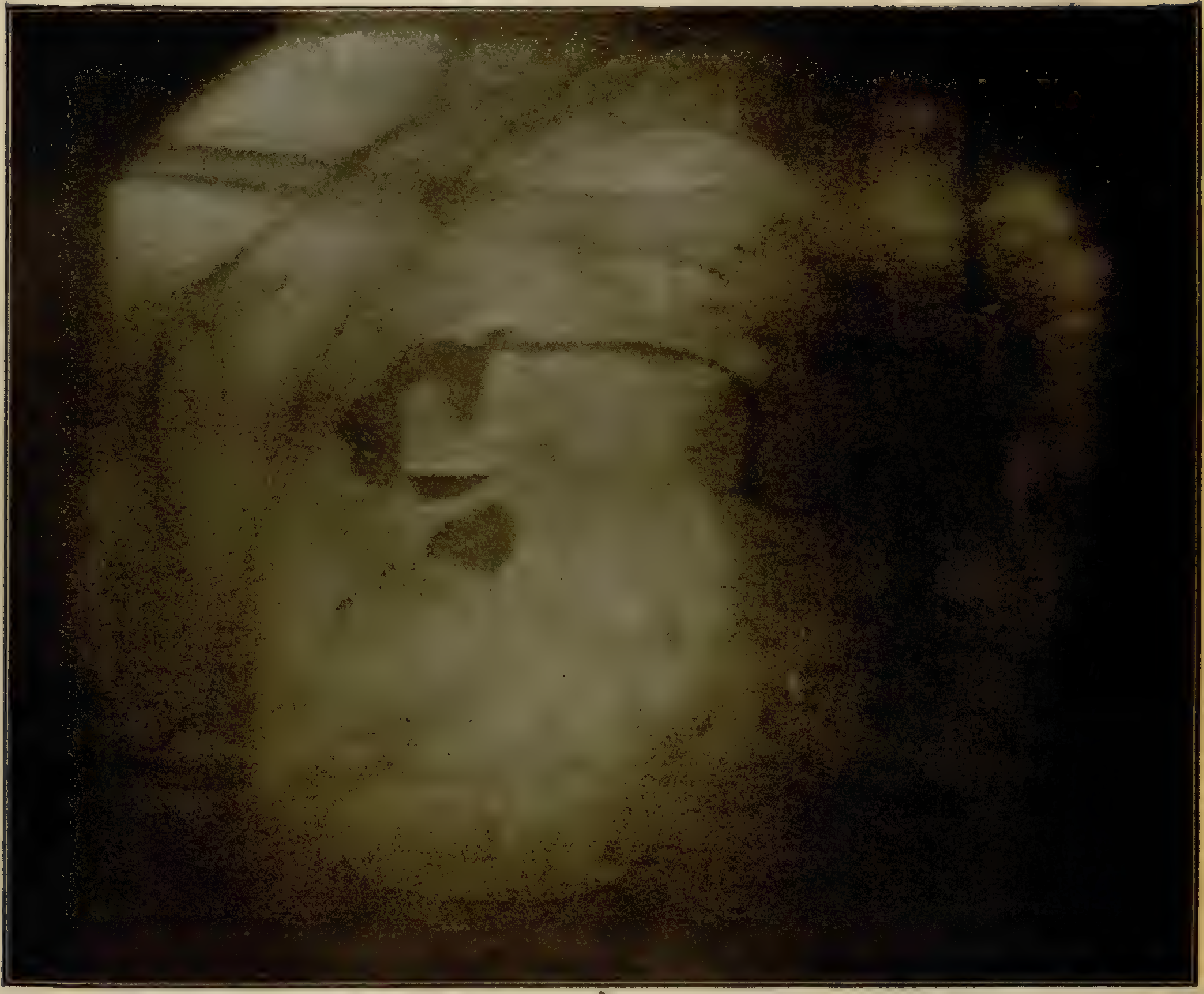


Fig. 1.

FIG. II.

gêner beaucoup le passage du bol alimentaire, et puis une portion inférieure qui, sans doute par suite de la présence de l'ulcus, peut se spasmodier très facilement et qui néanmoins n'empêche pas le parfait fonctionnement de l'estomac dans les périodes intercalaires de l'ulcus.

Ces intéressantes communications donnent lieu à quelques échanges de vues. Quelques réserves sont émises quant aux injections intra-veineuses (Observation 3) qui, exécutées, amènent de sérieux inconvénients (douleurs, nodosités...); peut-être — suggère un membre — conviendrait-il de ne recourir aux injections intra-veineuses que quand les injections hypodermiques n'ont pas d'efficacité.

Quant au traitement par les produits de terres cériques, il convient, pense M. le Dr Morelle, tout en tenant note du résultat favorable observé dans le cas de M. le Dr Dubois-Verbrugghen, d'être encore très circonspect avant d'affirmer une efficacité. Dans un cas où une plaie tuberculeuse du pouce, par infection externe, avait amené de multiples métastases cutanées, tendineuses ou osseuses, et des symptômes de névrite intense, le traitement, qui est en cours, a amené une cessation quasï complète des douleurs, et une amélioration de l'état des foyers malades. Encouragé par cet heureux résultat, M. le Professeur Morelle allait traiter d'autres malades par cette méthode, lorsqu'il eut connaissance d'une communication de Hudelo à la SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE DERMATOLOGIE (réunion de Bordeaux, mai 1921). Cet auteur avait fait une première publication sur le traitement de certaines tuberculoses ou tuberculoses cutanées en novembre 1920, et n'avait noté alors que le beau côté de la méthode. Actuellement, six mois d'expérimentation supplémentaire lui font déclarer qu'aucun des vingt-quatre lupus tuberculeux et qu'aucun des sept lupus érythémateux ainsi traités n'a été guéri. Par contre, sur 43 cas, dix, soit près de 25 %, ont présenté des réactions, parmi lesquelles six, soit près de 15 %, peuvent être qualifiées de vraiment graves : ces réactions consistaient soit en extension du mal local, soit en phénomènes du côté de la poitrine. Ces réactions ont été assimilées par Thibierge à celles que l'on observait lors du premier essai d'emploi de la tuberculine ancienne de Koch. On voit donc que cette méthode nouvelle présente des dangers sérieux qu'il est bon de connaître, et elle ne paraît pas, dans l'état actuel des choses, devoir être recommandée.

Les applications thérapeutiques de l'Émanation du Radium, par le Dr Matagne.

L'on dit couramment que le Radium émet trois sortes de radiations : les rayons α, les rayons β, et les rayons γ. Cette affirmation est erronée, et je tiens à la rectifier. En réalité, le Radium n'émet qu'une sorte de rayons, les rayons α. Mais concurremment avec ce rayonnement, il dégage d'une façon constante un gaz que l'on a dénommé l'Émanation du Radium, et qui est le premier produit de la transformation de ce corps. Ce gaz, comme tous les autres produits de transformation de la série du Radium, est un corps simple, auquel les chimistes ont donné le nom de Niton, et qui s'exprime par le symbole Nt.

Il n'est doué d'aucune affinité chimique, et possède un spectre caractéristique spécial. Lui-même n'émet d'autres rayons que les rayons α. Mais il se transforme à son tour, et en se détruisant, il dépose sur les parois du récipient qui le renferme, un dépôt solide, radioactif, formé de corps nouveaux et instables, dénommés les Radium A, B, C, D, E, F. Ce sont ces dépôts radioactifs, et particulièrement le Radium B et C, qui donnent naissance aux rayons β et γ. Le Niton lui-même ne traverse pas les parois solides. Cette mise au point est nécessaire pour comprendre que l'émanation du Radium possède des propriétés thérapeutiques identiques, je ne dis pas analogues, mais identiques à celles d'un appareil de Radium. La durée de l'émanation est de 3,85 jours, ce qui veut dire qu'après ce laps de temps, elle a perdu la moitié de son pouvoir radioactif ; après une nouvelle période de même durée, elle perd à nouveau la moitié de la radioactivité restante, n'en conservant par conséquent plus que le quart, qui continue à décroître dans la même progression. L'émanation se liquéfie à − 62°, et se solidifie à −71°. On la recueille en l'extrayant par le vide d'une solution de sel de Radium, puis en la condensant par le froid dans l'air liquide. Certains corps poreux, et notamment le charbon de bois, absorbent l'émanation. Les ampoules contenant de l'émanation n'arrivent à l'équilibre radioactif qu'au bout de trois heures, moment où la quantité de rayonnement formée est égale à celle qui se détruit, et pendant ce temps l'ampoule n'émet aucune radiation ; mais à partir de ce moment, le rayonnement extérieur est identique à celui d'une ampoule contenant un sel du Radium.

Les autres corps radioactifs, le thorium, l'actinium, le polonium dégagent également des émanations, mais celles-ci ont une vie trop courte pour que l'on puisse songer à les utiliser en thérapeutique.

Les substances radioactives, et en particulier le Radium, sont répandues partout à la surface de la terre ; ce dernier corps s'y trouve en général à l'état de dilution extrême ; et par suite, l'émanation se retrouve dans l'air, dans le sol, dans les eaux. Un mètre cube d'air en contient en moyenne 0,05 millimicrocurie. La radioactivité atmosphérique varie d'après les conditions météorologiques. Les émanations radioactives se dégagent du sol en quantité variant avec sa perméabilité, son humidité et la pression atmosphérique. La sécheresse du sol et la baisse barométrique permettent le dégagement de l'émanation accumulée dans le sol ; la pluie prive l'atmosphère de son émanation.

La plupart des roches, surtout les roches éruptives, en contiennent ; quelques-unes sont suffisamment radifères pour permettre l'extraction industrielle du Radium ; c'est le cas des minerais uranifères : l'autunite, qui est un phosphate d'urane et de chaux hydraté : la carnotite, un urovanadate de potasse ; la pechblende, un oxyde d'urane et d'autres métaux complexes, argent, plomb, cuivre, nickel, cobalt, terres rares. Une terre particulièrement active est le fango, argile à base de chaux et de fer, constituant un limon déposé par les sources chaudes de Battaglia, en Italie ; cette matière émet de l'émanation du Radium.

L'eau de pluie et l'eau distillée ne contiennent pas d'émanation ; mais l'eau de la mer et des fleuves en contient ; l'eau des sources davantage, et les sources thermales plus encore.

Combien n'a-t-on pas discuté autrefois sur les propriétés des eaux minérales, d'autant plus que parmi les plus fréquentées par les curistes, il s'en trouvait d'une pureté déconcertante, presque privées de tout sel minéral ; des médecins niaient leur efficacité, ou l'attribuaient à la suggestion. Le grand chimiste Liebig, chargé de faire l'analyse des eaux de Gastein, avait conclu que ces eaux ne contenaient aucun principe chimique capable d'expliquer leur efficacité ; il ajoutait cependant cette réserve : peut-être faut-il rechercher du côté de ses propriétés physiques la raison d'être de son action. A un demi-siècle de distance, il pressentait dans quelle direction les recherches devaient être dirigées.

L'activité des eaux minérales est dué, tantôt au Radium qu'elles tiennent en dissolution, tantôt à l'émanation qu'elles contiennent ou qui se dégage du griffon, et bien souvent les gaz accumulés autour du griffon sont plus actifs que l'eau. Ce que nous avons dit au sujet de la durée de vie de l'émanation nous explique pourquoi les eaux prises à la source sont vivantes, et seules actives, et pourquoi transportées elles sont mortes, inefficaces.

Les eaux les plus radioactives sont les eaux thermales d'Ischia, dans le golfe de Naples ; leur température est de 57° ; elles contiennent 26,4 milligrammes minute d'émanation de Radium par 10 litres d'eau. Les eaux de Gastein, d'une thermalité de 36°, contiennent 11 milligrammes minute d'émanation. A Carlsbad, la source dite Eisenquelle, dont la température est de 8°,4, contient 3,87 milligrammes minute d'émanation. En France, les eaux les plus radioactives sont celles de La Bourboule ; leur température est de 60°, et elles contiennent 3,12 milligrammes minute d'émanation.

Les sources les plus riches en gaz sont tout d'abord celles de Gastein, qui contiennent le chiffre énorme de 69,6 milligrammes minute d'émanation, puis celles de :

La Bourboule,	19,3	milligrammes	minute	d'émanation ;
Luchon, source Bordeu,	18,36	»	»	»
Plombières (source Vauquelin T 69°)	10,06	»	»	»
Carlsbad,	6,6	»	»	»

Le milligramme minute est la quantité d'émanation produite par un milligramme de bromure de Radium en une minute. Le microcurie représente environ 8000 (exactement 7992) milligrammes minute Radium-élément. Les Allemands ont souvent compté par unités Mache ; un milligramme minute représente 312 unités Mache.

Voilà bien l'application la plus antique des propriétés thérapeutiques de l'émanation. Les Grecs et les Romains en attribuaient l'origine aux bienfaits des dieux, auxquels ils édifiaient des temples à proximité des sources. La foule y affluait ; de même que nous nous rendons « aux Eaux », eux, selon leur expression, se rendaient « ad aquas ». Les jeux mêmes n'y manquaient pas plus qu'aujourd'hui. Sur ce chapitre, rien n'est changé, sauf que nous avons découvert le secret d'une action jusque là mystérieuse.

Le secret de la radioactivité étant dévoilé, il n'y avait plus qu'un pas à franchir pour donner cette propriété aux eaux qui en étaient dépourvues. A Bussang, un sel insoluble de Radium introduit dans le griffon suffit à rendre ses eaux radioactives.

Mettre partout l'émanation à la portée des malades n'était qu'un jeu. Toute eau peut être radioactivée, en y faisant dissoudre l'émanation produite par des sels insolubles, ou mieux encore en se servant d'une solution de sel soluble contenue dans une coupelle de platine, car le verre est attaqué par le Radium. Un système de soufflerie avec barboteur enlève le gaz qui se dégage de la solution et l'entraîne dans l'eau qui devient ainsi radioactive, et peut contenir de l'émanation en quantité plus ou moins considérable, selon l'usage interne ou externe auquel elle est destinée. Ces eaux, à l'étranger beaucoup plus que chez nous, sont très employées. On les utilise en boisson, en bains, en inhalation, en injection, en compresses. On a donné le nom d'émanatorium à une installation très importante, dégageant le gaz émanation dans une salle hermétiquement fermée, où plusieurs malades peuvent faire leur cure simultanément. Ces diverses méthodes ont donné des résultats qui méritent d'attirer notre attention. La goutte, les arthrites gonococciques, le rhumatisme, et surtout le rhumatisme déformant, la sciatique et les névralgies sont les affections justiciables de ces méthodes de traitement.

Une autre application extrêmement importante de l'émanation a vu le jour pendant la guerre. Employée pour la première fois par Stephenson, à Dublin, en 1914, elle s'est répandue presque aussitôt en Angleterre et en Amérique, puis en France. L'émanation est recueillie dans de minuscules tubes de verre de 10 à 15 millimètres de long, et de moins d'un demi-millimètre de diamètre, de façon à pouvoir être introduits à l'intérieur d'une aiguille à injections hypodermiques en platine iridié ; ce tube minuscule a une capacité de 1 millimètre cube. On pourrait à la rigueur y introduire un curie d'émanation, qui occupe 0,6 millimètre cube ; mais on se contente d'habitude de 10 à 30 millicuries. Pour déterminer la quantité d'émanation, on l'exprime au moyen de l'unité que l'on a appelée le curie : c'est la quantité d'émanation en équilibre avec un gramme de Radium-élément ; les sous-multiples se dénomment le millicurie, le microcurie et le millimicrocurie. Le microcurie égale environ 8 milligrammes minute de Radium-élément. Les aiguilles utilisées pour l'introduction des tubes d'émanation, ont une longueur de 2,5 à 12 centimètres ; le tube lui-même est muni d'un chas permettant d'y passer un fil, au moyen duquel on peut déplacer l'appareil émanifère au cours de l'application ; la pointe de l'aiguille est bouchée au moyen de paraffine pour empêcher l'issue du tube de terre. Ces aiguilles porte-tubes émanifères sont implantées en grande quantité dans la tumeur cancéreuse. Une stérilisation rigoureuse des appareils est indispensable. Les mêmes aiguilles porte-tubes émanifères servent successivement au traitement de plusieurs malades ; mais, pour obtenir une même quantité d'énergie, la durée d'application sera de plus en plus longue, la radioactivité du tube diminuant suivant une fonction exponentielle. C'est ainsi par exemple, qu'en utilisant un tube contenant 150 millicuries, on pourrait procéder à 14 traitements successifs, chacun d'eux durant le temps nécessaire à la destruction de 10 millicuries. On aurait de la sorte utilisé effectivement 140 millicuries ; les 10 millicuries de surplus se perdent pendant les intervalles des traitements, intervalles qu'on pourrait supposer d'une heure chacun, soit le temps nécessaire pour procéder à la stérilisation des tubes et à la préparation de l'outillage pour le traitement suivant. Pour arriver à cette destruction successive de 10 millicuries, il faut, pour chaque traitement, un temps qui va croissant de neuf heures environ pour la première application, à huit jours et demi pour la quatorzième ; la quantité d'émanation perdue dans les intervalles d'une heure prévus, décroît de 1 millicurie pour le premier intervalle à un dixième de millicurie pour le dernier. Le total de ces 14 applications exige une durée de 22 jours.

La mise en pratique de cette thérapeutique nouvelle nécessite la fondation de puissants instituts, disposant de quantités considérables de Radium, se comptant par grammes. Or, le Radium est peu abondant dans la nature ; on évalue à une centaine de grammes la quantité existant de par le monde. Cette quantité est beaucoup trop minime pour les besoins de la médecine ; d'autre part, le nombre d'appareils se trouve éparpillé entre un grand nombre de médecins, dont la plupart disposent de quantités insuffisantes pour obtenir des résultats sérieux. Les promoteurs du traitement par les tubes d'émanation préconisent la concentration des malades cancéreux et leur traitement en série ; le Radium lui-même reste immuable, et les risques de perte diminuent ; son énergie seule, recueillie régulièrement, étant utilisée en thérapeutique. Si intéressante que soit cette méthode, elle ne semble pas devoir être dans le traitement du cancer la thérapeutique de l'avenir ; les frais extrêmement élevés que nécessiterait la fondation de ces instituts sont de nature à en reculer la création ; ses promoteurs eux-mêmes commencent à faire machine en arrière et à reconnaître que les tubes et les aiguilles de sels de Radium sont d'emploi plus facile et plus pratique, leur activité étant toujours la même.

Enfin, une dernière application très intéressante de l'émanation a été imaginée par un de nos compatriotes, M. Renneboog. Il a mis à profit la propriété que possède l'émanation d'être absorbée très énergiquement par le charbon de bois, et particulièrement par celui de la noix de coco. Ce charbon de bois est pulvérisé en poudre impalpable, ou broyé en petits grains d'un millimètre de diamètre ; le produit est stérilisé et possède une activité de 20 millicuries ; son rayonnement est principalement composé de rayons α ; étant conservé en vase clos, la radioactivité persiste pendant plusieurs jours ; exposé à l'air, il perd la moitié de sa radioactivité au bout d'une demi-heure. Cette préparation doit être considérée comme un corps radio-actif comparable aux sels de Radium. Pratiquement, la radioactivité décroît moins rapidement dans le cas de l'émanation absorbée par le charbon de bois que dans le cas de l'émanation accumulée à l'état de gaz dans des appareils creux.

Par un dispositif spécial, l'auteur de la méthode est arrivé à conserver une provision de poudre de charbon continuellement en contact avec l'émanation d'un sel de Radium. Chaque jour on peut prélever une certaine quantité de poudre dont la radioactivité est pratiquement constante. Cette poudre est mesurée à l'électroscope de Cheneau et Laborde, qui permet d'introduire sous la tige portant la feuille d'or, le produit nu étalé sur un verre de montre. On mesure ainsi le rayonnement global, car le produit étant mis à nu sur l'épiderme, c'est son rayonnement global qui est utilisé. La mesure se fait par la lecture de la chute de la feuille, d'abord à l'état libre, puis en présence de la poudre. Cette mensuration faite, on introduit dans l'électroscope un étalon d'un sel de Radium. La comparaison des deux lectures permet de conclure à la radioactivité globale de la poudre émanifère. On obtient ainsi un produit d'activité déterminée : si celle-ci est la même que celle d'un tube de 10 milligrammes de Radium-élément en équilibre, on peut affirmer que le produit a une activité de 10 millicuries. Si l'électroscope n'accuse pas l'activité désirée, la poudre peut être renforcée en faisant passer sur elle de l'air imprégné d'émanation, ou diminuée en y ajoutant de la poudre inerte.

Un grand avantage que présente l'emploi des poudres émanifères, c'est qu'il dispense de l'emploi des filtres, et évite les rayons secondaires nuisibles engendrés par les plaques filtrantes métalliques. Je suis, pour ma part, fort porté à accuser ce rayonnement secondaire d'être la cause des réactions tardives qui se manifestent par des télangiectasies ou des dépôts pigmentaires, et j'ai vu avec plaisir qu'à l'Institut du Radium de Londres, on remplaçait les supports métalliques des appareils à sels collés par la vulcanite, c'est-à-dire par la substance employée à la confection des appareils de prothèse buccale.

Le charbon radioactif trouvera ses principales applications en dermatologie. Son emploi étant des plus faciles, il peut sans inconvénient être mis entre les mains de tout praticien ; les tubes scellés conservent assez longtemps leur radioactivité pour être envoyés dans tous les coins du pays ; mais une fois débouchés, ils doivent être immédiatement utilisés. Le mode d'application consiste à étaler la poudre ou les grains sur la surface cutanée à traiter en la déposant tout simplement à sec, et la recouvrant d'un pansement occlusif, au moyen de bandelettes adhésives, par exemple ; ou bien le charbon est étalé sur une compresse enduite de vaseline et appliqué sur la lésion, puis recouvert d'un tissu imperméable. Le prix de revient minime de ce traitement le met à la portée de tous.

Depuis deux ans, j'ai l'occasion de l'employer avec succès en dermatologie dans des cas d'eczéma, de prurit, de psoriasis, dans l'hyperesthésie cutanée du zona, dans le lupus érythémateux, dans les plaies atones. J'engage vivement mes confrères à mettre cette méthode en pratique. D'habitude, je laisse le pansement en place pendant 2 heures ; il n'y a aucun inconvénient à le laisser plus longtemps, à l'appliquer le soir, par exemple, pour le laisser agir durant toute la nuit.

Certains cas d'ophtalmologie m'ont donné des succès très encourageants, notamment dans le lupus de la conjonctive palpébrale et dans les leucomes cornéens. La paraffine liquide débitée sous le nom d'huile émanifère absorbe l'émanation en grande quantité et rend de grands services dans les dermatoses, et dans le traitement des muqueuses, notamment pour les muqueuses nasales ; la rhinite chronique et l'ozène se sont bien trouvés de ce traitement. Ces quelques considérations prouvent combien sont déjà étendues les applications thérapeutiques de l'émanation.

Cet exposé des applications thérapeutiques de l'Émanation, qui font, de la part de M. le Dr Matagne, l'objet d'une étude et d'une observation assidues, n'a soulevé que peu de remarques. A M. le Dr Goris, qui fait remarquer que dans les cas d'épithélioma de la langue le Radium reste sans efficacité, M. Matagne répond qu'il en est ainsi pour certaines formes de cancers qui sont « radiorésistants » ; l'avenir permettra de faire le départ de ces incompatibilités.

Avant de se séparer, la Section se montre favorable à une proposition de M. le Dr Warlomont, qui voudrait soumettre à son examen deux questions également urgentes et intéressantes : 1° celle de la réforme des études médicales universitaires, étudiée, en ce moment, par l'Académie de médecine, et au sujet de laquelle la *Fédération belge des Sociétés scientifiques* demande l'avis des *Sociétés médicales ;* 2° celle de la situation inquiétante créée par l'extension des doctrines et des pratiques anticonceptionnelles, qui fait, en ce moment, l'objet d'un projet de loi soumis à la législature.

Cinquième Section

Présidence de M. Harmant, assisté de M. G. Duplat, faisant fonction de secrétaire.

M. Hauptmann donne lecture d'une communication sur l'*Examen critique de la notion de valeur dans ses rapports avec les systèmes monétaires*

L'auteur esquisse d'abord le processus d'élaboration de la notion de « valeur » ; ensuite, il aborde l'étude de la nature intime de cette valeur ; puis il examine la valeur sous l'un de ses principaux aspects extérieurs, la grandeur, le seul qu'il soit vraiment indispensable d'apprendre à bien connaître, ce qui ne peut se faire qu'à l'aide d'un procédé de mesure. Enfin, il établit que l'échange et les prix permettent effectivement de mesurer la valeur, mais que, jusqu'à présent, les moyens employés dans ce but n'ont pu se dégager de l'empirisme et ont grand besoin d'être améliorés dans un sens plus scientifique.

Cette lecture terminée, le président félicite M. Hauptmann sur la valeur et l'originalité de son travail.

A la suite de sa lecture, l'auteur fut questionné sur plusieurs points ; ces questions donnent lieu à un long échange de vues, dont voici un résumé.

M. Duplat se demande comment les éléments que propose M. Hauptmann pour remplacer l'étalon d'or seraient préférables à ce dernier. A son avis, le principal inconvénient reconnu à l'étalon d'or ne serait pas écarté, puisque, au lieu d'un élément de valeur relativement peu variable, la valeur serait composée de plusieurs éléments variables. Il assimile, dans son esprit, le système préconisé par M. Hauptmann à celui des index-numbers.

M. Duplat envisage un autre inconvénient encore à l'étalon moyen proposé par M. Hauptmann, en ce sens qu'il varierait d'un pays à l'autre.

A la première question, M. Hauptmann répond que l'étalon moyen serait représenté par la valeur moyenne non pas de toutes les matières employées par l'homme, mais de quelques éléments, indispensables à la vie de l'homme, et convenablement choisis, de façon que les variations de valeur se compensent. Ce système serait tout différent de celui des index-numbers préconisé par Stanley Jevons. M. Hauptmann s'en rapporte, à ce sujet, à ce qu'il a exposé au cours de communications précédentes.

Quant à l'adoption d'une valeur différente pour chaque pays, M. Hauptmann n'y voit pas grand inconvénient. En effet, dit-il, les pays à étalon d'or et ceux à étalon d'argent ne s'entendent-ils pas très bien ? Il existera toujours des cours du change, que l'étalon soit d'or ou d'argent, ou qu'il soit constitué par la valeur de différents objets.

M. Duplat estime qu'il faut tenir compte de l'état d'esprit des gens ; or, la question de la monnaie intéresse tout le monde. En conclusion, il pense que M. Hauptmann aura beaucoup de peine à faire admettre son unité de valeur, parce que la valeur de la monnaie repose sur l'opinion générale ; elle est symbolisée, dit-il, par la force de l'État et par les pièces que le public possède en mains.

M. Lagasse de Locht partage également cette opinion.

Le R. P. Fallon demande ensuite la parole.

Dans le concept de valeur, dit-il à M. Hauptmann, vous faites intervenir une notion d'utilité et vous définissez cette notion par des propriétés purement objectives et stables. Or, la notion même d'utilité est essentiellement relative.

M. Hauptmann répond que c'est précisément pour enlever au mot UTILITÉ cette relativité déroutante qu'il propose l'abandon du sens traditionnel, comme il l'explique du reste. Il a choisi ce terme parce qu'il détermine le mieux le sens d'un des éléments qu'il fait intervenir dans son concept de valeur, mais on pourrait forger un autre mot.

Vous considérez, dit le R. P. Fallon, les propriétés réelles des objets utiles en tant qu'elles peuvent ou pourront répondre à un besoin possible ; mais ces besoins peuvent être possibles, ils peuvent être réels, ils peuvent changer ; dès lors, cette notion-là n'est pas stable et immuable comme vous le croyez.

Vous établissez une relation entre l'ensemble des propriétés et le besoin, vous êtes dans la relativité. Il y a une contradiction à vouloir chercher un élément stable dans ces conditions, car si vous parlez de ces propriétés par rapport à des besoins, vous tombez dans un genre de choses qui sont infiniment variables et vous ne pouvez plus leur attribuer un caractère de stabilité.

Réponse : M. Hauptmann dit qu'il n'y a de science que du relatif. Il pense cependant pouvoir considérer comme stable et immuable l'ensemble et chacune des propriétés physiques, chimiques et sociales des choses susceptibles d'avoir de la valeur, et qui font que ces choses acquièrent effectivement de la valeur du moment où les autres conditions sont réalisées.

En ce qui concerne le travail tel que vous le considérez, ajoute le R. P. Fallon, cet élément remplace celui que vous trouvez chez tous les économistes sous la rubrique RARETÉ. Cette notion ne s'applique pas à tous les cas de valeur ; elle rentre, en somme, dans la notion de rareté qui, elle, est plus générale.

Le R. P. Fallon estime que la rareté, bien plus que le travail, intervient dans la notion de valeur. Prenant l'exemple d'un chef-d'œuvre, il n'y a, dit-il, aucune espèce de comparaison de travail qui puisse intervenir pour fixer la valeur d'un Rubens.

Il a fallu, dit M. Hauptmann, pour créer le chef-d'œuvre, la supériorité de l'artiste, ce qui fait que le travail effectué par lui est considérable, vu les obstacles vaincus pour exécuter ce travail.

Prenant le cas de deux huîtres contenant, l'une une perle de grande valeur, l'autre une perle de vil prix, le R. P. Fallon fait observer que le travail effectué pour chercher l'une et l'autre de ces perles a été le même.

M. Hauptmann fait remarquer, en effet, que la rareté est un facteur du travail, comme il l'a indiqué dans sa communication. Dans certains cas, l'intervention du capital peut remplacer celle du travail parce que le capital représente une accumulation de choses ayant de la valeur et que du travail y est donc incorporé. Il ne considère nullement celui-ci comme l' « unique générateur de la valeur ».

La séance devant être levée, le R. P. Fallon se réserve d'étudier à loisir la communication de M. Hauptmann, lorsqu'elle paraîtra aux Annales. M. Hauptmann est convaincu qu'à cette lecture le R. P. Fallon distinguera mieux le point de vue auquel l'auteur s'est placé.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale eut lieu à 3 heures, dans la grande salle du Collège Notre-Dame, sous la présidence d'honneur de Sa Grandeur Monseigneur Crooy, évêque de Tournai, et sous la présidence de M. A. Renier.

M. le Dr Guermonprez fit la conférence sur la Science et la résurrection de la Pologne. Le texte de cette conférence, prononcée avec une émotion vibrante et écoutée avec intérêt par les auditeurs nombreux, sera publié dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

La loi des densités à l'intérieur de la terre

PAR

M. l'abbé **LÉON DE NEYER**

La mécanique céleste et la géodésie imposent à toute loi de distribution des densités à l'intérieur du globe un certain nombre de conditions. Jusqu'en ces dernières années cependant aucune loi continue ne pouvait satisfaire à la fois aux données de la géodésie sur l'aplatissement de la terre et à celles de l'astronomie sur la constante de précession. La géodésie s'en tenait à l'aplatissement de Clarke 1 : 293,5, et la mécanique céleste exigeait le nombre 1 : 297.

Déjà l'on songeait à une loi discontinue, quand en 1909 les travaux géodésiques de Hayford ont trouvé la valeur de l'aplatissement qu'imposaient les autres données de l'observation et le nombre 1 : 297 a été adopté en 1911 par la Conférence Internationale des Éphémérides Astronomiques. Dès lors, le rapprochement de la constante de précession et de l'aplatissement tel qu'il est donné par la géodésie doit permettre de préciser une loi de variation des densités à laquelle on aura laissé une indétermination convenable.

I. **Position du problème :** De nombreuses lois sont également acceptables, a priori. Une loi déterminée est définie par une relation entre la densité ρ et, par exemple, le rapport r entre la distance d'un point de la terre au centre et le rayon terrestre :

$$\rho = f(r) \qquad (o \leqslant r \leqslant 1)$$

C'est à Clairaut que l'on doit l'hypothèse sur la répartition des masses à l'intérieur du globe qui a permis de serrer de plus près la réalité. Il suppose :

1) que la densité varie d'une manière continue et décroissante du centre à la surface ;

2) que l'aplatissement des couches sphéroïdales homogènes qui constituent le globe est assez faible pour que son carré puisse être négligé ;

3) que la vitesse de rotation de toutes ces couches est constante.

Cette hypothèse entraîne une série de relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients d'une loi quelconque des densités. En particulier quatre équations distinctes permettent de déterminer ces coefficients. Ce sont :

$$(A)\begin{cases} (1) & f(1) = \rho_1 \\ (2) & 3\int_o^1 \rho r^2 dr = D_1 \\ (3) & \int_o^1 \rho r^2 dr = \frac{D_1}{3} \cdot \frac{1}{J}\left(\epsilon - \frac{\varphi}{2}\right) \\ (4) & (r^2\epsilon'' - 6\epsilon)\int_o^r \rho r^2 dr + 2\,(r\epsilon' + \epsilon)\,\rho r^3 = 0. \end{cases}$$

Ces équations font appel aux cinq données expérimentales suivantes :

1) ρ_1 : la densité superficielle de la terre ;
2) D_1 : la densité moyenne du globe ;
3) ϵ : la valeur observée de l'aplatissement ;
4) J : le rapport $\frac{C - A}{C}$ des moments principaux d'inertie A et C de la terre considérée comme un solide de révolution (on sait que ce rapport dépend de la constante de précession) ;
5) φ : le rapport de la force centrifuge à l'attraction terrestre, en tout point de l'équateur.

La troisième équation est la relation qui lie l'aplatissement superficiel et la constante de précession. La quatrième est une équation différentielle du second ordre à coefficients variables. C'est l'équation bien connue de Clairaut qui exprime la condition d'équilibre d'une masse ellipsoïdale fluide hétérogène en rotation [1].

Il convient de signaler aussi l'inégalité obtenue par Stieltjes [2] et qui s'exprime par une limite inférieure imposée à la densité (ρ_o) au centre de la terre :

$$\text{(B)} \qquad \rho^{0} \geqslant \rho_1 + (D_1 - \rho_1) \sqrt{\left(\frac{D_1 - \rho_1}{\frac{5D_1}{3I} - \rho_1}\right)^3}$$

la quantité I étant définie par la relation

$$J = \left(\epsilon - \frac{\varphi}{2}\right) I$$

Pour nous guider dans le choix de la formule qui exprimera la loi des densités

$$\rho = f(r)$$

nous n'avons guère que des indications bien vagues fournies par la physique.

On sait que pour les gaz à température constante la densité ρ est proportionnelle à la pression p :

$$\frac{dp}{d\rho} = \text{constante.}$$

Pour les fluides on admet généralement qu'ils résistent d'autant plus à la pression qu'ils sont plus comprimés :

$$\frac{dp}{d\rho} = f(\rho)$$

---

[1] Pour l'établissement de ces équations ainsi que pour la théorie de Clairaut on pourra consulter, par exemple, Véronnet : *Rotation de l'Ellipsoïde hétérogène et Figure exacte de la Terre* (Paris, Gauthier-Villars, 1912).

[2] Cfr. Bulletin astronomique, octobre 1884, pp. 465 et suiv.

Callandreau (¹) a montré que si la compressibilité, à mesure que r augmente, diminue plus rapidement que ρ et que ρ^2 on a :

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} < 0$$

Cette condition supposée admise impose aux densités une fonction de la forme :

$$\rho = A - Br^n - \ldots\ldots$$

A, B et n étant positifs, c'est-à-dire une loi figurée dans un plan des (r, ρ) par une ligne tournant sa concavité dans le sens négatif de l'axe des ρ.

A mesure la densité ρ_o au centre de la terre $(r = o)$.

D'autre part, si l'on suppose autour du centre une répartition symétrique des densités, ρ doit être une fonction paire de r :

$$\rho = A - Br^2 - Cr^4 - \ldots\ldots$$

La loi de Roche :

$$\rho = \rho_o(1 - kr^2)$$

est un cas particulier de celle-ci. Mais elle ne dépend que de deux paramètres ρ_o et k ; et il est impossible d'attribuer à ces deux paramètres des valeurs numériques par lesquelles ρ puisse satisfaire aux observations dans les limites d'une approximation suffisante. C'est pourquoi j'ai essayé une loi dépendant de trois paramètres, que figurerait une parabole du quatrième degré :

$$\rho = \rho_o - \rho_2 r^2 - \rho_4 r^4.$$

Les quadratures indiquées dans les équations (2) à (4) se font alors aisément et le système (A) des conditions imposées aux paramètres indéterminés devient le système (A′) ci-dessous :

(¹) Callandreau : *Mémoire sur la Théorie de la Figure des Planètes*, ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, t. XIX, 1889.

$$(A') \quad \begin{cases} (1)\ \rho_0 - \rho_2 - \rho_4 = \rho_1 \\ (2)\ \rho_0 - \frac{3}{5}\rho_2 - \frac{3}{7}\rho_4 = D_1 \\ (3)\ \frac{\rho_0}{5} - \frac{\rho_2}{7} - \frac{\rho_4}{9} = \frac{D_1}{3} \cdot \frac{1}{J}\left(\epsilon - \frac{\varphi}{2}\right) \\ (4)\ r^2\epsilon''\left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{\rho_2}{5}r^2 - \frac{\rho_4}{7}r^4\right) + 2r\epsilon'\left(\rho_0 - \rho_2 r^2 - \rho_4 r^4\right) \\ \qquad - 4\epsilon\left(\frac{\rho_2}{5}r^2 + \frac{2}{7}\rho_4 r^4\right) = 0 \end{cases}$$

II. **Détermination des Paramètres**: La « Théorie des Erreurs » nous fournit le moyen de trouver les valeurs les plus avantageuses des inconnues par la résolution simultanée des quatre équations de condition. Mais cette recherche, pour être rigoureuse et précise, court le risque d'être illusoire. Il ne faut pas oublier en effet que la théorie de Clairaut et par conséquent aussi les équations qu'elle donne, ne tiennent pas compte d'un facteur dont on ne connaît qu'à peine l'importance relative : l'élasticité de la terre ; et les valeurs que ces équations fournissent pour les paramètres ρ_0, ρ_2, ρ_4 ne peuvent être que des valeurs de première approximation.

Il pourra donc suffire de calculer ces paramètres au moyen des trois premières équations, quitte à vérifier dans quelle mesure les valeurs ainsi trouvées satisfont à la quatrième : l'équation de Clairaut. Nous aurons ainsi un moyen de vérifier jusqu'à quel point les hypothèses simplificatrices introduites ci-dessus, répondent à la réalité des faits, et en particulier de nous rendre compte de l'influence de cette élasticité de la terre que nous avons négligée : ce sera l'intérêt particulier de cette recherche.

Pour les données des observations, j'ai adopté les valeurs suivantes :

$$\epsilon = 1 : 297$$
$$D_1 = 5,53$$
$$J = 1 : 305,31$$
$$\varphi = 1 : 288,38$$

Quant à ρ_1, la géologie en place la valeur la plus satisfaisante entre 2,4 et 3,0. Afin de mieux faire ressortir l'influence de cette donnée sur la suite des calculs, il a fallu déterminer les paramètres ρ_0, ρ_2 et ρ_4 pour diverses valeurs de ρ_1 régulièrement espacées dans cet intervalle.

Voici les résultats de ces calculs avec trois décimales exactes :

ρ_1	ρ_0	ρ_2	$-\rho_4$
2,4	10,698	9,402	1,104
2,5	10,885	10,276	1,891
2,55	10,979	10,714	2,285
2,6	11,073	11,152	2,679
2,65	11,167	11,589	3,072
2,7	11,261	12,027	3,466
2,8	11,448	12,902	4,254
2,9	11,635	13,777	5,041
3,0	11,823	14,652	5,829

On vérifie immédiatement que les valeurs de ρ_0 indiquées dans ce tableau satisfont à l'inégalité (B). Le calcul donne en effet, comme limite inférieure de ρ_0 dans l'inégalité de Stieltjes, des valeurs comprises entre 7,727 et 8,051 pour les valeurs de ρ_1 considérées.

III. **Intégration de l'équation de Clairaut** : Avant d'examiner dans quelle mesure ces résultats vérifient l'équation de Clairaut, il faut intégrer cette dernière. C'est une équation différentielle du second ordre du type :

$$x^2y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{a}$$

P(x) et Q(x) désignant deux fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine.

Fuchs (1) a montré qu'une pareille équation admet deux intégrales régulières distinctes dans le domaine de l'origine :

$$y_1 = x^{s_1}\varphi_1(x) \qquad y_2 = x^{s_2}\varphi_2(x),$$

les exposants s_1 et s_2 étant différents, et $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ désignant deux fonctions holomorphes qui ne sont pas nulles pour $x = 0$.

Chacune de ces deux intégrales peut donc être représentée par un développement en série potentielle :

$$(b) \qquad y = c_0 x^s + c_1 x^{s+1} + c_2 x^{s+2} + \ldots\ldots \; (c_0 \neq 0).$$

En attribuant aux fonctions P et Q les formes :

$$\begin{cases} P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots \\ Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots \end{cases}$$

et en substituant le développement (b) dans l'équation (a) on voit que s_1 et s_2 sont les deux racines de l'équation de second degré :

$$(c) \qquad s(s-1) + a_0 s + b_0 = 0.$$

Cette dernière équation est l'*équation déterminante fondamentale*.

On peut choisir arbitrairement c_0, puisque l'intégrale n'est déterminée qu'à une constante près. Pour trouver les autres coefficients du développement, c_p par exemple, il suffit d'égaler à 0 le coefficient que l'on trouve pour x^{s+p} après avoir substitué à y dans l'équation (a) le développement (b). On obtient ainsi une formule de récurrence qui permet de calculer de proche en proche les coefficients de l'intégrale y.

Appliquons cette méthode à l'équation de Clairaut.

Les polynômes P et Q sont les suivants :

$$\begin{cases} P(r) = 6 - \dfrac{12}{5}\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_0}\right) r^2 - \ldots\ldots \\ Q(r) = \quad - \dfrac{12}{5}\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_0}\right) r^2 - \ldots\ldots \end{cases}$$

---

(1) Cfr. Goursat : *Cours d'Analyse Mathématique* (3e édition), t. II, pp. 462 et suiv.

L'équation déterminante fondamentale devient :

$$s(s-1)+6s=0,$$

et admet les deux racines $s_1 = 0$ et $s_2 = -5$.

La racine $s_2 = -5$ donnerait pour ϵ un développement contenant au moins un terme en r^{-5} dont le coefficient ne serait pas nul. Au centre, pour $r = 0$, on aurait $\epsilon = \infty$. Cette solution doit donc être rejetée comme Laplace l'a fait voir par une autre méthode.

La première racine $s_1 = 0$ donne pour ϵ le développement suivant (à une constante près, en faisant $c_o = 1$) :

$$\epsilon = 1 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots\ldots$$

Si l'on substitue à ϵ ce développement dans l'équation de Clairaut et si l'on égale à zéro le coefficient de x^p, on obtient la formule de récurrence suivante pour le calcul des coefficients :

$$\rho_o\left[\frac{1}{3}p(p-1)+2p\right]c_p = \rho_2\left[\frac{1}{5}(p-2)(p-3)+2(p-2)+\frac{4}{5}\right]c_{p-2}$$
$$+\rho_4\left[\frac{1}{7}(p-4)(p-5)+2(p-4)+\frac{8}{7}\right]c_{p-4}.$$

Cette formule appelle les remarques suivantes :

1) Le coefficient c_p ne dépend que des coefficients c_{p-2} et c_{p-4}. Or $c_1 = c_3 = 0$. Donc tous les coefficients d'indice impair sont nuls et ϵ ne dépend que des puissances paires de r : il fallait s'y attendre du moment que l'on supposait une symétrie parfaite par rapport au centre de la terre. La loi des densités

$$\rho = \rho_o - \rho_2 r^2 - \rho_4 r^4$$

exprimait déjà cette symétrie ; il fallait la retrouver dans la loi des ϵ.

2) Le coefficient c_p est multiplié par ρ_o tandis que c_{p-2} et c_{p-4} sont multipliés respectivement par ρ_2 et ρ_4 : les coefficients c_p ne dépendront donc que des rapports $\frac{\rho_2}{\rho_o}$ et $\frac{\rho_4}{\rho_o}$.

IV. **Vérification des Conclusions** : L'intégrale de l'équation de Clairaut sera donc l'intégrale particulière :

$$G\epsilon = 1 + c_2 r^2 + c_4 r^4 + \ldots\ldots$$

correspondant à la racine $s_1 = 0$ de l'équation déterminante fondamentale. On pourrait déterminer la constante d'intégration en faisant $r = 1$ et $\epsilon = 1 : 297$. Mais cette intégrale ne nous intéresse que pour vérifier l'exactitude des coefficients que nous avons trouvés pour la loi des densités. Il existe une autre équation équivalente à l'équation de Clairaut et qui nous dispense de la détermination d'une constante supplémentaire (¹). C'est l'équation:

$$\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1} \text{ ou } \frac{C\epsilon'_1}{C\epsilon_1} = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{\epsilon_1} - 1$$

(en désignant par l'indice 1 les valeurs de ϵ et de ϵ' pour $r = 1$).

Cette équation devient, en tenant compte de l'intégrale précédente :

$$(d) \qquad \frac{2c_2 + 4c_4 + 6c_6 + \ldots\ldots}{1 + c_2 + c_4 + c_6 + \ldots\ldots} = \frac{5\varphi}{2\epsilon_1} - 2.$$

Le premier membre dépend des coefficients c_p et, par conséquent, des valeurs trouvées pour ρ_0, ρ_2 et ρ_4 ; le second membre peut se calculer au moyen des seules données de l'observation et a pour valeur 0,5747.

Nous avons donc là le moyen de confronter avec les observations les hypothèses que nous avons faites.

Pour apercevoir la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1}$ (premier membre de l'équation (*d*)), il faut pousser les calculs jusqu'à la détermination du coefficient c_{20}.

Pour les diverses valeurs déjà considérées de la densité superficielle ρ_1, les deux tableaux suivants donnent, le premier les valeurs des coefficients c, le second les valeurs que l'on obtient successivement pour le rapport $\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1}$ en arrêtant le développement du premier membre de (*d*) au terme en c_2, c_4, …… c_{20}.

(¹) Cfr. Véronnet : *op. cit.*, p. 43, formule (51).

TABLEAU I : Coefficients *c*.

ρ_1	2,4.	2,5	2,55	2,6	2,65	2,7	2,8	2,9	3,0
c_2	0,150661	0,16184	0,16729	0,172651	0,1779066	0,18309	0,193202	0,202988	0,212445
c_4	0,04755	0,049662	0,050920	0,052307	0,0538065	0,055421	0,058965	0,062892	0,067133
c_6	0,017439	0,016930	0,016707	0,016512	0,0163511	0,016228	0,016116	0,016211	0,016510
c_8	0,0067647	0,0059656	0,005523	0,005055	0,0045666	0,0040575	0,0029901	0,0018758	0,0007303
c_{10}	0,0027020	0,0021286	0,001806	0,001459	0,0010860	0,0006858	−0,0002004	−0,0012045	−0,0023305
c_{12}	0,0010969	0,0007634	0,000580	0,0003862	0,0001785	−0,00004383	−0,00053969	−0,0011143	−0,0017810
c_{14}	0,00044974	0,00027435	0,000183	0,0000892	−0,000007564	−0,000108	−0,000322665	−0,00056178	−0,0008339
c_{16}	0,00018563	0,00009868	0,0000566	0,00001558	−0,00002386	−0,0000618	−0,000132906	− 0,00019757	− 0,0002567
c_{18}	0,000076976	0,000015371	0,0000171	0,000000564	−0,00001366	−0,0000254;	−0,000039826	−0,000039715	−0,0000220
c_{20}	0,000032029	0,0000015971	0,00000513	−0,000001201	−0,00000568	−0,00000823	−0,000006404	0,000006980	0,0000352

TABLEAU II : Rapport $\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1}$.

	ρ_1	2,4	2,5	2,55	2,6	2,65	2,7	2,8	2,8	3,0
Développement arrêté à	c_2	0,2619	0,2786	0,2866	0,2944	0,3020	0,3095	0,3238	0,3375	0,3504
	c_4	0,4102	0,4311	0,4418	0,4526	0,4635	0,4747	0,4969	0,5194	0,5419
	c_6	0,4904	0,5078	0,5170	0,5264	0,5360	0,5461	0,5669	0,5887	0,6114
	c_8	0,5319	0,5441	0,5504	0,5567	0,5633	0,5701	0,5843	0,5996	0,6156.
	c_{10}	0,5528	0,5604	0,5633	0,5677	0,5715	0,5753	0,5829	0,5907	0,5987
	c_{12}	0,5638	0,5674	0,5694	0,5713	0,5731	0,5749	0,5782	0,5808	0,5830
	c_{14}	0,5680	0,5704	0,5714	0,5722	0,5730	0,5736	0,5751	0,5749	0,5743
	c_{16}	0,5703	0,5716	0,5721	0,5725	0,5727	0,5729	0,5735	0,5725	0,5713
	c_{18}	0,5714	0,57186	0,5724	0,5725	0,5726	0,5726	0,5729	0,57205	0,5710
	c_{20}	0,5719	0,57188	0,5725	0,5725	0,5725	0,5725	0,5728	0,57216.	0,5715

Si l'on traduit le tableau II en graphique en prenant pour abscisses les indices 2, 4, ... 20 des termes auxquels on arrête successivement le développement de $\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1}$ et pour ordonnées les valeurs correspondantes de $\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1}$, on obtient pour chaque valeur de ρ_1 une courbe des $\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1}$.

Le tableau II met en évidence les propriétés suivantes de ces courbes.

1) Pour les valeurs les plus probables de ρ_1, à savoir

$$2,5 < \rho_1 < 2,8$$

ces courbes convergent vers leur limite de deux façons différentes : jusque $\rho_1 = 2,6$ elles convergent vers leur limite en croissant d'une manière continue ; à partir de $\rho_1 = 2,65$ elles sont d'abord croissantes puis tendent vers leur limite en décroissant. On pourrait même en resserrant davantage l'intervalle compris entre $\rho_1 = 2,6$ et $\rho_1 = 2,65$ déterminer avec une approximation de plus en plus grande la valeur de ρ_1 à partir de laquelle la courbe des $\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1}$ subit cette modification d'allure. La valeur de ρ_1 ainsi déterminée ne serait-elle pas la vraie valeur de ρ_1, celle vers laquelle tendraient les recherches de plus en plus précises de la géologie ; et ne pourrait-elle pas être utilement définie comme la *valeur théorique de la densité superficielle ?* de même qu'on avait défini, bien avant les travaux géodésiques de Hayford la valeur 1 : 297 comme la valeur théorique de l'aplatissement superficiel ? Rapprochons cette réflexion d'un résultat de Harkness (¹) qui, en 1910, a trouvé expérimentalement $\rho_1 = 2,67$.

2) Encore pour les mêmes valeurs, les plus probables, de ρ_1 ces courbes convergent vers la valeur

$$\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1} = 0,5725,$$

tandis que la mesure de φ fournit la valeur 0,5747.

(¹) Cfr. SMITHSONIAN PHYSICAL TABLES, t. LVIII, n° 1, 1910, table 89, p. 108.

Il y a donc un écart moyen de 3×10^{-3} entre la limite de $\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1}$ donnée par l'observation et celle donnée par notre loi des densités.

Si dans l'équation (*d*)

$$\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1} = \frac{5\,\varphi}{2\,\epsilon_1} - 2,$$

on fait $\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1} = 0{,}5725$, on trouve $\epsilon_1 = 1 : 296{,}743$; c'est-à-dire que l'on commet sur la valeur de ϵ_1 une erreur de 0,087 %, erreur tout à fait négligeable : qui oserait, en effet, dans l'état actuel de nos connaissances géodésiques, garantir la valeur de ϵ_1 à 0,01 % près par exemple (1) ?

On serait tenté d'attribuer cet écart de 3×10^{-3} à l'influence de l'élasticité dont ne tiennent pas compte les calculs précédents. Mais le raisonnement précédent montre qu'il serait téméraire, dans l'état actuel de nos connaissances, de se baser sur un écart aussi faible pour étudier cette force d'élasticité. L'étude de la variation des densités à l'intérieur de la terre ne pourra donc, semble-t-il, fournir de renseignements précis sur l'élasticité de notre globe que le jour où la géodésie aura fait connaître l'aplatissement superficiel ϵ_1 avec une approximation suffisante, à savoir de l'ordre du 0,0001.

---

(1) Cfr. Véronnet : *Valeurs de l'aplatissement de la terre obtenues par le calcul et par les mesures*, C. R. DE L'ACAD. DES SCIENCES DE PARIS, 29 sept. 1920, t. 171, p. 545.

Notes sur la Flore du Katanga

PAR

É. DE WILDEMAN
Directeur du Jardin Botanique de l'État à Bruxelles

VII

VERBENACEAE

LANTANA *L.*

Lantana salviifolia *Jacq.*
Riv. Lufira (Rogers, n. 10324).

CLERODENDRON *L.*

Clerodendron myricoides *Br.*
Élisabethville (Rogers, n. 10119).
Clerodendron spinescens *Gürke.*
Tschinsenda (Rogers, n. 10270) ; Élisabethville (Rogers, n. 10355).

LABIATACEAE

OCIMUM *L.*

Les espèces de ce genre sont relativement embrouillées, elles sont d'ailleurs très nombreuses et réparties dans un assez grand nombre de sections, divisées en sous-sections, dont les caractères sont loin d'être précis.

Nous avons mis en tableau les principaux caractères différentiels de ces sections et sous-sections.

---

(1) Voir fasc. VI in ANNALES SOC. SCIENT. Année XL, févr. 1921, 2e partie, p. 69.

Nous avons été amené à intercaler parmi les espèces décrites, l'une ou l'autre plante ne provenant pas du Katanga, souvent par le fait que son intercalation permettait de signaler des ressemblances ou des différences capables de faire ressortir les caractères de nos plantes katangiennes.

Filaments staminaux postérieurs appendiculés ou velus au moins à la base.
  Filaments appendiculés . . . . . . Sect. *Ocimodon*
  Filaments velus ou munis d'une touffe de poils à la base, non appendiculés . . . . . Sect. *Hierocimum*
Filaments staminaux postérieurs glabres et non appendiculés de même que les autres . . Sect. *Gymnocimum*

OCIMODON

Dents de la lèvre inférieure du calice plus ou moins soudées, longues et aiguës.
  Dents latérales ovales-aiguës. . . . . Subsect. *Basilica* Briq.
  Dents latérales courtes-élargies ou subtronquées . . . . Subsect. *Hiantia* Benth.
Dents de la lèvre inférieure du calice soudées en lobe bidenté formant calice . . . . Subsect. *Gratissima* Briq.

HIEROCIMUM

Tiges régulièrement feuillées . . . . Subsect. *Foliosa* Briq.
Tiges feuillées en rosette à la base . . . Subsect. *Nudicaulia* Briq. (Amérique)

GYMNOCIMUM

Tube corollin très court ou subinclus . . Subsect. *Brevituba* Briq.
Tube corollin allongé, exsert . . . . Subsect. *Longituba* Briq.

BASILICA

Il ne peut être question de donner ici la différenciation de toutes les espèces de ce groupe ; nous essayerons de mettre en tableau uniquement les principaux caractères différentiels des plantes que nous avons cru devoir considérer comme espèces nouvelles.

Feuilles linéaires-lancéolées, de 3 mm. max. de diam.
  Feuilles de 6 cm. max. de long et 2 mm. de large . . . *O. tuberosum*
  Feuilles de 5,2 cm. max. de long et 3 mm. de large. *O. angustilanceolatum*
Feuilles ovales-elliptiques de plus de 4 mm. de diam.
  Feuilles ovales, largement cunéiformes ou arrondies à la base ; inflorescences à 4-6 verticilles de fleurs . . . . *O. Bequaerti*

Feuilles plus ou moins longuement cunéiformes à la base ; inflorescences à plus de 6 verticilles de fleurs.

Feuilles largement cunéiformes de base, rétrécies en pétiole net, celles de la base des inflorescences atteignant 11,5 cm. de long et 5,5 cm. de large . . . *O. glabrifolium*

Feuilles courtement cunéiformes de base souvent subsessiles; celles de la base des inflorescences atteignant 9 cm. de long et 3 cm. de large . . . . . *O. glabrifolum* var. *Sapini*

Ocimum angustilanceolatum *De Wild.* nov. spec (1).

Plante à souche ligneuse, rameaux dressés atteignant inflorescences comprises 36 cm. de long, glabres vers la base ; feuilles sessiles étroitement lancéolées, non dentées, aiguës au sommet, glabres sur les deux faces, glanduleuses, de 2,5-5,2 cm. de long et 2-3 mm. de large, à 1-2 nervures latérales subparallèles à la médiane ; racèmes terminaux, plus ou moins denses à 6-7 verticilles de fleurs, de environ 10 cm. de long et en fleurs 2 cm. de large, à entrenœuds pouvant atteindre 4 cm., rachis courtement et éparsement pubescent, bractées ovales, aiguës, ciliées, caduques ; calice atteignant 7-9 mm. de long sous la fleur, campanulé, lobe supérieur ovale-aigu, de 5 mm. env. de large, décurrent légèrement jusqu'à la base, fortement coloré à l'état sec ou brunâtre ; lobes supérieurs aigus, lobes latéraux ovales, denticulés. Corolle blanche ou légèrement rosée, de 15-16 mm. de long, à tube de 8 mm. env. de long, lèvre supérieure 4-lobulée, l'inférieure elliptique de env. 6 mm. de diam. ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle de env. 18 mm. ; filaments supérieurs à épaississement villeux vers la base, style dépassant les étamines à stigmates aigus.

Vallée boisée du Plateau de Biano (Esschen-Plateau), novembre 1912 (Homblé, n. 866).

Obs. — Cette espèce appartient par la constitution de ses fleurs au groupe « Ocimodon-Basilica ». Faut-il la classer dans la subdivision des « Herbaceous perennials » ou dans celle des « Undershrubs with woody branches » de M. Baker (FLORA OF TROP. AFRICA,

---

(1) *Ocimum angustilanceolatum ;* Herbaceus basi lignosus, ramis erectis usque 36 cm. altis ; foliis sessilibus anguste lanceolatis, apice acutis, glabris, glandulosis, 2,5-5,2 cm. longis et 2-3 mm. latis ; racemis terminalibus densis, rachide breviter et sparse pubescenti, verticillis 6-7 usque 2 cm. latis, bracteis ovatis, acutis, ciliatis, caducis ; calyce usque 7-9 mm. longo, campanulato, lobo superiore ovato-acuti, lobis inferioribus acutis, lateralibus ovato-acutis, corolla albida vel roseola, 15-16 mm. longa, tubo circ. 8 mm. longo, labro superiore 4-lobulata, inferiore elliptico circ. 6 mm. lato ; staminibus circ. 18 mm. exsertis, filamentis basi villosis, stylo exserto, stigmatis acutis.

v. p. 335), il n'est pas aisé de le préciser. Il est certain que la souche, dont nous possédons un fragment, est ligneuse, épaisse, atteignant 18 mm. de diam. et que d'elle partent des tiges dressées grêles.

Ce serait donc plutôt dans le premier groupe qu'il faudrait classer la plante !

Dans ces conditions elle se rapprocherait des *O. Poggeanum* Briq. et *O. linearifolium* Briq.

Pour les trois espèces ainsi envisagées, nous pourrions citer les différences :

O. linearifolium : feuilles de 12-16 mm. de long, velues sur les deux faces.
O. Poggeanum : » 24-52 » » ; glabres sur les deux faces.
O. angustilanceolatum : » 25-52 » » ; glabres sur les deux faces.

Les deux dernières espèces paraissent donc très voisines, si on en juge par leurs descriptions ; nous n'avons pu examiner un exemplaire des récoltes de Pogge. Nous avons préféré séparer spécifiquement cette plante de celle de l'Angola, qui appartiendrait d'ailleurs d'après M. le Dr Briquet au groupe *Hiantia*, ce qui n'est nullement le cas pour notre plante.

Ocimum Bequaerti *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante à souche... ; rameaux ligneux dressés plus ou moins ramifiés, atteignant plus de 40 cm. de long, entrenœuds courtement pubescents à l'état jeune, devenant glabres, de 3,5-15 cm. de long ; feuilles nettement pétiolées, à pétiole de 7-12 mm. de long, légèrement ailé, limbe ovale, arrondi ou largement cunéiforme à la base, largement denté sur les bords, dents subaiguës, éparsement pubescent sur les deux faces surtout sur la face inférieure glanduleuse, de 4-9,5 cm. de long et 2,4-8 cm. de large, racèmes terminant les rameaux et leurs ramifications, 4-7 verticilles de fleurs, plus ou moins denses, de 4-5 cm. de long et en fleurs jusqu'à 3 cm. de large, rachis courtement pubescent, bractées ovales-aiguës, velues, rapidement caduques ; pédicelles courtement pubescents de 1-2 mm. de long ; calice atteignant sous la fleur env. 7 mm. de long, campanulé, lobe supérieur ovale de env. 4 mm. de long, légèrement décurrent le long du tube du calice, lobes inférieurs aigus, lobes latéraux env. aussi longs que le lobe supérieur. ovales-aigus, denticulés, ciliés ; corolle blanche, à tube de 10-11 mm. de long, lèvre supérieure 4-lobulée, lobules arrondis, l'inférieure subcirculaire de 6-7 mm. de diam. Étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle de env. 15 mm. ; filaments supérieurs villeux renflés vers la base en une sorte de dent, style dépassant les étamines à stigmates courts, aigus, peu divergents.

---

(1) *O. Bequaerti* ; Ramis erectis lignosis plus minus ramosis ultra 40 cm. longis ; foliis petiolatis, petiolo 7-12 mm. longo, subalato, lamina ovata basi rotundata vel late cuneata, margine late denticulata, supra et infra sparse pubescenti, infra glandulosa, 4-9,5 cm. longis et 2,4-8 cm. lata ; racemis terminalibus 4-5 cm. longis, verticillis 4-6 usque 3 cm. latis, rachide breviter pubescenti, bracteis ovato-acutis, velutinis, caducis, pedicellis 1-2 mm. longis, calyce usque 7 mm. longo, campanulato, lobo superiore circ. 4 mm. longo, lobis inferioribus acutis, lateralibus acutis, denticulato-ciliatis ; corolla alba, tubo 10-11 longo, labro superiore 4-lobulato, filamentis basi inflato-dentatis, exsertis, stylo exserto.

Bukama, collines, 15 juin 1911 (J. Bequaert, n. 111).

Obs. — Cette espèce du groupe « *Ocimodon-Basilica* » présente des analogies avec notre *O. glabrifolium ;* c'est en effet la même constitution de calice et de corolle, les dimensions des fleurs sont assez semblables ; elles diffèrent par la forme des dents ou cals ciliés qui se trouvent près de la base des filets staminaux et par le développement des inflorescences.

Quant aux feuilles, elles présentent des formes différentes ; tandis que chez *O. glabrifolium* le limbe est rétréci vers la base insensiblement en un pétiole ailé, chez le *O. Bequaerti*, le limbe arrondi ou largement cunéiforme à la base se termine en un pétiole bien défini, très légèrement ailé.

Ocimum glabrifolium *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante à souche... ; rameaux ligneux dressés, peu ou pas ramifiés, atteignant inflorescences comprises plus de 45 cm. de long. feuilles plus ou moins lon-

---

(¹) *Ocimum glabrifolium ;* Ramis erectis usque circ. 45 cm. altis, internodiis usque 10 cm. longis ; foliis basi in petiolum anguste alatum contractis, lamina 4,5-11,5 cm. longa et 16-55 mm. lata, abrupte et breviter acuminata, glabra vel sparse piloso-glandulosa, dentata ; racemis terminalibus. laxis, 21 cm. circ. longis, verticillis usque circ. 10 et usque 2 cm. latis, rachide breviter pubescenti, bracteis ovato-subacutis ; calyce usque 6-8 mm. longo, lobo superiori ovato-acuto 3,5 mm. circ. longo, lobis inferioribus acutis, lateralibus ovatis, denticulatis, corollae tubo 8 mm. circ. longo, labro superiore 4-lobulato, inferiore 6 mm. cm. lato ; staminibus exsertis, filamentis superioribus basi villoso-callosis ; stylo exserto, stigmatis leviter divergentibus, acutis.

guement rétrécies à la base en un pétiole très étroitement ailé, limbe de 4,5-11,5 cm. de long et 16-55 mm. de large, assez brusquement et courtement acuminé au sommet, glabre sur les deux faces ou à poils glanduleux, épars, très courts, denté irrégulièrement sur les bords, dents aiguës ; racèmes terminaux plus ou moins lâches, à plus de 10 verticilles de fleurs, atteignant 21 cm. de long et en fleurs 2 cm. de large, entrenœuds de 8-40 cm. de long, rachis courtement pubescent, bractées ovales-subaiguës, caduques ; calice atteignant sous la fleur 6-8 mm. de long, campanulé, lobe supérieur ovale-aigu de 3,5 mm. env. de long décurrent légèrement jusqu'à la base, ciliolé, lobes inférieurs aigus, lobes latéraux ovales, denticulés, aigus, un peu plus courts que le lobe terminal ; corolle... atteignant 15 mm. de long, à tube de 8 mm. env. de long, à lèvre supérieure 4-lobulée, à lobules arrondis, l'inférieure subcirculaire, de 6 mm. env. de diam. ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle de 20 mm. ; filaments supérieurs à callosité densément villeuse, près de la base, style à stigmates légèrement divergents aigus.

Sankisia, 24 septembre 1911 (J. Bequaert, n. 212).

Obs. — Cette espèce du groupe « *Ocimodon-Basilica* » paraît devoir, si on suit la clef proposée par M. Baker in FLOR. OF TROP. AFRICA, v. p. 335, se ranger dans le groupe de l'*O. affine* ou dans celui de l'*O. usaramense*, qui se différencient en ce qu'ils sont le premier des herbes pérennantes, les derniers des sous-arbrisseaux à tiges ligneuses.

L'étiquette qui accompagne l'échantillon de M. Bequaert n'est malheureusement pas très explicite à ce propos ; il semble cependant, par la texture des rameaux que nous possédons, que la plante doive être ligneuse à la base et constituer un petit abrisseau.

En tous cas, elle se différencie du *O. Schweinfurthii* Briq. par ses feuilles non scabres supérieurement et non nettement pubescentes sur la face inférieure, par ses racèmes longs à fleurs espacées.

Quant aux *O. usaramense* Gürke et *O. filamentosa* Forsk., leurs feuilles sont très nettement velues sur les deux faces, celles de la dernière espèce beaucoup plus réduites à dents beaucoup moins accusées.

Ocimum glabrifolium var. **Sapini** *De Wild.* nov. var. (¹).

Plante à souche... ; rameaux dressés plus ou moins ramifiés atteignant 40 cm.

(¹) *Ocimum glabrifolium* var. *Sapini* ; Ramis erectis plus minus ramosis usque 40 cm. longis, foliis sessilis vel breviter petiolulatis, lamina irregulariter de long, feuilles sessiles ou très courtement rétrécies en pétiole, entrenœuds de 1-8 cm. de long, limbe denté irrégulièrement sur les bords, glabre sur les deux faces, de 3-9 cm. de long et 2-3 cm de large ; racèmes terminant les tiges et leurs ramifications, plus ou moins lâches, de 13-20 cm. de long et atteignant en fleurs env. 2 cm. de large, entrenœuds de 1-4 de long, rachis courtement pubescent, bractées ovales, velues, ciliées, caduques ; pédicelles en verticilles par 4-8, velus, de 1-2 mm. de long, accrescents et atteignant 4-5 mm. ; calice sous la fleur de env. 7 mm. de long, accrescent et atteignant après floraison 12-13 mm., campanulé, lobe supérieur ovale, subaigu, de env. 3 mm. de long, lobes inférieurs longuement aigus dépassant le lobe postérieur et les lobes latéraux, ceux-ci longuement triangulaires, aigus ; corolle blanche de env. 15 mm. de long, à tube d'env. 10 mm. de long à lèvre supérieure 4-lobulée, l'inférieure elliptique de env. 5 mm. de diam. Étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle de env. 13 mm., filaments supérieurs à renflement peu proéminent villeux vers la base.

Petite plante des savanes du Dilolo, juin 1908 (A. Sapin).

Obs. — Nous rapportons cette plante à celle qui a été recueillie au Katanga ; elle se différencie par ses feuilles en général plus petites, à limbe moins longuement rétréci à la base, souvent même nettement élargi et alors presque embrassant-subsessile, par la dentelure des feuilles moins accusée ; la plante paraît moins forte. Malheureusement, pour type et variété nous ne possédons pas la souche.

Ocimum tuberosum *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante à souche plus ou moins tubéreuse et ramifiée, atteignant 2 cm. de diam., rameaux aériens dressés, atteignant env. 20 cm. de haut, glabres ou très légèrement pubescents à l'état jeune ; feuilles sessiles linéaires, entières,

---

dentata, supra et infra glabra 3-9 cm. longa et 2-3 cm. lata ; racemis laxis 13-20 cm. longis et usque 2 cm. latis, rachide breviter pubescenti ; bracteis ovatis, velutinis, caducis ; pedicellis 1-2 mm. longis, verticillatis, accrescentibus et usque 5 mm. longis ; calyce usque 7 mm. longo post anthesin accrescenti et usque 13 mm. longo, labro superiore circ. 3 mm. longo, lobis inferioribus longe acutis, lateralibus acutis ; corolla albida circ. 16 mm. longa, tubo 10 mm. longo, labro superiore 4-lobulato, inferiore 5 mm. circ. lato ; staminibus 13 mm. circ. lato ; staminibus 13 mm. circ. exsertis, filamentis superioribus basi paullo inflatis sed villosis.

(1) *Ocimum tuberosum* ; tuberosus, tuber usque 2 cm. diam. ; ramis erectis usque 20 cm. longis, glabris vel juvenilis breviter pubescentibus ; foliis linearibus, glabris, 2-6 cm. longis et 1-2 mm. latis ; racemis plus minus densis, 5-6 cm. longis et usque 3 cm. latis, rachide breviter pubescenti; bracteis ovato-acutis,

glabres, de 2-6 cm. de long et 1-2 mm. de large; racèmes terminaux, plus ou moins denses, de 5-6 cm. de long et en fleurs 3 cm. de large, à entrenœuds de 8-15 mm. de long, rachis courtement pubescent, bractées ovales-aiguës, rapidement caduques, pédicelles floraux de env. 2 mm. de long; calice atteignant sous la fleur env. 8 mm. de long, campanulé, lobe supérieur assez largement ovale, courtement acuminé, décurrent jusque près de la base, de env. 3 mm. de long, lobes inférieurs longuement aigus, lobes latéraux ovales-aigus, denticulés-ciliolés environ aussi longs que le postérieur. Corolle blanchâtre, de env. 18 mm. de long, tube de 11-12 mm. de long, à lèvre supérieure 4-lobulée, lobules arrondis; l'inférieure elliptique de 5-6 mm. de large; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle de env. 20 mm. souvent enroulées, filaments supérieurs à dent arrondie basilaire, peu proéminente, villeuse.

Savane boisée, Sankisia, en terrain argileux, 4 août 1911 (J. Bequaert, n. 173).

Obs. — Cette espèce du groupe « Basilica » est, comme nous l'avons signalé, dans le fragment de clef analytique précédant ces notes, voisine du *O. angustilanceolatum*. Par le port ces deux espèces se différencient assez bien; les dimensions des feuilles, en particulier leur diamètre, donnent un aspect spécial aux deux plantes.

OCIMODON-HIANTIA

Dans ce groupe nous avons cru pouvoir définir quatre espèces nouvelles ayant des affinités avec l'*O. filamentosa* qui paraît, lui aussi, exister dans la région du Katanga.

Nous différencierons les quatre plantes nouvelles comme suit :

Feuilles glabres ou à poils très épars sur le limbe même à l'état jeune.
  Lobes inférieurs du calice densément cotonneux extérieurement . . . . *O. Homblei*
  Lobes inférieurs du calice non cotonneux, mais ciliés sur les bords . . . . *O. Ringoeti*
Feuilles plus ou moins densément velues sur le limbe au moins à l'état jeune.

---

caducis, pedicellis 2 mm. circ. longis, calyce 8 mm. circ. longo, campanulato, lobo superiore late ovato, breviter acuminato, lobis inferioribus acutis, lateralibus ovato-acutis, denticulato-ciliolatis; corolla alba circ. 18 mm. longa, tubo 11-12 mm. longo, lobo superiore 4-lobulato, inferiore elliptico 5-6 mm. lato; staminibus exsertis, filamentis superioribus basi dentatis et villosis.

Inflorescences denses à entrenœuds au maximum de 6 mm. de long . . . . *O. Kapiriense*

Inflorescences allongées, assez lâches à entrenœuds atteignant 3,5 cm. de long. . . . . *O. Vanderysti*

Ocimum Homblei *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plantes formant des touffes à souche subligneuse, rameaux dressés plus ou moins nombreux simples ou ramifiés, atteignant plus de 40 cm. de long, courtement tomenteux à l'état jeune, devenant presque glabres, à écorce fendillée; feuilles sessiles ou très courtement pétiolées, limbe elliptique, cunéiforme à la base et au sommet, entier ou denté vers le sommet, glabre ou à poils très épars sur les deux faces et devenant presque glabre, de 2-7 cm. de long et 1-2,5 cm. de large; racèmes terminaux plus ou moins denses interrompus vers la base, de 4-5 cm. de long et en fleurs, étamines comprises, 4 cm. de large, rachis pubescent, plus ou moins blanchâtre à l'état sec, bractées lancéolées, atteignant 8 mm. de long, plus ou moins rapidement caduques, ciliolées, pédicelles courtement velus-grisâtres de 1-2 mm. de long; calice atteignant sous la fleur env. 4 mm. de long, dents non comprises, campanulé, blanchâtre extérieurement, accrescent après l'anthèse, lobe supérieur elliptique-subaigu, lobe inférieur obtus terminé par deux cils allongés, velu-frangé sur le bord, densément velu, corolle blanche, légèrement violacée, à tube de 4 mm. env. de long, à lèvre supérieure 4-lobulée plus longue que l'inférieure subobtuse. Étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle, à filet de 15-16 mm., filaments supérieurs à dent villeuse assez proéminente.

Plateau de Biano, environs de Katentania, dans la plaine (Homblé, n. 844, — novembre 1912); Élisabethville, savane boisée, 18 mars 1912 (J. Bequaert, n. 267).

Obs. — Cette espèce des « Hiantia » se rapproche, par ses feuilles plus ou moins glabrescentes, de la plante que nous décrirons sous le nom de *O. Ringoeti ;* elle se caractérise par le calice à lobe inférieur fortement velu blanchâtre à l'état sec.

(¹) *Ocimum Homblei ;* Ramis erectis simplicibus vel ramosis ultra 40 cm. longis, juvenilis breviter tomentosis, foliis sessilibus vel breviter petiolulatis, lamina elliptica, basi et apice cuneata, glabra vel sparse pilosa, 2-7 cm. longa et 1-2,5 cm. lata; racemis terminalibus 4-5 cm. longis et usque 4 cm. latis, rachide pubescenti sicco albido, bracteis lanceolatis usque 8 mm. longis, caducis, pedicellis breviter velutino-griseis 1-2 mm. longis, calyce campanulato, lobo superiore elliptico-subacuto, lobo inferiore obtuso, biciliato, margine velutino, extus albido-velutino ; corolla alba vel leviter violacea, tubo 4 cm. circ. longo, labro superiore 4-lobulato, staminibus exsertis, filamentis 15-16 mm. longis, superioribus basi calloso-hirsutis.

Pour l'aspect général, elle se range dans le voisinage du *O. filamentosa*, dont le calice est beaucoup moins velu.

Ocimum kapiriense *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante à souche ligneuse, à rameaux dressés plus ou moins nombreux, de 17-45 cm. de long, courtement tomenteux-grisâtres à l'état sec ; feuilles courtement pétiolées, pétiole courtement tomenteux atteignant 15 cm. de long, limbe denté largement vers le sommet, à poils épars sur la face supérieure, pubescent sur la face inférieure, de 4-11 cm. de long et 2,5-4 cm. de large ; racèmes terminaux denses, plus ou moins coniques, de 2,5-5 cm. de long et atteignant en fleurs 3,5 cm. de large, glomérules contigus, rachis pubescent, bractées velues, rapidement caduques, pédicelles atteignant sous le fruit 2 mm. de long ; calice atteignant sous la fleur env. 5 mm. de long, campanulé, accrescent, lobe supérieur largement ovale, subaigu, de 3-4 mm. de long, lobe inférieur muni de deux dents, les deux lobes courtement tomenteux extérieurement, ciliés ; corolle rosée de env. 11 mm. de long, à tube de 4-5 mm. de long env. ; lèvre supérieure 4-lobulée, l'inférieure un peu plus courte, elliptique, de 5 mm. env. de long ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle de env. 15 mm., filaments supérieurs à dent renflée-villeuse vers la base.

Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1099. — Commun en terre sèche).

Obs. — Cette espèce du groupe « Hiantia » appartient à la série des formes qui se rangent dans le voisinage de *O. filamentosum*. Elle se différencie de cette espèce par ses feuilles plus grandes, à base plus longuement contractée en pétiole. Elle se rapproche, comme nous le disons à propos du *O. Vanderysti*, n'appartenant pas à la flore du Katanga, de cette espèce, se séparant d'elle, entre autres, par la densité de ses inflorescences.

Ocimum Ringoeti *De Wild.* nov. spec. (²).

Plante à souche plus ou moins pivotante, rameaux dressés plus ou moins

---

(¹) *Ocimum kapiriense ;* Basi lignoso, ramis erectis 17-45 cm. longis, breviter tomentosis ; foliis breviter petiolatis, petiolo usque 15 mm. longo, lamina apice dentata supra sparse pilosa, infra pilosa, 4-11 cm. longa et 2,5-4 cm. lata ; racemis 2,5 5 cm. longis conicis et usque 3,5 cm. latis, rachide pubescenti, bracteis velutinis caducis, pedicellis 2 mm. longis, calyce circ. 5 mm. longo campanulato post anthesin accrescenti, lobo superiore late ovato subacuto 3-4 mm. longo, lobo inferiore extus breviter tomentoso ; corolla rosea, tubo 4-5 mm. longo, lobo superiore 4-lobulato, inferiore elliptico circ. 5 mm. longo, staminibus circ. 15 mm. exsertis, filamentis superioribus basi inflatis et villosis.

(²) *Ocimum Ringoeti ;* Ramis erectis plus minus ramosis, foliis sessilibus vel breviter petiolatis irregulariter dentatis, glabris vel sparse pubescentibus sed ramifiés, feuilles sessiles ou courtement pétiolées, très irrégulièrement et peu profondément dentées, glabres ou éparsement pubescentes sur les deux faces, pubescentes-brunâtres sur les nervures surtout sur la face inférieure, de 2-9 cm. de long et 7-18 mm. de large ; racèmes terminaux plus ou moins denses de 3-6 cm. de long et en fleurs, étamines comprises, 4 cm. de large, rachis pubescent, bractées plus ou moins rapidement caduques ; calice accrescent atteignant sous la fleur env. 5 mm. de long, épines non comprises, campanulé, lobe supérieur ovale-arrondi de 3 mm. env. de long, cilié, lobe inférieur velu-grisâtre extérieurement, cilié, à deux cornes d'environ 1,5 mm. de long ; corolle... de 13 mm. de long, à tube de env. 5 mm., à lèvre supérieure 4-lobulée, plus longue que l'inférieure, elliptique de 5 mm. env. de long et 3 mm. de large ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle de 15 mm. env. ; filaments supérieurs à dent arrondie-villeuse à la base très marquée.

Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, coll. Homblé. n. 482, 493, 548. — Brousse) ; Élisabethville, mars 1912 (Homblé, n. 257) ; Broken-Hill, décembre 1907 (Kassner, n. 2028*a*. — Under trees).

Obs. — L'*O. Ringoeti* est, comme le montre notre clef, voisin du *O. Homblei* ; tandis que chez ce dernier les lobes inférieurs du calice soudés sont cotonneux extérieurement, ils sont très peu velus chez l'*O. Ringoeti,* tout en étant nettement ciliés sur les bords.

L'échantillon de la collection Kassner (Herbier de Zurich), que nous avons pu examiner est en fort mauvais état.

Ocimum Vanderysti *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante à souche..., rameaux dressés atteignant plus de 40 cm. de long, plus ou moins densément velus, jaune-brunâtre ; feuilles courtement pétiolées à

---

nervis infra brunneo-pubescentibus, 2-9 cm. longis et 7-18 mm. latis ; racemis densis 3-6 mm. longis et usque 4 mm. latis, rachide pubescenti, bracteis caducis, calyce circ. 5 mm. longo accrescenti, lobo superiori ovato-rotundato, circ. 3 mm. longo, ciliato, inferiori extus velutino, bicornuto ; corolla circ. 13 mm. longa, tubo circ. 5 mm. longo ; lobo superiori 4-lobulato, inferiori 5 mm. circ. longo et 3 mm. lato : staminibus circ. 15 mm. exsertis, filamentis superioribus basi inflati et villosis.

(1) *Ocimum Vanderysti* ; Ramis erectis usque 40 cm. longis plus minus velutinis, foliis breviter petiolatis, apice dentatis, supra et infra pubescentibus, adultis supra sparse pilosis, 3-7 cm. longis et 10-22 mm. latis, racemis plus minus compactis circ. 13 cm. longis, circ. 6-glomerulatis, rachide pubescenti, bracteis caducis ; calyce campanulato, lobo superiori elliptico circ. 4 mm. longo, lobo inferiori bidentato, velutino ; corolla alba 20-11 mm. longa, tubo 4 mm. circ. longo, labro superiori 4-lobulato, inferiori obovato-rotundato, staminibus exsertis, filamentis superioribus basi inflato-dentatis et villosis.

limbe denté vers le sommet, pubescent sur les deux faces, mais à poils plutôt épars sur la face supérieure des feuilles adultes, de 3-7 cm. de long et 10-22 mm. de large ; racèmes terminaux plus ou moins denses, de env. 13 cm. de long et à env. 6 glomérules de fleurs distantes parfois de 3,5 cm. ; rachis pubescent, jaunâtre, bractées caduques ; calice atteignant sous la fleur 5-6 mm. de long, campanulé, lobe supérieur elliptique de env. 4 mm. de long, lobe inférieur un peu plus court à deux dents filiformes, densément velu, les deux lobes fortement accrescents, atteignant 10 mm. de long ; corolle blanche de 10-11 mm. de long, à tube de 4 mm. env., à lèvre supérieure 4-lobée, l'inférieur obovale-arrondie plus courte que la supérieure ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle de 10-11 mm. ; filaments supérieurs à dent assez prononcée, villeuse à la base.

Mukila, janvier 1914 (H. Vanderyst, n. 3273).

Obs. — Si l'on consulte le tableau analytique que nous avons proposé, cet *O. Vanderysti* se range dans le voisinage de notre *O. kapiriense* dont il se différencie par la disposition des fleurs en verticilles distants les uns des autres, les entrenœuds atteignant 3,5 cm. de long.

Ocimum filamentosum *Forsk.*

Bukama, 15 juin 1911 (J. Bequaert, n. 112. — Collines rocheuses).

BECIUM *Lindl.*

Becium obovatum *N. E. Br.*

Riv. Lufira (Rogers, n. 10325).

ACROCEPHALUS *Benth.*

L'étude d'un certain nombre d'espèces de ce genre nous a amené, une fois de plus, à la conclusion que pour les *Acrocephalus*, comme pour la plupart des genres polymorphes de la famille des Labiataceae, une révision spécifique, basée sur l'examen méthodique des types, s'impose.

Nous ne pouvons naturellement songer à l'entreprendre ici, nous devons nous contenter, en décrivant quelques espèces, d'insister sur des caractères sur lesquels leurs auteurs ont attaché trop ou trop peu d'importance.

La classification proposée pour les espèces africaines, connues lors de la rédaction de la « FLORA OF TROPICAL AFRICA », par

M. Baker est relativement obscure et, il est très difficile, à notre avis, de s'en servir pour déterminer une espèce. Pour différencier les *Acrocephalus,* il nous paraît impossible de se baser sur des caractères tels que la disposition des capitules :

Laxly corymbose
Densely corymbose

car il est loin d'être aisé de juger, sans pièces de comparaison, de la valeur des termes *laxly* et *densely*, variant probablement suivant l'état des plantes ;

ou bien encore :

Basal bracts blue purple
» » pale towards the base
» » green and foliaceous to the base.

Car la coloration des bractées, ou leur décoloration, pourrait être due au mode de séchage, ou accentuée par la dessiccation ; en outre, dans bien des cas, la coloration des bractées à l'état vivant, très variable, n'est pas signalée d'une manière précise par les collecteurs qui désignent souvent comme fleurs l'ensemble des corolles et les bractées enveloppantes.

Il est encore tout aussi malaisé de classer les espèces sous les rubriques :

Feuilles linéaires.
— linéaires-lancéolées.
— lancéolées.
— oblongues-lancéolées.
— oblongues.

Elles montrent, sur le papier, une fort belle gradation, mais rarement les auteurs nous renseignent les deux dimensions, seules utiles pour définir avec précision la forme du limbe foliaire.

La classification proposée par M. le D^r^ J. Briquet est certes beaucoup plus rationnelle ; malheureusement, des caractères sur lesquels il se base, avec raison, manquent dans beaucoup de descriptions d'espèces africaines qu'il devient ainsi, en l'absence de matériaux authentiques, impossible de classer dans les subdivisions de M. Briquet et, par suite, de reconnaître avec certitude.

Il n'y a rien d'étonnant à ce que nous ayons été amené à créer dans ce genre un assez grand nombre d'espèces nouvelles, car c'est dans le centre de l'Afrique, et en particulier dans les plaines du sud de l'Équateur, que le genre *Acrocephalus* paraît posséder sa plus grande variation.

Nous avons suivi pour la description, et pour la classification, la plupart des propositions de M. J. Briquet ; elles peuvent être résumées dans le tableau ci-dessous se rapportant aux sous-sections de la :

SECT. I. ACROCEPHALUS *Briquet*

Calice à lèvre supérieure formée par un lobe entier ou à peine émarginé.	
Lèvre inférieure à 1 lobe entier . . , . .	*Holochili* Briq.
Lèvre inférieure fendue ou émarginée . . .	*Meriochili* Briq.
Lèvre inférieure à 4 dents	*Heterochili* Briq.
Calice à lèvre supérieure tridentée.	
Lèvre inférieure émarginée ou fendue . . .	*Odontochili* Briq.
Lèvre inférieure entière, arrondie	*Schizepichili* Briq.

Nous avons fait dessiner, sous un même grossissement, les caractères saillants des bractées, du calice et de la corolle et de la comparaison de ces dessins il résulte, semble-t-il clairement, qu'il n'existe pas de caractères précis dans les bractées, entre les espèces qui typiquement appartiennent à des groupes différents de M. Baker ; il existe, quant à la forme des bractées, des intermédiaires. Dans la corolle, il ne nous paraît pas exister non plus de très grandes différences. Le calice donne au point de vue morphologique des caractères peut-être plus nets, mais ils demanderaient à être étudiés sur de très nombreux échantillons.

Il y a lieu de faire remarquer que dans la nature, les caractères ne sont pas aussi tranchés que dans la clef ; entre le calice à une lèvre entière et le calice à lèvre à dents nettement accusées, on trouve des calices dont les lèvres présentent des sinuosités.

Les plantes décrites ici se rangent de la manière suivante dans la sous-section des *Acrocephalus*.

Odontochili : A. linearifolius, A. kundelungensis, A. Ringoeti, A. Bequaerti, A. Vanderysti, A. Sereti, A. lilacinoides, A. barakaensis, A. doloensis.

Holochili : A. Homblei, A. rosulatus, A. Dewevrei Briq. emend.; A. cyaneobracteatus, A. morumbensis.

HOLOCHILI *Briq.*

Feuilles raméales rares, réduites ou nulles, feuilles basilaires en une paire ou par deux paires en pseudo-rosette ; plantes à tiges simples ou ramifiées au sommet une seule fois.

Feuilles basilaires allongées pétiolées ; limbe de 4-9 cm. de long. . . . . *A. Homblei*

Feuilles elliptiques ou arrondies, subsessiles ; à limbe de 1,4-4,5 cm. de long . . . . . . *A. rosulatus*

Feuilles raméales plus ou moins nombreuses ; feuilles basilaires caduques disparaissant à l'âge adulte ; plantes à tiges plus ou moins fortement ramifiées.

Capitules de env. 10 mm. de diam., relativement peu velus ; feuilles elliptiques lancéolées.

Feuilles à limbe de 25-55 sur 8-21 mm. . . . *A. Dewevrei*

Feuilles à limbe de 25-40 sur 4-8 mm. . . . *A. cyaneobracteatus*

Capitules de env. 15 mm. de diam. très velus ; feuilles elliptiques à limbe de 8-45 sur 6-22 mm. . . *A. morumbensis*

Acrocephalus Homblei *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante herbacée ou sous-ligneuse à la base, racines..., tiges solitaires, dressées, de 20-30 cm. de haut, non ramifiées ou rameuses au soumet, quadrangulaires, velues assez densément, entrenœuds atteignant 24 cm. de long ; feuilles en 1 ou 2 paires, les basilaires assez longuement pétiolées, pétiole atteignant 4 cm. de long, feuilles supérieures plus courtement pétiolées passant aux bractées ; limbe lancéolé de 4-9 cm. de long et 11-20 mm. de large, cunéiforme à la base et au sommet, denté sur les bords, à dents assez rapprochées obtuses, velu assez fortement sur la face inférieure comme sur la face supérieure surtout sur les nervures, celles-ci au nombre de 8 env. de chaque côté de la nervure médiane, plus proéminentes en dessous qu'au-dessus. Capitules à l'extrémité des ramifications au nombre de 3 par tige, subglobuleux, de env. 10 mm. de diam. et de 10 mm. de long, densément velus, bractées externes enveloppant le capitule, ovales-lancéolées densément velues extérieurement, colorées légèrement à la base, à limbe vert réduit de env. 7 mm. de large, velues dans leur partie supérieure; calice bilabié, tubuleux densément velu, de env. 4 mm. de long; lèvre supérieure entière, lèvre inférieure env. de même longeur, arrondie, entière; corolle exserte à tube de 5 mm. de long, labelle entier, lobe supérieur quadrilobé, les deux lobes médians très réduits; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle à filets de 3,5 mm. environ, style plus long que les filets staminaux dépassant légèrement la gorge de la corolle, lobulé.

---

(1) *Acrocephalus Homblei* ; Herbaceus vel basi sublignosus, ramis solitaribus erectis 20-30 cm. longis, quadrangularibus, velutinis ; foliis 1-2-paris, basilaribus plus minus longe petiolatis, petiolo usque 4 cm. longo, superioribus breviter petiolatis, lamina lanceolata 4-9 cm. longa et 11-20 mm. lata, basi et apice cuneata, margine dentata, supra et infra velutina, nervis utrinque circ. 8 ; capitulis 3, subglobulosis, circ. 10 mm. latis et 10 mm. longis, dense velutinis, bracteis externis ovato-lanceolatis extus dense velutinis, internis reductis circ. 7 mm. latis ; calyce bilabiato, tubuloso, velutino, circ. 4 mm. longo ; corolla exserta, tubo circ. 5 mm. longo, labellum integrum, lobo superiori quadrilobato, lobis medianis reductis ; staminibus exsertis, filamentis circ. 3,5 mm. longis ; stylo paullo exserto lobulato.

Chisangwe, février 1912 (Homblé, n. 121. — Terre sèche boisée. — Nom ind. : Mumbo [Kib.]).

Obs. — Espèce du groupe « Holochili », caractérisée par ses tiges velues relativement courtes et pauciflores, ses feuilles basilaires longuement rétrécies en pétiole à la base, les supérieures passant aux bractées florales sessiles; les tiges, du moins dans leurs parties jeunes, et les inflorescences sont fortement velues-brunâtres.

Acrocephalus rosulatus *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante herbacée de 30-50 cm. de haut, racines...; tiges dressées solitaires, simples ou rameuses vers le sommet seulement, quadrangulaires, velues densément, feuilles basilaires par 4 en rosette, sessiles ou très courtement pétiolées, pétiole au maximum de 7 mm. de long, velu; feuilles de la tige nulles ou en une paire, sessiles, limbe largement ovale ou elliptique de 4-7 cm. de long et 14-15 mm. de large, arrondi à la base et au sommet, obscurément denté sur les bords, velu sur la face inférieure comme sur la face supérieure surtout sur les nervures, celles-ci au nombre de 12 environ de chaque côté de la nervure médiane, plus proéminentes en dessous qu'au-dessus, limbe gaufré entre les

---

(¹) *Acrocephalus rosulatus* : Herbaceus, 30-50 cm. altus; ramis erectis solitaribus simplicibus vel apice ramosis, quadrangularibus, dense velutinis; foliis basilaribus 4, rosulatis, sessilibus vel breviter petiolatis, lamina late ovata vel elliptica 4-7 cm. longa et 14-15 mm. lata, basi et apice rotundata, infra et supra velutina, nervis lateralibus utrinque circ. 12; capitulis 10-15 mm. latis et 8-12 mm. longis, dense velutinis, brunneo-luteolis, bracteis ovato-lanceolatis, interioribus ovatis 4-5 mm. longis et circ. 4 mm. latis; calyce bilabiato dense velutino; corolla exserta albida circ. 5 mm. longa, tubo circ. 3 mm. longo, labro superiori quadrilobato extus velutino; staminibus exsertis, filamentis 2-3 mm. longis; stylo breviter bilobulato.

nervures principales et secondaires. Capitules à l'extrêmité des ramifications, souvent réunis par 3 et munis de feuilles basilaires très réduites, de 10-15 mm. de diam. et 8-12 mm. de long, velus densément, d'un brun jaunâtre à l'état sec, bractées externes, enveloppant le capitule, ovales-lancéolées plus ou moins densément velues, décolorées à la base ; bractées internes ovales de 4-5 mm. de long et env. 4 mm. de large densément velues ; calice bilabié, tubuleux, d'environ 1 mm. de long, densément velu, lèvre supérieure et lèvre inférieure arrondies, non dentées, de même longueur ; corolle blanche exserte, d'env. 5 mm. de long, à tube d'env. 3 mm. de long, à lobe inférieur elliptique entier velu extérieurement, lobe supérieur quadrilobé, recourbé, environ aussi long que le supérieur, velu extérieurement ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle, filets de 2-3 mm. env. de long, style plus long que les filaments staminaux, courtement lobulé.

Welgelegen, 1912 (leg. Corbisier, coll. Homblé, n. 626).

Obs. — Cette espèce du groupe « Holochili » se caractérise nettement par : ses feuilles disposées par 4 en rosette basilaire, l'absence de ramifications le long de la tige, et la présence d'une seule paire de rameaux à une assez grande distance de la base. Elle se caractérise aussi par la réunion, au sommet des tiges ou de leurs deux rameaux, des inflorescences en masses plus ou moins ovalaires de 2 cm. de long et 2 cm. de large.

Acrocephalus Dewevrei *Briq.* ex *De Wild.* et *Th. Dwr.* Reliquiae Dewevreanae (1901), p. 187, nom. nud. (¹).

Plante herbacée ou sous-ligneuse à la base, d'env. 50 cm. de haut, racines fibreuses ; tiges dressées, rameuses, quadrangulaires, plus ou moins canaliculées, velues courtement, entrenœuds de 5-11 cm. de long, plus courts sur les ramifications ; feuilles pétiolées, à pétiole de 5-10 mm. de long, velu-cilié sur les bords, limbe ovale ou elliptique de 25-55 mm. de long et 8-21 mm. de large, cunéiforme à la base, plus ou moins décurrent le long du pétiole, aigu ou subaigu au sommet, denté sur les bords, velu sur la face inférieure, à poils épars comme sur la face supérieure, nervures au nombre de 9 env. de chaque côté de

---

(¹) *Acrocephalus Dewevrei ;* Herbaceus vel basi sublignosus, ramis erectis, ramosis, quadrangularibus breviter velutinis ; foliis petiolatis, lamina ovata vel elliptica, 25-55 mm. longa et 8-21 mm. lata, basi cuneata, acuta vel subacuta, margine dentata, supra et infra sparse pilosa, nervis lateralibus utrinque circ. 9, capitulis circ. 10 mm. latis et 12 mm. longis, velutinis, calyce bilabiato, tubuloso, extus velutino, 4,5 mm. circ. longo, labro superiori obscure denticulato, inferiori integro ; corolla exserta, tubo glabro 2-4 mm. longo, lobo superiori 3-dentato, lobo inferiori integro ; staminibus breviter exsertis, filamentis glabris, stylo apice lobulato.

la nervure médiane, plus proéminentes en dessous qu'au-dessus ; capitules terminant les ramifications, assez nombreux, de env. 10 mm. de diam. et atteignant 11 mm. de long, velus, bractées sessiles, les externes enveloppant le capitule, à base décolorée-blanchâtre à l'état vivant, passant aux feuilles, bractées internes réduites presque à la base, légèrement accuminées, de 4-5 mm. de large, velues légèrement sur le dos, ciliées; calice à deux lèvres, tubuleux, velu extérieurement, de 4-5 mm. env. de long, lèvre supérieure un peu plus longue que l'inférieure, arrondie, obscurément denticulée, lèvre inférieure arrondie, non dentée ; corolle exserte à tube glabre de 2-4 mm. de long, à lobe supérieur tri-denté, à lobes ciliolés, le médian légèrement émarginé, lobe inférieur entier; étamines légèrement exsertes, dépassant la gorge de la corolle, déjetées, à filets glabres de 1,5-2 mm. de long, style plus long que les filets staminaux, lobulé au sommet.

Katanga, savane boisée sèche, 18 avril 1912 (J. Bequaert, n. 339) ; Uele, 1910 (Cavalli et Van Grunderbeek).

Obs. — Cette espèce appartient au groupe « Holochili » tel que nous pouvons le définir d'après les données de la révision de M. Briquet. Nous rapportons les échantillons du Katanga et de l'Uele à la plante dénommée *A. Dewevrei*, par le Dr J. Briquet dans l'Herbier du Jardin botanique, bien qu'il semble exister, à première vue, des différences entre elles, par exemple, dans la dimension des fleurs ! Ces différences sont-elles constantes ?

Acrocephalus cyaneo-bracteatus *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante herbacée ou sous-ligneuse à la base, de 30-45 cm. de haut, racines fasciculées ; tiges dressées plus ou moins fortement rameuses, quadrangulaires, velues, plus ou moins canaliculées, à entrenœuds de 2-9 cm. de long ; feuilles courtement rétrécies en pétiole de 3 mm. de long, cilié sur les bords, limbe lancéolé de 25-40 mm. de long et 4-8 mm. de large, cunéiforme, plus ou moins décurrent à la base, subaigu au sommet, obscurément et obtusément denté sur les bords, à poils épars sur la face inférieure et sur la face supérieure, surtout sur les nervures au nombre de 7 env. du côté de la nervure médiane, plus proéminentes en dessous ; capitules à l'extrémité des ramifications, subglobuleux, atteignant 10 mm. de diam. et env. 7-8 mm. de long, velus, bractées externes enveloppant le capitule passant aux feuilles, les plus externes à limbe développé, les plus internes à base seule développée, à terminaison réduite, colorées en bleuâtre à la base ; bractées intérieures tronquées réduites à une base décolorée, de 3-4 mm. de long et 4-5 mm. de large ; calice à deux lèvres, tubuleux, velu extérieurement, de env. 1,5 mm. de long, lèvre supérieure arrondie ciliolée, lèvre inférieure arrondie ciliolée ; corolle exserte, à tube env. de 3 mm. de long, à lobe inférieur entier, subarrondi, lobe supérieur quadrilobé ; étamines assez longuement exsertes, dépassant la gorge de la corolle de 3 mm. env. ; style env. aussi long que les filets staminaux, obscurément trilobulés.

---

(1) *Acrocephalus cyaneo bracteatus ;* Herbaceus vel basi sublignosus, ramis erectis, ramosis, quadrangularibus, velutinis, internodiis 2-9 cm. longis ; foliis in petiolum contractis, lamina lanceolata 25-40 mm. longa et 4-8 mm. lata, basi cuneata apia subacuta, obscure et obtuse dentata, supra et infra sparse pilosa, nervis I utrinque circ. 7 ; capitulis subglobulosis usque 10 mm. latis et 7-8 mm. longis, bracteis basi cyaneis ; calyce bilabiato, tubuloso, extus velutino, circ. 1,5 mm. longo, labro superiori rodundato-ciliolato, labro inferiori rotundato ; corolla exserta, tubo circ. 3 mm. longo, lobo inferiori integro, superiori quadrilobulato, staminibus circ. 3 mm. exsertis, stylo obscure trilobulato.

Élisabethville, mai 1912, dans la brousse (Homblé, n. 304. — Nom ind. : Mununka) ; et 18 avril 1912, savane boisée sèche (J. Bequaert, n. 338).

Obs. — Cette espèce du groupe « Holochili » est voisine de la plante, de la région du Tanganyka, décrite par le Dr J. Briquet, sous le nom de *A. Debeerstii* Briq. ; elle se différencie en premier lieu par des feuilles beaucoup plus étroites, à dentelures moins accusées, ce qui communique à la plante un facies particulier.

Nous possédons en herbier deux fragments seulement du *A. Debeerstii ;* le *A. cyaneo-bracteatus*, par contre, y est représenté par plusieurs échantillons dont les caractères concordent fort bien.

Acrocephalus morumbensis *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante sous-ligneuse à la base, de plus de 25 cm. de haut, racines... ; tiges dressées, assez fortement rameuses, quadrangulaires, velues-tomenteuses, à entrenœuds de 3-4 cm. de long ; feuilles plus ou moins longuement pétiolées, à pétiole de 3-6 mm. de long, velu, limbe elliptique ou obovale, de 8-45 mm. de long et 6-22 mm. de large, cunéiforme à la base et arrondi ou cunéiforme au sommet, denté grossement sur les bords, velu densément sur la face inférieure et sur la face supérieure, surtout les nervures ; celles-ci au nombre de 6-7 de chaque côté de la nervure médiane plus proéminentes en dessous qu'au-dessus ; capitules globuleux à l'extrémité des ramifications, de 15 mm. env. de large et de long, densément velus, bractées externes enveloppant le capitule passant aux feuilles, décolorées à la base ; bractées externes ovales-triangulaires atteignant 6-7 mm. de long, assez densément velues-ciliées ; calice bilabié, tubuleux, de env. 4 mm. de long, lèvre supérieure et lèvre inférieure arrondies, très obscurément denticulées ; corolle exserte de 8 mm. env. de long à tube de env. 5 mm. de long, glabre extérieurement, lobe inférieur entier ou à peine émarginé, cilié au sommet, lobe supérieur quadrilobé, lobe médian peu profondément lobé ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle, à filaments de 3-6 mm. de long ; style exsert plus long que les filaments staminaux, obscurément lobulé.

---

(1) *Acrocephalus morumbensis ;* Herbaceus basi sublignosus, ramis ultra 25 cm. longis, erectis, ramosis, quadrangularibus, velutino-tomentosis ; foliis petiolatis, petiolo velutino, lamina elliptica vel obovata, 8-45 mm. longa et 6-22 mm. lata, basi cuneata apice rotundata vel obtuse cuneata, supra et infra velutina, nervis lateralibus I utrinque circ. 6-7, capitulis globulosis circ. 55 mm. latis, dense velutinis, bracteis internis 6-7 mm. longis dense velutino-ciliatis ; calyce bilabiato tubuloso circ. 4 mm. longo, labro superiori et inferiori obscure denticulatis, rotundatis, corolla exserta, tubo circ. 5 mm. longo, lobo superiori quadrilobulato, filamentis 3-6 mm. longis, exsertis ; stylo exserto.

Mont Morumbe, 11 mai 1908 (Kassner, n. 1942).

Obs. — Cette plante du groupe « Holochili » se caractérise par ses tiges ligneuses à la base paraissant appartenir à un petit arbrisseau, par ses feuilles elliptiques ou obovales relativement très velues et par ses capitules assez densément velus, solitaires à l'extrémité des ramifications de la tige.

ODONTOCHILI

Feuilles linéaires de 2 mm. maximum de diam. dressées, entrenœuds courts de 7-17 mm.	*A. linearifolius*
Feuilles lancéolées ou ovales-lancéolées, de plus de 2 mm. de diam., généralement étalées à l'état adulte.	
Feuilles fasciculées atteignant aux maximum 23 mm. de long, entrenœuds au max. de 20 mm. . .	*A. kundelungensis*
Feuilles atteignant plus de 23 mm. de long, entrenœuds de plus de 20 mm. de long jusque 8 cm.	
Calice à lobe supérieur 3-denté, à lobe médian plus long que les latéraux	*A. Ringoeti*
Calice à lobe supérieur 3-denté, à lo bemédian env. aussi long que les latéraux.	
Lobe médian de la lèvre supérieure de la corolle non bidenté	*A. Bequaerti*
Lobe médian de la lèvre supérieure de la corolle bidenté.	*A. Vanderysti*, *A. Sereti*, *A. lilacinoides*, *A. barakaensis*, *A. doloensis*.

Acrocephalus linearifolius *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante paraissant sous-ligneuse à la base, atteignant plus de 40 cm. de haut, racines... ; tiges dressées peu rameuses vers le sommet seulement, quadrangulaires, glabres, entrenœuds de 5-15 mm. de long ; feuilles dressées, sessiles, étroitement lancéolées, linéaires, de 20-45 mm. de long et 1.5-2 mm. de large, plus ou moins embrassantes à la base, subaiguës, entières ou très obscurément dentées sur les bords recourbés, glabres sur les deux faces, à nervures au nombre de 2 env. subparallèles à la nervure médiane, plus proéminentes en dessous qu'au-dessus, capitules solitaires à l'extrémité des ramifications, petits, de 6-7 mm. de diam. et 6-8 mm. de long, velus, bractées externes enveloppant le capitule passant aux feuilles, légèrement ciliées à la base ; bractées intérieures elliptiques ou triangulaires-ovales, plus ou moins acuminées, les internes de env. 5 mm. de long; calice bilabié, tubuleux, de env. 1,2 mm. de long, velu extérieurement ; lèvre supérieure tronquée, tridentée, lèvre inférieure bi-dentée; corolle exserte à tube de 3 mm. env. de long, à lobe supérieur 4-lobé, émarginure centrale peu profonde, labelle entier, légèrement recourbé ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle, à filets de 2-4 mm. environ de long, style plus long que les filets staminaux à lobes divergents.

Bords du Tanganika, 31 mai 1908 (Kassner, n. 3039. — Herb. Zurich).

Obs. — Cette espèce du groupe « Odontochili » se caractérise par son port éricoïde, ses feuilles dressées, glabres, linéaires.

Acrocephalus kundelungensis *De Wild.* in *Fedde* Repert. XI (1913), p. 506.

Plante paraissant buissonnante et sous-ligneuse à la base, de plus de 20 cm. de haut, racines... ; tiges dressées, plus ou moins rameuses, quadrangulaires, courtement velues, entrenœuds de 4-20 mm. de long ; feuilles opposées, mais paraissant fasciculées aux nœuds, longuement cunéiformes à la base mais non franchement pétiolées, limbe obovale-lancéolé de 7-23 mm. de long et 2-5 mm. de large, obtusément cunéiforme au sommet, entier ou très obscurément denté sur les bords, velu sur la face inférieure et sur la face supérieure, à poils

---

(¹) *Acrocephalus linearifolius ;* Ramis ultra 40 cm. altis, erectis, pauci ramosis, quadrangularibus, glabris, internodiis 5-15 mm. longis ; foliis erectis, sessilibus anguste lanceolatis, linearibus, glabris, 20-45 mm. longis et 1,5-2 mm. latis, apice subacutis, integris, margine revolutis, nervis subparallelibus circ. 2 ; capitulis solitaribus, 6-7 mm. latis, 6-8 mm. longis, bracteis internis circ. 5 mm. longis ; calyce bilabiato tubuloso 1,2 mm. circ. longo, extus velutino, labro superiori 3-dentato, inferiori 2-dentato ; corolla exserta, tubo circ. mm. longo, lobo superiori 4-lobato, labiolo integro ; staminibus exsertis, filamentis 2-4 mm. longis, stylorum lobis divergentibus.

apprimés, plus pâle au-dessous qu'au-dessus, nervures latérales principales au nombre de 3 env. de chaque côté de la nervure médiane, plus proéminentes en dessous qu'au-dessus ; capitules subglobuleux, plus ou moins quadrangulaires portés au sommet des ramifications, velus-brunâtres, de env. 8 mm. de diam. et de long, bractées externes enveloppant le capitule passant aux feuilles. bractées intérieures ovales-aiguës ou suborbiculaires-réniformes de 3-5 mm. de long, velues-ciliées ; calice bilobé tubuleux, densément velu extérieurement, de env. 2 mm. de long, lèvre supérieure courtement 2-dentée ; corolle exserte à tube de 5 mm. env. de long, à lobe supérieur cilié à 4-dents, les 2 médianes courtes, labelle entier recourbé, de env. 5 mm. de long ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle, à filets aplatis de 3-5 mm. de long ; style plus long que les filets staminaux légèrement lobulé au sommet.

Mont Kundelungu, mai 1900 (Kassner, n. 2722. — Sous les arbres. — Herb. Zurich).

Obs. — Cet *Acrocephalus,* du groupe « *Odontochili* », se caractérise par ses feuilles petites, relativement sessiles, obovales-lancéolées et plus ou moins argentées, à l'état sec, par une villosité apprimée.

Acrocephalus Ringoeti *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante vivace, ligneuse à la base, atteignant 1.50 m. de haut, racines...; tiges dressées, plus ou moins fortement rameuses, quadrangulaires, courtement velues, à entrenœuds de 1-3 cm. de long ; feuilles longuement rétrécies à la base se terminant en pétiole pouvant atteindre 10 mm. de long, courtement ailé, courtement velu, limbe y compris le pétiole de 15-70 mm. de long et 2-6 mm. de large, longuement cunéiforme à la base et subaigu au sommet, entier sur les bords, courtement velu sur les deux faces, à poils apprimés, nervures latérales peu marquées sur les deux faces, glandes en creux à l'état sec ; capitules solitaires à l'extrémité des ramifications, mais plus ou moins réunis en masse vers le sommet des tiges, de 8-9 mm. de diam. et 7-8 mm. de long, densément velus-blanchâtres à l'état sec, bractées externes enveloppant le capitule passant aux feuilles, bractées intérieures largement obovales, plus ou moins

---

(¹) *Acrocephalus Ringoeti ;* Ramis erectis plus minus ramosis, quadrangularibus, breviter velutinis, foliis basi in petiolum usque 10 mm. longum attenuatis, lamina c. petiolo 15-70 mm. longa et 2-6 mm. lata, basi longe cuneata apice subacuta, margine integra, supra et infra breviter velutina, pilis appressis, capitulis solitaribus sed apice ramorum congestis, bracteis internis late obovatis, acuminatis ; calyce bilabiato tubuloso extus piloso, 2,5-3 mm. longo, labio superiori trilobato, inferiori bi-dentato ; corolla alba exserta, tubo glabro 4-5 mm. circ. longo, lobo superiori 4-lobato, labiolo integro 2-2,5 mm. longo ; staminibus exsertis, stylo breviter bilobulato.

acuminées de env. 5 mm. de long, densément velues dans leur partie supérieure, ciliées; calice bilabié, tubuleux, à poils allongés sur la face externe, de 2,5-3 mm. de long, lèvre supérieure trilobée un peu plus longue que la lèvre inférieure bidentée ; corolle blanche exserte à tube glabre de 4,5 mm. env. de long, lobe supérieur quadrilobé, les deux lobes médians plus courts que les latéraux, ciliés, labelle entier recourbé de 2-2,5 mm. de long ; style plus long ou aussi long que les filets staminaux, courtement lobé.

Tshinsenda, 9 juin 1912 (J. Bequaert, n. 495) et 3 mai 1912 (Ringoet, n. 3).

Obs. — Nous réunissons sous le même nom ces deux plantes du groupe « Odontochili » qui proviennent peut-être de la même station. A première vue elles semblent différer, car les feuilles de la plante recueillie par M. Ringoet sont en général plus étroites et communiquent un facies particulier à ce type ; cependant dans la plante des récoltes de M. Bequaert, des feuilles étroites se rencontrent sur certains rameaux.

Acrocephalus Bequaerti *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante sous-ligneuse à la base, de plus de 70 cm. de haut, racines à pivot central ligneux et à nombreuses fibrilles ; tiges dressées, ramifiées au sommet seulement, quadrangulaires, velues assez densément, à poils étalés, à entrenœuds de 5-8 mm. de long ; feuilles subsessiles ou très courtement pétiolées ; feuilles principales beaucoup plus grandes que les axillaires les premières étalées, limbe lancéolé de 35-95 mm. de long et 3,5-12 mm. de large, arrondi ou arrondi-subcordé à la base, aigu au sommet très obscurément denté sur les bords, à dents distantes et peu profondes, velu sur la face inférieure comme sur la face supérieure, à poils épars et apprimés, à nervures principales au nombre de plus de 10 de chaque côté de la nervure médiane, un peu plus proéminentes en dessous qu'au-dessus; capitules à l'extrémité des ramifications, peu nombreux, assez densément rapprochés de 10-14 mm, de diam. et 8-10 mm. de long, velus, bractées externes enveloppant le capitule largement ovales-lancéolées atteignant 2 cm. de large à la base, à bords ondulés, colorées en bleu à la base, bractées intérieures obovales-acuminées de 7 mm. env. de long, velues-ciliées, calice globuleux-tubuleux bilabié, de 7-8 mm. de long, lèvre supérieure obscurément 3-dentée plus longue que la lèvre inférieure bidentée ; corolle exserte à tube de 6-7 mm. de long à lobe supérieur trilobé, lobe médian entier, labelle entier légèrement recourbé de env. de 2 mm. de long ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle, à filets de 4-6 mm. de long; style plus long que les filets staminaux, bilobulé, à lobes divergents.

---

(1) A. *Bequaerti ;* Ramis erectis ultra 70 cm. altis, ramosis, quadrangularibus dense velutinus ; internodiis 5-8 mm. longis ; foliis subsessilibus vel breviter petiolatis, lamina lanceolata 35-95 mm. longa, 3,5-12 mm. lata, basi rotundata vel rotundato-subcordata, apice acuta, margine obscure dentata, supra et infra sparse et appresse pilosa, nervis lateralibus utrinque circ. 10 ; capitulis 10-14 mm. latis et 8-10 mm. latis velutinis, bracteis externis basi cyaneis, internis obovato-acuminatis circ. 7 mm. longis, velutino-ciliatis ; calyce globuloso-tubuloso, bilabiato, 7-8 mm. longo, labio superiori obscure 3-dentato, inferiori bidentato ; corolla exserta tubo 6-7 mm. longo, labiolo integro, circ. 2 mm. longo ; staminibus exsertis, filamentis 4-6 mm. longis, stylo bilobulato lobulis divergentibus.

Bukama, 26 mars 1911 (J. Bequaert, n. 117).

Obs. — Espèce du groupe « Odontochili » qui, par l'ensemble de ses caractères, se range dans le voisinage du *A. lilacinus* Oliv., et s'en différencie par des feuilles beaucoup plus longues, des bractées plus développées.

La lèvre supérieure est, dans l'*A. Bequaerti*, 3-lobée, le lobe médian n'étant ni divisé ni même émarginé ; chez l'*A. lilacinus* tel qu'il est figuré pl. 134 du voyage de Speke et Grant, ce lobe est par contre fendu, la lèvre supérieure étant ainsi 4-lobée.

Acrocephalus Vanderysti *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante plus ou moins ligneuse à la base, de plus de 35 cm. de haut, racines..; tiges dressées peu rameuses, quadrangulaires, velues, à entrenœuds de 2-8 cm. de long ; feuilles sessiles ou à peine rétrécies en pétiole, limbe obovale, longuement lancéolé, de 4-8 cm. de long et 7-12 mm. de large, plus ou moins longuement cunéiforme à la base et cunéiforme au sommet, entier sur les bords, courtement et éparsement velu sur la face inférieure et sur la face supérieure, à nervures latérales principales au nombre de 4-5 de chaque côté de la nervure médiane plus proéminentes en dessous qu'au-dessus ; capitules subglobuleux à l'extrémité des ramifications, de env. 8 mm. de diam. et de 10 mm. de long, densément velus, bractées externes enveloppant le capitule ovales, acuminées, densément velues ; bractées internes obovales, subtronquées, cunéiformes au sommet env. de 4 mm. de long, velues ; calice velu extérieurement, tubuleux, de 1,5 mm. env. de long, lèvre supérieure trilobée, lèvre inférieure bilobée ; corolle exserte à tube env. 3,5 mm. de long à lobe supérieur quadrilobé, labelle entier, recourbé ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle à filets de 3-6 mm. env. de long, style lobulé plus long que les filets staminaux.

---

(1) *Acrocephalus Vanderysti* ; Ramis erectis ultra 35 cm. longis pauciramosis, quadrangularibus, velutinis, internodiis 2-8 cm. longis ; foliis sessilibus vel breviter petiolulatis, lamina obovata longe lanceolata, 4-8 cm. longa et 7-12 mm. lata, basi cuneata et apice cuneata, margine integra, supra et infra sparse velutina, nervis lateralibus I utrinque 4-5 ; capitulis subglobulosis, circ. 8 mm. latis et 10 mm. longis, dense velutinis, bracteis internis obovatis, subtruncatis, circ. 4 mm. longis, velutinis, calyce extus velutino tubuloso, 15 mm. circ. longo, labro superiori trilobato, inferiori bilobato ; corolla exserta, tubo circ. 3,5 mm. longo, lobo superiori quadrilobato, labiolo integro, staminibus exsertis, filamentis 3-6 mm. longis,

Kimpako, 21 août 1908 (H. Vanderyst).

Obs. — Espèce du groupe « Odontochili » se caractérisant par ses longues feuilles assez espacées, par sa corolle relativement grande quand on la compare au calice. Nous ne possédons, malheureusement, de cette espèce, qu'une tige peut-être incomplète.

Acrocephalus Sereti *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante sous-ligneuse à la base atteignant 1 m. de haut, à racines... ; tiges dressées plus ou moins rameuses, quadrangulaires, velues, à poils courts, étalés, à entrenœuds de 2,5-8 cm. de long ; feuilles étalées, dressées ou réfléchies, longuement cunéiformes à la base, plus ou moins rétrécies en pétiole, limbe pétiole compris de 2,5-7 cm. de long et 3-11 mm. de large, longuement cunéiforme à la base, aigu au sommet, denté sur les bords, à dents espacées, velu courtement sur la face inférieure comme sur la supérieure, nervures latérales principales au nombre de 6-7 env. de chaque côté de la nervure médiane un peu plus proéminentes en dessous qu'au-dessus ; capitules réunis plus ou moins densément à l'extrémité des ramifications, subglobuleux, atteignant env. 8 mm. de long et de large, densément velus-grisâtres à l'état sec, bractées externes enveloppant le capitule passant aux feuilles, les internes colorées et ondulées sur les bords à la base, ovales-apiculées ; calice bilabié tubuleux de env. 2 mm. de long, velu, lèvre supérieure courtement 3-lobulée, lèvre inférieure bilobulée ; corolle exserte, à tube de 5-6 mm. de long, lobe supérieur 4-denté, les deux lobes médians très courts, labelle entier légèrement recourbé de env. 1 mm.

(¹) *Acrocephalus Sereti ;* Sublignosus usque 1 m. altus, ramis erectis plus minus ramosis, quadrangularibus, velutinis, internodiis 2,5-8 cm. longis ; foliis erectis vel refractis, basi longe cuneatis, c. petiolo 2,5-7 cm. longis et 3-11 mm. latis, lamina apice acuta, margine dentata, supra et infra breviter velutina, nervis lateralibus utrinque 6-7 ; capitulis subglobulosis, circ. 8 mm. longis et latis, dense grise-velutinis ; bracteis internis ovato-apiculatis, coloratis ; calyce bilabiato tubuloso circ. 2 mm. longo, velutino, labro superiori breviter 3-lobulato, labro inferiori bilobulato ; corolla exserta, tubo 5-6 mm. longo, lobo superiori 4-dentato, labiolo integro ; staminibus exsertis, filamentis 2-4 mm. longis ; stylo 2-lobulato.

de long ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle, à filets de 2-4 mm. env. de long ; style plus long que les filaments staminaux, bilobé.

Savanes et terrain rocailleux, entre Bima et Bambili, 25 octobre 1905 (F. Seret, n. 148).

Obs. — Espèce du groupe « Odontochili » se rapprochant du *A. lilacinus* Oliv. (cf. *Speke* et *Grant, loc. cit.*, pl. 134), mais se différenciant par ses feuilles plus grandes, à entrenœuds plus allongés. Par ce dernier caractère notre *Acrocephalus Sereti* se rapproche de l'*A. coeruleus* Oliv. (*loc. cit.* p. 135, tab. 133), dont il se différencierait par le calice à lobe supérieur trilobulé; chez l'*A. coeruleus*, la lèvre supérieure du calice est entière, ce qui écarterait nettement cette plante de l'*A. lilacinus* et de la plante que nous sommes amené à considérer ici comme nouvelle.

Acrocephalus lilacinoides *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante atteignant plus de 40 cm. de haut, racines... ; tiges dressées, peu rameuses, quadrangulaires, courtement velues, à entrenœuds de 4-9 cm. de long ; feuilles longuement cunéiformes à la base, vaguement rétrécies en pétiole, à limbe lancéolé obscurément denticulé sur les bords, de 35-75 mm. de long et 5-12 mm. de large, cunéiforme à la base et au sommet, velu sur la face supérieure comme sur la face inférieure, à poils apprimés, nervures latérales principales au nombre de 6-7 de chaque côté, plus proéminentes en dessous qu'au-dessus ; capitules subglobuleux à l'extrémité des ramifications, de env. 7 mm. de large et de long, bractées externes enveloppant le capitule passant aux feuilles, décolorées à la base à l'état sec, bractées intérieures largement ovales-apiculées, atteignant 9 mm. de long et de large ; calice tubuleux velu, bilabié, de de 1,5-3 mm. de long, lèvre supérieure tridentée plus longue que la lèvre inférieure bidentée ; corolle exserte à tube de 4-5 mm. de long, à lobe supérieur 4-denté, les deux lobes supérieurs soudés, labelle entier, recourbé, de env. 2 mm. de long ; étamines exsertes dépassant la gorge de la corolle, à filets de 3,5-4,5 mm. env., style à 2 lobes, plus long que les filets staminaux.

---

(1) *Acrocephalus lilacinoides ;* Ramis erectis ultra 40 cm. altis, pauciramosis, quadrangularibus, breviter velutinis, internodiis 4-9 cm. longis; foliis basi longe cuneatis, lamina lanceolata, margine obscure denticulata, 35-75 mm. longa et 5-12 mm. lata, basi et apice cuneata, supra et infra appresse pilosa ; capitulis subglobulosis, circ. 7 mm. longis et latis, bracteis externis basi decoloratis, internis late ovatis, apiculatis usque 9 mm. longis et latis ; calyce tubuloso, velutino, bilabiato 2,5-3 mm. longo, labro superiori 3-dentato, labro inferiori 2-dentato, labiolo integro, recurvato, circ. 2 mm. longo, staminibus exsertis, filamentis 3,5-4,5 mm. circ. longis, stylo bilobato.

Kundelungu, 13 mars 1908 (Kassner, n. 2601. — Herb. Zurich).

Obs. — Cette espèce du groupe « Odontochili » paraît se rapprocher surtout de l'*A. lilacinus*, Oliv. tel qu'il est figuré dans SPEKE ET GRANT (*loc. cit.* pl. 134) et pour la forme des feuilles de l'*A. coeruleus* Oliv., figuré pl. 133, du même ouvrage. Chez ces deux espèces, dont la dernière n'est peut-être pas un « Odontochili », les feuilles sont plus serrées, les entrenœuds étant plus courts, et le nombre de feuilles aux nœuds plus considérable.

M. Baker (FLORA OF TROP. AFRICA, V. p. 355) différencie ces deux espèces comme suit :

Leaves ascending.	*A. coeruleus*
Leaves deflexed	*A. lilacinus*

Or, dans les figures citées nous ne voyons pas ce premier caractère ; dans nos échantillons, les feuilles sont étalées ou dressées ; cette disposition pourrait-elle être due aux conditions dans lesquelles s'est faite la préparation ?

Acrocephalus barakaensis *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante sous-ligneuse, de plus de 37 cm. de haut, racines... ; tiges dressées, courtement rameuses vers les extrémités, quadrangulaires, courtement velues, devenant glabres à la base, à entrenœuds de 6-25 mm. de long ; feuilles courtement rétrécies en pétiole à la base, pétiole courtement velu, limbe elliptique-lancéolé, de 18 37 mm. de long et 3-6 mm. de large, cunéiforme à la base et au sommet, denté sur les bords, courtement velu sur les deux faces, à poils apprimés, nervures peu apparentes sur les deux faces ; capitules assez nombreux à l'extrémité des ramifications, de 8 mm. env. de long et de large, velus-grisâtres à l'état sec, bractées externes, colorées à la base, passant aux feuilles ; bractées internes réduites, acuminées ; calice velu extérieurement tubuleux de 3-3,5 mm. de long, lèvre supérieure un peu plus longue que la lèvre inférieure, obscuré-

---

(¹) *Acrocephalus barakaensis ;* Sublignosus ultra 37 cm. altis, ramis erectis, breviter ramosis, quadrangularibus, breviter velutinis demum glabris ; foliis in petiolum breviter attenuatis, lamina elliptico-lanceolata, 10-37 mm. longa et 3-6 mm. lata, basi et apice cuneata, margine dentata, supra et infra appresse pilosa ; capitulis 8 mm. circ. longis et latis, sicco griseo-velutinis, bracteis externis basi coloratis, internis acuminatis, calyce tubuloso extus velutino, 3-3,5 mm. longo, labro superiori obscure 3-dentato, inferiori 2-dentato ; corolla exserta tubo 4 mm, longo lobo superiori 4-dentato, labiolo integro circ. 1,5 mm. longo, staminibus exsertis, filamentis 3-4 mm. longis, stigmatis divergentibus.

ment tri-dentée, lèvre inférieure bi-dentée ; corolle exserte, à tube de 4 mm. env. de long, lobe supérieur 4-denté, les deux lobes médians soudés presque jusqu'au sommet, labelle entier, recourbé. env. de 1,5 mm. de long ; étamines exsertes à filets de 3-4 mm. de long ; style plus long que les filets staminaux à lobes divergents.

Baraka, Tanganyka shore, 3 juin 1908 (Kassner, n. 3062. — Herb. Zurich).

Obs. — Cette espèce du groupe « Odontochili » est voisine de la plante que nous avons dénommée *A. lilacinoides* ; ses feuilles sont plus réduites, en fascicules plus rapprochés; les fleurs, calice et corolle, sont de même type.

Acrocephalus doloensis *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante de plus de 30 cm. de haut, racines... ; tiges dressées, plus ou moins rameuses, quadrangulaires, courtement velues, à entrenœuds de 1,5-4 cm. de long ; feuilles étalées ou réfléchies, plus ou moins dressées à l'état jeune, rétrécies courtement en pétiole, limbe elliptique-lancéolé, cunéiforme à la base et au sommet, de 22-42 mm. de long et 3-10 mm. de large, entier, velu sur les deux faces, à poils apprimés, nervures principales au nombre de 4-5 de chaque côté de la nervure médiane, plus proéminentes en dessous qu'au-dessus ; capitules réunis à l'extrémité des ramifications d'env. 10 mm. de diam. et de long, velus-grisâtres à l'état sec. bractées externes enveloppant les capitules très déformées d'un blanc-rosé, ondulées sur les bords ; bractées internes obovales, suborbiculaires, de env. 4 mm. de long, velues et ciliées au sommet ; calice bilabié, tubuleux, velu extérieurement, de 1,5-2 mm. de long ; lèvre supérieure obscurément trilobulée, lèvre inférieure bidentée ; corolle glabre ou à poils épars, tube env. de 4 mm. de long, à lobe supérieur à 4 dents, les deux dents du milieu très courtes, labelle entier, légèrement recourbé de 1,5-2 mm. de long ; étamines exsertes, à filets de 3-4 mm. env. de long, style plus long que les filets staminaux, à lobes courts.

(¹) *Acrocephalus doloensis ;* Ramis erectis ultra 30 cm. altis, quadrangularibus, breviter velutinis, internodiis 1,5-4 cm. longis ; foliis basi in petiolum contractis ; lamina elliptico-lanceolata, basi et apice cuneata 22-42 mm. longa et 3-10 mm. lata, integra, supra et infra appresse pilosa, nervis lateralibus I circ. 4-5 ; capitulis circ. 10 mm. latis et longis, bracteis externis albido roseis, internis obovato-suborbicularibus, circ. 4 mm. longis, velutinis ; calyce bilabiato tubuloso, 1,5-2 mm. longo ; labro superiori obscure trilobulato, inferiori bidentato ; corolla exserta, tubo 4 mm. longo, lobo superiori 4-dentato, labiolo integro, 1,5-2 mm. longo ; staminibus exsertis, filamentis 3-4 mm. longis. stylo breviter lobato.

Dolo, 9 mars 1905 (Marc. Laurent, n. 395).

Obs. — Cette espèce du groupe « Odontochili » se rapproche par la forme des fleurs, calice et corolle, de celle que nous avons décrite sous le nom de *A. lilacinoides* et par suite du *A. lilacinus* Oliv. *(loc. cit.)*. Elle se différencie de la première par des feuilles plus réduites et plus rapprochées, de la seconde par les feuilles à dentelures moins accusées. Les bractées semblent de coloration analogue car, dans ses notes, M. Marc. Laurent dit : « fleurs d'un blanc-rosé ».

ORTHOSIPHON *Benth.*

Orthosiphon Hocki *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante à souche... ; tiges grêles plus ou moins ramifiées, dressées, atteignant 50 cm. de long, courtement velues ; feuilles opposées, ovales-elliptiques, obtusément cunéiformes à la base ou cordées, serrées, de 1,2-2 cm. de long et 8-16 mm. de large, sessiles, velues sur les deux faces, grisâtres à l'état sec sur la face inférieure ; inflorescences en épis lâches terminaux, atteignant plus de 10 cm. de long, à env. 6 fleurs par verticille, ceux-ci distants de 1-3,5 cm. ; rachis velu, bractées ovales-aiguës environ aussi longues que les pédicelles, ceux-ci grêles, velus, de 3-6 mm. de long ; calice florifère de 7 mm. env. de long, accrescent atteignant au moins 10 mm. de long, tube d'env. 3,5 mm. de long, lobe supérieur longuement ovale de env. 3 mm. de large, accrescent, lobe inférieur à 4 dents aiguës ; corolle à tube de env. 8 mm. de long, plus long que le tube du calice, lobes arrondis, velus-ciliés ; étamines insérées dans le tube ne dépassant pas la corolle ; style claviforme inclus.

Élisabethville, octobre 1911 (Ad. Hock).

Obs. — Par l'ensemble de ses caractères floraux, cette espèce se rapproche de notre *O. Homblei*, mais l'aspect des deux plantes est tout différent. L'*O. Hocki* est plus élancé, mais les feuilles sont

---

(¹) *Orthosiphon Hocki ;* Ramis gracilibus plus minus ramosis, erectis usque 50 cm. longis, breviter velutinis ; foliis oppositis, ovatis vei ellipticis basi obtuse cuneatis vel subcordatis, 1,2-2 cm. longis et 8-16 mm. latis, sessilibus supra et infra velutinis ; inflorescentiis spiciformibus, laxis, usque 10 cm. longis, verticillis 6-floris 1-3,5 cm. distantibus, rachide velutino, bracteis ovato-acutis, pedicellis 3-6 mm. longis ; calyce florifero circ. 7 mm. longo, accrescenti et usque 10 mm. longo, tubo 3,5 mm. longo, lobo superiori ovato circ 3 mm. lato, accrescenti, lobo inferiori quadri-acuto-dentato ; corollae tubo circ. 8 mm. longo, lobis rotundatis velutino-ciliatis ; staminibus et stylus non exsertis.

comme nous le marquons dans la diagnose beaucoup plus petites et velues plus fortement au moins sur la face inférieure.

Orthosiphon Homblei *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante vivace à souche sous-ligneuse, à racines rhizomateuses, radicelles longues et grêles ; tiges grêles peu ou pas ramifiées, dressées, au maximum de 20 cm. de long, courtement velues. Feuilles opposées, elliptiques, profondément serrées, dents aiguës simples ou doubles, de 1-4 cm. de long et 8 40 mm. de large, sessiles ou très courtement pétiolulées, glabres sur la face supérieure, à quelques poils très épars sur la face inférieure ; inflorescences en grappes términales assez lâches, verticilles de 4-6, fleurs au nombre de 5 6, distants de 1-2 cm., rachis courtement velu, pédicelle de 4-6 mm. de long, courtement velu, bractées supérieures lancéolées environ aussi longues que le calice ; calice florifère éparsement et courtement velu extérieurement, de env. 5-6 mm. de long, accrescent, atteignant 8 mm. de long, à tube de 2,5 4 mm. ; lobe supérieur ovale, cilié, plus ou moins décurrent, lobe inférieur à 4 dents environ aussi longues que le tube, aiguës ; corolle de 8-9 mm. de long, à tube velu extérieurement de env. de 6 mm. de long, plus long que le tube du calice, lobe supérieur arrondi, lobes inférieurs plus courts ; étamines non exsertes, ne dépassant guère le tube de la corolle ; style claviforme.

Dans la plaine aux environs de Katentania (Biano), novembre 1912 (Homblé, n. 776 et 777).

Obs. — Cette espèce, par ses feuilles sessiles ou subsessiles, sa corolle en général un peu moins de 2 fois aussi longue que le calice, ses feuilles ovales ou largement ovales, se rapproche des *O. menthaefolius* Briquet et *scabridus* Briquet ; la première possède des feuilles pubescentes sur les deux faces, la seconde des feuilles scabres sur les deux faces, aucun de ces caractères n'est présent dans la plante nouvelle.

(¹) *Orthosiphon Homblei ;* Radicis rhizomatosis, radicellis gracilibus ; ramis erectis, gracilibus, pauci vel non ramosis, usque 20 cm. longis, breviter velutinis ; foliis oppositis, ellipticis, profonde serratis, 1-4 cm. longis et 8-40 mm. latis, sessilibus vel breviter petiolulatis, supra glabris, infra sparse pilosulis ; inflorescentiis spicatis, verticillis 5-6, 1-2 cm. distantibus, floribus albidis 4-6-verticillatis, rachide breviter velutino ; calyce fructifero extus sparse et breviter velutino, 5-6 mm. longo, accrescenti et usque 8 mm. longo, lobo superiori ovato ciliato, inferiori 4-dentato ; corolla 8-9 mm. longa, tubo extus velutino circ. 7 mm. longo, lobo superiori rotundato ; staminibus non exsertis, stylo apice claviformi.

Orthosiphon tomentosus *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante à souche ligneuse, à racines tubéreuses atteignant plus de 1 cm. de diam., tiges grêles peu ramifiées, dressées, atteignant 30 cm. de long, courtement velues; feuilles opposées, ovales ou ovales-elliptiques, dentées, à dents larges et plus ou moins distantes, de 2-4,5 cm. de long et 8-35 mm. de large, sessiles ou très courtement pétiolulées, velues sur les deux faces, plus fortement en-dessous qu'au-dessus, grisâtres en-dessous, les supérieures passant aux bractées; inflorescences en racèmes terminaux, lâches, d'env. 4 cm. de long à 2-4 fleurs par verticille, ceux-ci distants de 7-20 mm., rachis velu, pédicelle grêle atteignant sous la fleur 6 mm. de long; bractées supérieures ovales-elliptiques, aiguës, velues; calice florifère de 5-6 mm. de long, accrescent, à tube de 3 mm. env. de long, velu extérieurement, lobe supérieur elliptique-ovale, subdécurrent, lobe inférieur à 4 lobes aigus; corolle à tube env. aussi long que le calice, lobes de 3 mm. env. de long, les deux supérieurs soudés et un peu plus longs que les 3 inférieurs; étamines à filets courts ne dépassant pas la corolle; style en massue.

Plateau de Biano, Esschen-Plateau, novembre 1912 (Hombté, n: 888. — Dans la plaine).

Obs. — Cette espèce appartient au même groupe que les *O. Hocki* et *Homblei*; elle se différencie assez facilement par les caractères tirés des feuilles; ces dernières sont molles et velues surtout sur la face inférieure blanchâtre.

Chez le *O. Homblei*, les feuilles sont moins velues, plus arrondies; chez le *O. Hocki* elles sont plus petites, la plante plus élancée.

PLECTRANTHUS *L'Hérit.*

Plectranthus floribundus *N. E. Br.*

Nieuwdorp (Rogers, n. 10407); Nieuwdorp, 29 août 1912 (Ringoet, n. 1. — Terres sablonneuses).

(¹) *Orthosiphon tomentosus*; Radicis tuberosis; ramis erectis pauci ramosis, usque 30 cm. alt, breviter velutinis; foliis oppositis, ovatis vel ovato-ellipticis, late dentatis, 2-4,5 cm. longis et 8-35 mm. latis, sessilibus vel breviter petiolulatis, supra et infra velutinis; inflorescentiis racemosis, laxis 4 cm. circ. longis, floribus 2-4 verticillatis, pedicellis usque 6 mm. longis, bracteis superioribus ovato-ellipticis acutis, villosis; calice fiorifero 5-6 mm. longo, accrescenti, tubo 3 mm. longo extus pubescenti, lobo superiori elliptico-ovato, lobo inferiori 4-lobato; corollae lobis circ. 3 mm. longis, staminibus breviter stipitatis, non exsertis, stylo apice incrassato.

Plectranthus modestus *Baker.*
Élisabethville, novembre 1911 (Ad. Hock).

AEOLANTHUS *Mart.*

Aeolanthus violaceus *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante vivace, souche .. ; tiges dressées, ligneuses, plus ou moins ramifiées atteignant plus de 55 cm. de long ; feuilles opposées rétrécies en pétiole à la base, courtement velues sur les deux faces, plus fortement en dessous qu'au-dessus, limbe de 4-7 cm. de long et 1,5-4 cm. de large, obscurément denté sur les bords ; inflorescences terminant la tige et ses ramifications, densément réunies formant un épi de 5-7 cm. de long et 20-24 mm. de large ; bractées florales persistantes, atteignant 8 mm. de long, plus ou moins colorées en violet, courtement tomenteuses ; calice florifère tubuleux-campanulé d'env. 2 mm., se fendant à la base après l'anthèse et laissant une cupule basilaire ; corolle de 12-13 mm. de long, à tube de 8-9 mm. de long, lèvre supérieure courtement 4-lobulée, lèvre inférieure elliptique-arrondie de 4 mm. env. de long ; étamines dépassant la gorge de la corolle, environ aussi longues que les lobes ; style courtement bifide ; nucules comprimés.

Plateau de biano (Esschen), décembre 1912 (Homblé, n. 901. — Vallée boisée).

Obs. — Par un certain nombre de ses caractères, cette espèce se rapproche du *Ae. floribundus* Briq., dont elle se différencie par des feuilles plus longues et plus larges, par la corolle à tube plus court et à lobe inférieur un peu moins développé, dans les échantillons du *Ae. violaceus* que nous avons pu étudier, les inflorescences compactes ne dépassant pas 5-6 cm. de long, elles atteindraient 15 cm. dans l'espèce créée, par M. Briquet, sur des échantillons récoltés en Angola par Buchner.

(¹) *Aeolanthus violaceus ;* Ramis erectis lignosis, plus minus ramosis, usque 55 cm. longis ; foliis oppositis basi in petiolum contractis, supra et infra velutinis, lamina 4-7 cm. longa et 1,5-4 cm. lata, margine obscure dentata ; inflorescentiis spicatis 5-7 cm. longis et 20-24 mm. latis ; bracteis persistentibus usque 8 mm. longis, violaceis, breviter tomentosis ; calyce florifero tubuloso-campanulato circ. 2 mm. longo basi fisio demum cupulato ; corolla 12-13 mm. longa, tubo 8-9 mm. longo, labro superiori breviter 4-lobulato, inferiori elliptico-rotundato 4 mm. longo ; staminibus exsertis, stylo breviter bifido, nuculis compressis.

Aeolanthus Homblei *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante vivace à souche plus au moins renflée, tubéreuse, atteignant 4 cm. de diam. ; tige dressée solitaire, simple ou ramifiée, de 14-30 cm. de long ; feuilles opposées en deux paires, basilaires, les externes souvent réduites elliptiques lancéolées, n'atteignant parfois que 1 cm. de long et 3 mm. de large, les internes. arrondies-elliptiques, irrégulièrement denticulées sur les bords atteignant 10 cm. de long et 9 cm. de large, velues, plus ou moins scabres sur les deux faces, ciliées sur les bords ; feuilles raméales nulles ou réduites, passant aux bractées florales ; inflorescences terminant la tige et ses ramifications, formant un épi simple ou composé plus ou moins lâche, occupant les 2/3 de la longueur des rameaux ; bractées florales persistantes, lancéolées, de 4-5 mm. de long, velues, ciliées ; fleurs solitaires, calice florifère d'env. 3 mm. légèrement accrescent après l'anthère, se fendant tranversalement après l'anthèse et laissant une cupule à bords irréguliers d'env. 2 mm. de haut ; corolle mauve de 13 mm. de long à tube de 8-9 mm. de long, velu extérieurement, lèvre supérieure 4-lobulée, lèvre inférieure elliptique de env. 7 mm. de long et 4-5 mm. de large ; étamines insérées à la gorge de la corolle, à filet libre de 1,5 mm. de long ; style courtement bifide, ne dépassant guère la gorge de la corolle ; nucules comprimés.

Plateau de Biano, env. de Katentania (Homblé, n. 832. — Dans la plaine ; et 742. — Vallée boisée) ; Élisabethville, octobre 1911 (Ad. Hock. — Dans les Dembos).

Obs. — Cette espèce se caractérise en premier lieu par sa rosette de 4 feuilles basilaires, dont les deux supérieures sont les plus développées.

Peut-être la plante recueillie par M. Hock, échantillons réduits à feuilles moins développées, est-elle différente de la plante trouvée par M. Homblé ; elles se différencient par la forme des feuilles de la paire externe. Dans la plante des récoltes de M. Hock les feuilles sont obovales ou largement elliptiques ; chez la plante de M. Homblé, elles sont lancéolées-linéaires.

(¹) *Aeolanthus Homblei ;* Tuberosus ; ramis erectis, solitaribus vel ramosis, 14-30 cm. longis ; foliis oppositis, basilaribus 1-10 cm. longis et 3 mm.-9 mm. latis, margine irregulariter denticulatis, supra et infra scabris, ciliatis ; inflorescentiis spiciformibus, laxis ; bracteis persistentibus lanceolatis 4-5 mm. longis, velutinis, ciliatis ; calyce florifero circ. 3 mm. post anthesin accrescenti, basi cupulati ; corolla circ. 13 mm. longa, tubo extus velutino, labro superiori 4-lobulato, inferiori elliptico; staminibus filamentis 1,5 mm. longis , stylo breviter bifido, non exserto, nuculis compressis.

De plus amples documents sont nécessaires pour affirmer la constance et la valeur de ce caractère.

COLEUS *Lour.*

Coleus efoliatus *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante atteignant 40-50 cm. de haut, à souche pivotante à racines fibreuses ; tiges dressées, très ramifiées dès la base, rameaux brunâtres à l'état sec, quadrangulaires, courtement pubescentes; feuilles absentes pendant la floraison et la fructification ; inflorescences terminant la tige et les ramifications ; racèmes partiels de 6 cm. au maximum de long à rachis pubescent glanduleux, fleurs solitaires ou par fascicules pauciflores, opposées ou subopposées, bractées plus ou moins rapidement caduques, de env. 1 mm. de long, lancéolées, courtement ciliées ; fleurs pédicellées à pédicelle, courtement velu-glanduleux, atteignant sous la fleur env. 4 mm. de long ; calice courtement velu-glanduleux de env. 2,5 mm. de long pendant l'anthèse, à lobe supérieur ovale-aigu cilié, lobes latéraux ovales-lancéolés aigus, aussi longs que le lobe postérieur, lobes antérieurs aigus soudés sur environ la moitié de leur longueur, cilié ; calice accrescent après l'anthèse à dents s'allongeant très fort ; corolle blanche à tube peu recourbé à la base, glabre, dépassant la gorge du calice, lèvre inférieure cymbiforme ciliée, de env. 3 mm. de long, lèvre supérieure très courte, étamines incluses à filets soudés en gouttière à la base sur env. 1 mm. de long, libres sur env. 2 mm.

Élisabethville, mai 1912 (Homblé, n. 290. — Brousse) ; Welgelegen, 6 juin 1912 (J. Bequaert, n. 486. — Savane boisée sèche) ; Mont Morumbe, 12 mai 1900 (Kassner, n. 2951).

Obs. — Cette espèce est indiscutablement affine de celle que nous décrivons sur le nom de *C. kisanfuensis*. Elle se caractérise par l'absence de feuilles au moment de la floraison et de la fructification, par le tube corollin presque droit, les étamines à filets libres courts à soudure peu marquée, mais visible. Les 4 lobes antérieurs

---

(¹) *Coleus efoliatus ;* Radicis fibrosis, ramis erectis usque 50 cm. longis, ramosis, breviter pubescentibus ; foliis... ; inflorescentiis terminalibus, racemis lateralibus usque 6 cm. longis, rachide pubescenti-glanduloso, floribus solitaribus vel pauci-fasciculatis, oppositis vel suboppositis, bracteis plus minus rapide caducis circ. 1 mm. longis, lanceolatis ; pedicellis breviter glanduloso-velutinis, 4 mm. circ. longis ; calyce breviter glanduloso-velutino, 2,5 mm., accrescenti lobo superiori ovato-acuti, ciliato, lateralibus ovato-lanceolatis, acutis, lobis anterioribus acutis ; corolla cyanea, labro inferiori cymbiformi ciliato 3 mm. longo, superiori brevissimo, staminibus inclusis.

du calice sont très aigus et s'allongent encore après l'anthèse, leur pointe acérée pouvant atteindre, dans la partie libre, 3 mm. de long.

Les poils glanduleux se rencontrent chez les deux espèces.

Coleus kisanfuensis *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante à souche subligneuse ; tiges florifères dressées atteignant 22 cm. de long, privées de feuilles, ramifiées à la base seulement, à rameaux obscurément quadrangulaires, courtement mais assez densément pubescents : feuilles... ; inflorescences atteignant 15-16 cm. de long, fascicules opposés ou subopposés, subsessiles ou sessiles ; bractées ovales-elliptiques caduques, de 5-7 mm. de long et 3-4 mm. de large, velues-ciliées ; fleurs pédicellées, à pédicelle velu, atteignant jusque 10 mm. de long ; calice de 3-4 mm. de long pendant l'anthèse, à lobe supérieur largement ovale-obtus, velu, lobes latéraux aigus, ciliés, aussi longs que le terminal, lobes antérieurs aigus, ciliés, soudés sur la moitié environ de leur longueur, aussi longs que le lobe terminal, calice accrescent après l'anthèse ; corolle de 11 mm. env. de long à tube recourbé, glabre, dépassant la gorge du calice, lèvre inférieure cymbiforme de env. 8 mm. de long, lèvre supérieure arrondie ; étamines incluses à filets soudés en gouttière à la base sur env. 2 mm. ; filets libres de 7 8 mm. de long.

Kisanfu, septembre 1911 (A. Hock. — Dembo) ; Élisabethville, septembre 1911 (Hock. — Lieux inondés en saison des pluies).

Obs. — Cette espèce qui se fait remarquer par l'absence de feuilles au moment de la floraison, se caractérise par ses fleurs relativement développées, son calice à 4 lobes inférieurs subégaux et aigus. La gouttière formée par la soudure de la base des filets staminaux est peu développée par rapport à la longueur des filets libres.

(¹) *Coleus kisanfuensis ;* Ramis floriferis erectis usque 22 cm. longis, efoliatis, ramosis, ramis obscure quadrangularibus, breviter sed dense pubescentibus, foliis... ; inflorescentiis 15-16 cm. longis, fasciculis oppositis vel suboppositis, subsessilibus vel sessilibus : bracteis ovato-ellipticis, caducis, 5-7 mm. longis et 3-4 mm. latis, ciliato-velutinis ; floribus pedicellatis, pedicello usque 10 mm, longo ; calyce 3-4 mm. longo, lobo superiori late ovato, velutino, lateralibus acutis, anterioribus acutis, coalitis ; corolla 11 mm. circ. longa, glabra, labro inferiori cymbiformi circ. 8 mm. longo, superiori rotundato ; staminibus inclusis ; filamentis 7-8 mm. longis.

Coleus Homblei *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante à souche paraissant pivotante, à radicelles fibreuses ; tiges dressées ramifiées dès la base ; rameaux brunâtres à l'état sec, quadrangulaires, pubescents, à poils courts ; feuilles opposées pétiolées, à pétiole de 0,3-2 cm. de long, courtement pubescent, limbe elliptique de 1-5,5 cm. de long et 0,6-3,5 cm. de large, cunéiforme à la base, plus ou moins décurrent le long du pétiole, largement denté sur les bords, velu sur la face supérieure comme sur la face inférieure, les feuilles supérieures passant insensiblement aux bractées florales ; inflorescences en longs épis terminant les tiges et leurs ramifications, atteignant 17 cm. de long, fleurs subfasciculées, à fascicules opposés ou subopposés, parfois très courtement pédonculés ; bractées ovales-aiguës, caduques, de env. 6 mm. de long et 3 mm. de large ; fleurs pédicellées, à pédicelle velu, d'env. 2-5 mm. de long ; calice bilabié de 2-3 mm. de long pendant l'anthèse, à lobe supérieur subobtus, velu sur les bords ; lobes latéraux plus courts que le terminal, subobtus; lobes inférieurs plus longs que les latéraux, aigus, soudés sur un peu plus du tiers de leur longueur ; paraissant légèrement accrescent après l'anthèse ; corolle bleue ou mauve, à tube recourbé, glabre, dépassant la gorge du calice, élargi au sommet ; lèvre inférieure cymbiforme, d'env. 3-6 mm. de long, lèvre supérieure obscurément trilobée, d'env. 1,5 mm. de long ; étamines incluses, filets soudés à la base en gouttière sur env. 1 mm. de long ; filets libres d'env. 4 mm. de long.

Élisabethville, brousse, février 1912 (Homblé, n. 210) ; Plateau de Biano, Tshisinka, février 1913 (Homblé, n. 1259. — Partie boisée. Commun).

Obs. — Cette espèce appartient à un groupe dont les fleurs possèdent un calice nettement bilabié, les trois lobes postérieurs relativement obtus, les deux lobes antérieurs aigus plus ou moins soudés.

La soudure des filets staminaux est faible, mais cependant nette.

(¹) *Coleus Homblei ;* Ramis erectis ramosis ; ramis quadrangularibus breviter pilosis ; foliis oppositis petiolatis, petiolo 0,3-2 cm. longo, breviter pubescenti, lamina elliptica 1-5,5 cm. longa et 0,6-3,5 cm. lata, basi cuneata margine dentata, supra et infra velutina ; inflorescentiis longe spicatis terminalibus usque 17 cm. longis, floribus subfasciculatis, fasciculis breviter pedicellatis ; bracteis ovato-acutis, caducis, circ. 6 mm. longis et 3 mm. latis ; floribus pedicellatis ; calyce bilabiato 2-3 mm. longo ; lobo superiori subobtuso, lobis lateralibus subobtusis, inferioribus acutis coalitis ; corolla cyanea, glabra, labro inferiori cymbiformi, 3-6 mm. longo, superiori obscure trilobato ; staminibus basi coalitis.

Coleus Ringoeti *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante à souche fibreuse ; tiges dressées de plus de 60 cm. de haut inflorescence comprise, non ramifiées, quadrangulaires, pubescentes, à poils courts ; feuilles pétiolées à pétiole atteignant 3,5 cm. de long, velu, limbe rougeâtre-violacé à l'état sec, ovale, tronqué ou subcordé à la base, plus ou moins décurrent le long du pétiole, subaigu au sommet atteignant 5,5 cm. de long et env. 4 cm. de large, largement denté sur les bords à dents obtuses, à poils épars sur la face supérieure et sur la face inférieure ; légèrement velu sur les nervures, glandes peu marquées ; inflorescences terminales de 15 cm. de long à rameaux opposés une fois dichotomes, pédoncule commun de 2-4 mm. de long, bractées rapidement caduques, fleurs pédicellées, à pédicelle atteignant env. 4 mm. de long ; calice de 2-3 mm. de long pendant l'anthèse, à lobe supérieur largement ovale, obtus, lobes latéraux plus courts que le terminal, obtus, lobes inférieurs soudés sur les deux tiers de leur longueur environ, aussi longs que le terminal ; calice accrescent après l'anthèse atteignant 5 mm. de long ; corolle d'env. 9 mm., à tube recourbé, glabre, dépassant la gorge du calice, lèvre inférieure cymbiforme, d'env. 4 mm. de long, lèvre supérieure obtusément 4-lobulée ; étamines incluses à filets soudés en une gouttière d'env. 1 mm. de long, filets libres d'env. 3 mm. de long.

Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 546. — Brousse).

Obs. — Cette espèce, dont nous possédons dans l'herbier du Jardin botanique un seul exemplaire, appartient au groupe dont les trois sépales postérieurs sont obtus. Les deux sépales antérieurs, soudés sur au moins deux tiers de la longueur, sont aigus au sommet.

Coleus termetophilus *De Wild.* nov. spec. (²).

Plante à souche plus ou moins pivotante, racines fibreuses ; tige dressée généralement peu ramifiée, à rameaux brunâtres à l'état sec, quadrangulaires, pubescents, à poils courts ; feuilles opposées longuement pétiolées, à pétiole de

---

(²) *Coleus Ringoeti* ; Ramis erectis ultra 60 cm. longis, quadrangularibus, breviter pubescentibus, foliis petiolatis, petiolo usque 3-6 cm. longo, velutino, lamina ovata truncata vel subcordata, apice subacuta, usque 5,5 cm. longa et 4 cm. lata, margine grosse dentata, supra et infra sparse pilosa ; inflorescentiis usque 15 cm. longis, ramis oppositis, dichotomis, bracteis caducis ; floribus pedicellatis, pedicello circ. 4 mm. longo ; calyce 2-3 mm. longo, lobo superiori late ovato, lateralibus brevioribus et obtusis, inferioribus coalitis ; corolla circ. 9 cm. longa, tubo recurvato, glabro, labro inferiori cymbiformi, superiori obtuse 4-lobulato, filamentis basi coalitis, pars libera circ. 3 mm. longa.

(¹) *C. termetophilus* ; Radicibus fibrosis, ramis erectis, pauci ramosis, ramis quadrangularibus, pubescentibus ; foliis oppositis, longe petiolatis, lamina late

3-6 cm. de long, limbe courtement pubescent, largement ovale, tronqué à la base, aigu cunéiforme au sommet, de 1-5 cm. de long et 0,5-5 cm. de large, largement denté sur les bords, à quelques poils épars sur la face supérieure, courtement pubescent au moins sur les nervures à la face inférieure ; racèmes de 6-15 cm. de long terminant la tige et les ramifications, généralement solitaires à l'extrémité de la tige principale ; fascicules floraux opposés, sessiles ou subsessiles, parfois ramifiés, distants au maximum de 20 mm. les uns des autres, bractées plus ou moins rapidement caduques d'env. 4 mm de long et de 2,5 mm. de large ; fleurs pédicellées, à pédicelle courtement pubescent, atteignant 4 mm. de long, calice d'env. 2 mm. de long pendant l'anthèse, lobe supérieur largement ovale, subobtus, cilié, lobes latéraux obtus, beaucoup plus courts que les lobes inférieurs et terminal, lobes inférieurs environ aussi longs que le lobe postérieur, soudés sur plus des deux tiers de leur longueur, aigus ; calice accrescent après l'anthèse ; corolle d'un bleu-violacé, à tube recourbé légèrement pubescent, dépassant la gorge du calice, lèvre inférieure cymbiforme d'env. 5 mm. de long, lèvre supérieure d'un peu plus de 1 mm. de long ; étamines incluses à filets soudés à la base sur env. 1 mm. de long, filets libres de 3 mm. de long.

Élisabethville, mars 1912 (Homblé, n. 220. — Sur termitière. Feuilles dégageant par froissement une odeur très désagréable. — Nom. ind. : Kuibwet) ; Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 154. — Dans le creux des arbres. — Fleurs bleues) ; Shinsenda, 27 février et mars 1912 (Ringoet, n. 397 et coll. Homblé, n. 534 leg. Ringoet) ; Kundelungu, swampas, 1908 (Kassner, n. 2618).

Obs. — Ce dernier échantillon provenant de l'Herbier de Zurich, mis à notre disposition par M. le Dr H. Schinz, diffère un peu des autres par la forme des ramuscules floraux ramifiés.

La plante appartient au groupe d'espèces dont les trois sépales postérieurs sont obtus, les deux antérieurs aigus, soudés sur une

---

ovata, basi truncata, apice cuneato-acuta, 1-5 cm. longa, margine grosse dentata, supra sparse pilosa, infra breviter pubescenti ; racemis terminalibus, floribus fasciculatis, fasciculis oppositis, sessilibus vel subsessilibus ; bracteis caducis, circ. 4 mm. longis ; floribus pedicellatis, breviter pubescentibus ; calyce circ. 2 mm. longo ; lobo superiori late ovato-subobtuso, lobis lateralibus obtusis, lobis inferioribus coalitis ; corolla albido-violacea, tubo recurvato, labro inferiori cymbiformi, circ. 5 mm. longo, superiori circ. 1 mm. longo ; staminibus inclusis, filamentis basi coalitis.

grande longueur ; les filets staminaux sont soudés en gouttière à la base, leur partie libre relativement longue (¹).

PYCNOSTACHYS *Hook.*

Pycnostachys Bequaerti *De Wild.* nov. spec. (²).

Plante à souche ligneuse, à racines plus ou moins développées, rameuses, à tiges solitaires, plus ou moins nombreuses au départ de la souche, dressées, simples, atteignant plus de 90 cm. de long, entrenœuds de 1-9 cm. de long, courtement velus-brunâtres, feuilles dressées, étalées ou réfléchies, opposées, longuement lancéolées, sessiles ou rétrécies en un court pétiole, limbe densément mais courtement tomenteux sur les deux faces, de 6-15 cm. de long et 5-20 mm. de large, plus ou moins arrondi à la base et très aigu au sommet, à dents espacées ; inflorescences en épis denses, oblongs-coniques, de 1,5 cm. de long et 3,5 cm. de large en fleurs ; bractées linéaires, ciliées, plus longues que les boutons ; calice florifère à tube campanulé d'un peu plus de 1 mm. de long, pubescent extérieurement, dents subulées d'env. 3 mm. de long, accrescentes ; corolle bleue dépassant la gorge du calice de plus de 15 mm., coudée vers le tiers inférieur, lèvre supérieure plus courte que la lèvre inférieure, à 4 lobes peu profonds, lèvre inférieure ovale-oblongue de 8-10 mm. de long, ciliée sur la carène ; étamines à filet court d'env. 5 mm. de long, exsertes, se libérant à deux hauteurs différentes ; style dépassant les étamines, à stigmate légèrement lobulé.

Shinsenda, 8 mai 1912 (J. Bequaert, n. 425. — Dembo) ; et 2 mai 1912 (Ringoet, n. 2).

Obs. — M. Baker (in Flora of trop. Africa, V. p. 379), classe les espèces de ce genre en trois groupes :

(¹) Nous possédons en portefeuille la description de plusieurs espèces nouvelles de ce même genre ; nous publierons prochainement ces diagnoses en même temps que des remarques générales sur les caractères du genre *Coleus* et des genres voisins.

(²) *Pycnostachys Bequaerti* ; Racemis erectis usque 90 cm. longis, internodiis 1-9 cm. longis, breviter brunneo-velutinis ; foliis erectis vel refractis, oppositis longe lanceolatis, sessilibus vel breviter petiolatis, lamina dense sed breviter tomentosa, 6-15 cm. longa et 5-20 mm. lata, basi rotundata, apice acutissima, dentata ; inflorescentiis dense spicatis, bracteis linearibus, ciliatis ; calyce florifero campanulato, tubo circ. 1 mm. longo, dentis subulatis, accrescentibus ; corolla cyanea, labro superiori 4-lobato, labro inferiori ovato-oblongo 8-10 mm. longo : staminibus exsertis, filamentis brevis, stylo exserto, stigmate breviter bilobulato.

Feuilles sessiles.
Feuilles courtement pétiolées.
Feuilles longuement pétiolées.

Ce sont là caractères de plus ou de moins, difficiles à apprécier, et dans le cas qui nous occupe, par exemple, suivant la situation des feuilles, nous en trouvons de nettement sessiles presque embrassantes et nettement mais courtement pétiolées.

Dans la première subdivision, après s'être basé sur la forme des feuilles : linéaires, linéaires-lancéolées, lancéolées, caractères tout aussi difficiles à apprécier, il classe les espèces d'après la forme des épis :

Épis cylindriques.
Épis oblongs ou coniques.
Épis globuleux.

Caractères tout aussi difficiles à préciser, car un épi oblong pourrait fort bien devenir cylindrique à la fin de la floraison, comme un épi globuleux peut aisément être conique à une période de son développement.

Nous classerons la plante ici considérée dans le groupe II à épis coniques, bien que l'extrémité du cône sont parfois très arrondie.

Dans ce groupe le *P. deflexifolia* est écarté par les feuilles atteignant seulement 5 cm. de long, les *P. speciosa* Gürke et *affinis* par leurs feuilles comparativement très larges. Restent les *P. Kirkii* Baker et *remotiflora* Baker, dont le second se différencie du premier et de l'espèce nouvelle par les dents calicinales de 6 mm. de long. Quant au *P. Kirkii*, qui d'après la description se rapprocherait de notre plante, les feuilles ne mesureraient que 5-7,5 cm. de long et environ 12 mm. de large, les supérieures comme toujours plus réduites et passant aux bractées.

Les *P. Bequaerti* et *P. longifolia*, que nous décrivons ici, sont deux plantes très affines ; nous insisterons sur leurs caractères différentiels, peut-être s'effaceront-ils quand de plus amples documents seront à notre disposition pour étude.

Pycnostachys Kassneri *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante herbacée, à racines fibreuses, tiges dressées atteignant 40 cm. de long, entrenœuds de 1-4 cm. de long courtement pubescents ; feuilles lancéolées grossement dentées, de 1,5-7 cm. de long et 4-10 mm. de large, plus ou moins longuement cunéiformes à la base et aiguës au sommet ; inflorescences réduites, ovoïdes-coniques, de 1,5-2 cm. de long et jusque 2,5 cm. de large en fleurs, bractées plus longues que les boutons ; calice florifère à tube campanulé d'env. 1,5 mm de long, extérieurement pubescent, dents subulées d'env. 5 mm. de long, ciliées, glanduleuses, corolle dépassant longuement la gorge du calice, à tube droit env. aussi long que les lobes, lèvre supérieure courte à 4 lobes peu profonds, lèvre inférieure de 5 mm. env. de long, ovale, étamines à filet court de 2.5-4 mm. de long.

West-Kundelungu, 17 mai 1908 (Th. Kassner, n. 2794. — Sous les arbres).

Obs. — Cette plante nous a été communiquée par M. le Prof. Dr Schinz, directeur de l'Herbier de Zurich. Elle est indiscutablement voisine du *P. congensis* Gürke, décrit sur des échantillons congolais dans le Bull. de l'Herbier Boissier (IV, 1896, p. 859).

Ce qui nous a amené à séparer spécifiquement la plante, c'est la dimension des tiges qui atteignent un développement relativement considérable, mais surtout celles des dents calicinales qui sont beaucoup plus longues que dans la plante recueillie par le Col. Descamps et qui paraît cependant être en plein état de développement.

Si les affinités du *P. congensis*, dont le *P. Kassneri* est indiscutablement voisin, sont exactes, les trois espèces du groupe, à savoir : *P. congensis* Gürke, *P. micrantha* Gürke et *P. Kassneri* pourraient être différenciées :

Dents du calice env. aussi longues que le tube :
    Calice à tube glabre . . . . *P. micrantha*.
    Calice à tube pubescent-glanduleux . . . . *P. congensis*.
Dents du calice env. deux fois aussi longues que le tube *P. Kassneri*.

(¹) *Pycnostachys Kassneri* : Herbaceus, ramis erectis usque 40 cm. longis, internodiis 1-4 cm. longis, breviter pubescentibus ; foliis lanceolatis grosse dentatis 15-7 cm. longis et 4-10 mm. latis, basi cuneatis apice acutis ; inflorescentiis ovoideo-conicis, 1,5-2 cm. longis, calyce florifero campanulato circ. 1,5 mm. longo, extus pubescenti, dentibus subulatis circ. 5 mm, longis, ciliatis. glandulosis ; corollae tubo erecto, labro superiori 4-lobato, labro inferiori circ. 5 mm. longo, ovato ; filamentis brevibus 2,5 mm. longis.

On pourrait également dire :
Calice glanduleux-pubescent :
Dents aussi longues que le tube . . . . . *P. congensis.*
Dents env. deux fois aussi longues que le tube . . *P. Kassneri.*
Calice glabre . . . . *P. micrantha.*

Pycnostachys longifolia *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante de plus de 70 cm. de haut, à souche ligneuse, à racines plus ou moins ramifiées, tiges simples ou ramifiées, plus ou moins nombreuses par pied, courtement pubescentes-brunâtres, entrenœuds de 2,5-7 cm. de long, feuilles opposées, linéaires-lancéolées de 5-19 cm. de long et 2-12 mm. de large, à limbe rétréci à la base mais non franchement pétiolé, aigu au sommet, très éparsement et courtement poilu sur les deux faces, glandes nombreuses en creux ; inflorescences terminant les tiges et leurs ramifications, oblongues-coniques, de 2-3 cm. de long et 3,5 cm. de large en fleurs ; fleurs blanches, bractées dépassant légèrement les boutons ; calice florifère à tube campanulé d'env. 1,5 mm. de long, pubescent extérieurement, dents subulées d'env. 3,5 mm. de long, accrescentes après l'anthèse, ciliées ; corolle blanche d'env. 19 mm., lèvre supérieure d'env. 3 mm. de long, à 4 lobes arrondis, lèvre inférieure ovale d'environ 1 cm. de long ; étamines à filet court d'env. 6 mm., légèrement exsertes, style dépassant légèrement les étamines, à stigmate légèrement bifide.

Welgelegen, 2 mai 1912 (J. Bequaert, n° 383 et Coll. Homblé, n° 562. — Dembo, marais).

Obs. — Comme nous l'avons dit à propos du *P. Bequaerti*, ces deux plantes sont très voisines ; les deux numéros que nous citons ci-dessus sont de la même origine, car l'échantillon de la coll. Homblé provient des récoltes de M. Bequaert.

Ce qui nous a porté à séparer momentanément ces deux plantes spécifiquement, ce sont : la couleur des fleurs, blanches et bleues, et

---

(¹) *Pycnostachys longifolia* ; Ramis erectis circ. 70 cm. longis, simplicibus vel ramosis, breviter brunneo pubescentibus, foliis oppositis linearibus vel lanceolatis 5-19 cm. longis et 2-12 mm. latis, lamina basi contracta sed non petiolata, apice acuta, supra et infra sparse pilosa, glandulosa ; inflorescentiis oblongo-conicis, 2-3 cm. longis et usque 3,5 cm. latis ; floribus albidis, calyce florifero campanulato, pubescenti, dentibus subulatis, accrescentibus, ciliatis ; corolla circ. 19 mm. longa, labro superiori circ. 3 mm. longo 4-lobato, inferiori ovato, staminibus filamentis circ. 6 mm. longis leviter exsertis, stylo exserto, stigmate leviter bifido.

les dimensions des feuilles, donnant à la plante décrite ci-dessus un facies très particulier.

P. Bequaerti	6-15 cm. × 5-20 mm.
P. longifolia	5-19 cm. × 2-12 mm.

C'est-à-dire que dans la première espèce le limbe est 7-10 fois aussi long que large, dans la deuxième 15-25 fois aussi long que large. Pour certifier la valeur constante de ce caractère, il serait nécessaire de connaître d'une façon plus précise les conditions dans lesquelles ces plantes se sont développées.

Pycnostachys nausaensis *Gürke* msc. ([1]).

Obs. — Sous ce nom nous avons signalé la plante récoltée au Mont Senga par Kassner (n° 2920^a), nous espérions voir publier la description de cette espèce. La plante se rapproche, au point de vue de la constitution du calice, du *P. speciosa* tel que nous l'avons vu dans la coll. Kassner, c'est-à-dire qu'entre les dents calicinales allongées-filiformes se trouvent des dents courtes.

Pycnostachys speciosa *Gürke ; Baker* in FLORA OF TROP. AFR. V, p. 382.

Mont Senga, 30 mai 1908 (Kassner, n° 2920).

Obs. — Déjà en 1913 nous avons rapporté à ce type la plante signalée ci-dessus et qui provenait de l'Herbier de Zurich. Il y a lieu cependant de faire remarquer que si, de la comparaison avec le type conservé à Berlin, nous avons pu faire ce rapprochement, il y a des caractères sur lesquels une nouvelle étude nous permet d'insister et qui pourraient peut-être suffire pour une distinction spécifique ; malheureusement, l'échantillon de l'Herbier de Berlin n'est plus sous nos yeux.

([1]) *Pycnostachys nausaensis* Gürke ; frutex ? ; ramis erectis, plus minus ramosis, polygonalibus, ultra 40 cm. longis, foliis ellipticis, oppositis vel 3-verticillatis, usque 9 cm. longis et 3.5 cm. latis, dentato-crenatis ; inflorescentiis conico-ovoideis, calycis tubo velutino circ. 1,5 mm. longo, dentibus linearibus ciliatis circ. 5,5 mm. longis, dentibus intermediis ovatis, corollae tubo circ. 1 cm. longo, staminibus inclusis.

M^{t} Senga, Mountain Slope, 30-5-1908 (Kassner, n. 2920^a).

Dans notre plante les feuilles n'atteignent guère plus de 12 mm. de large, l'épi atteint 8 cm. de long ; caractère important, et sur lequel la description du Dr Gürke n'insiste pas : présence de lobes intermédiaires entre les dents calicinales.

MENTHA *L.*

Mentha aquatica *L.*

Chisangwe, janvier 1912 (Homblé, n° 104. — Dans le Dembo. — Nom ind. : Mononka [Kib.]).

LEUCAS *R. Br.*

Leucas Homblei *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante pérennante, ligneuse à la base, tiges dressées, simples, atteignant env. 40 cm. de long, à poils étalés, denses ; feuilles courtement pétiolées ou sessiles, opposées, à limbe ovale, arrondi à la base, obtusément cunéiforme au sommet de 2,5-4,5 cm. de long et 11-22 mm. de large, crénelé sur les bords, velu sur la face supérieure comme sur la face inférieure, mais plus fortement en-dessous. Inflorescences en glomérule solitaire et terminal atteignant 3,5 cm. de diam., à nombreuses fleurs blanches, bractées linéaires, fortement ciliées, d'env. 1,5 mm. de large et 11 mm. de long ; calice velu dans sa partie supérieure, intérieurement et extérieurement, à poils blanchâtres à l'état sec, à 10 dents disposées en deux lèvres peu différenciées, cilées ; tube d'env. 7 mm. de long ; corolle à tube d'env. 8 mm. de long, velu extérieurement, glabre intérieurement, lobe supérieur d'env. 6 mm. de long, cucullé, lobe densément velu, cilié, lobe inférieur glabre, un peu plus long que le supérieur trilobé, à lobes légèrement émarginés, glabres ; étamines aussi longues que le lobe supérieur, à filet d'env. 5 mm. de long, glabre.

Vallée de Kapiri, mars 1913 (Homblé, n° 1304. — Terre fertile).

Obs.— Cette espèce appartient, d'après les caractères que nous rappelons dans la description, au groupe *Astrodon* Benth. et serait, si on tient compte des données de la FLORA OF TROP. AFRICA (V, p. 473), voisine du *L. Menthaefolia* Baker signalé en Afrique centrale anglaise et au bord du Tanganyka.

---

(1) *Leucas Homblei* ; Ramis erectis, simplicibus usque 40 cm. longis, pilis patulis densis, foliis breviter petiolatis vel sessilibus, oppositis, lamina ovata, basi rotundata, apice obtuse-cuneata, 2,5-4,5 cm. longa, 11-22 mm. lata, margine crenulata, supra et infra velutina ; inflorescentiis glomerulatis usque 3,5 cm. latis, floribus albidis, bracteis linearibus ciliatis usque 11 mm. longis ; calyce apice extus et intus piloso, 10-dentato bilabiato, ciliato, tubo 7 mm. longo ; corollae tubo extus velutino intus glabro, lobo superiori circ. 6 mm. longo, dense velutino, lobo inferiori trilobato, lobis glabris ; staminis filamentis circ. 5 mm. longis, glabris.

Parmi les caractères différentiels nous noterons les dimensions des feuilles et du calice.

Leucas Kassneri *De Wild.* nov. spec. (1).

Plante . . . ., à tiges dressées simples ou plus ou moins ramifiées, à poils courts apprimés ; feuilles plus ou moins cunéiformes à la base, rétrécies et courtement pétiolées, à limbe de 1,3-7 cm. de long et 4-13 mm. de large ; elliptique, aigu au sommet, velu sur les deux faces, à poils apprimés un peu plus denses en dessous ; inflorescences en glomérules atteignant 2,5 cm. de diam., solitaires, terminant la tige ou ses ramifications, fleurs nombreuses, bractées lancéolées-aiguës, d'env. 8 mm. de long, velues ; calice de 8 mm. env. de long, dents comprises, densément velu sur les deux faces dans la partie supérieure, poils blanchâtres, cotonneux, à 10 dents subégales d'env.2 mm. de long, tube droit à l'état florifère ; corolle à tube de 6-7 mm. de long, glabre intérieurement et extérieurement, lobe supérieur cucullé, de 5 mm. env. de long, densément villeux, lobe inférieur trilobé un peu plus long que le lobe supérieur, lobe médian émarginé ; étamines non exsertes à filet de 5-7 mm.

Lufonzo, 23 mai 1908 (Kassner, n. 2843).

Obs. — Cette plante, qui nous a été communiquée par M. le Dr H. Schinz, directeur du Jardin botanique de Zurich, appartient au groupe *Loxostoma* Benth., bien que nous n'ayons pu observer la courbure du tube calicinal qui semble être caractéristique pour le groupe. Cette courbure ne semble d'ailleurs apparaître qu'au moment de la fructification.

Par l'ensemble de ses caractères le *L. Kassneri* se range dans le voisinage du *L. deflexa* Benth. ; il se différencie par les inflorescences nettement terminales et les feuilles subsessiles ou très courtement pétiolulées.

---

(1) *Leucas Kassneri* ; Ramis erectis simplicibus vel ramosis, pilis appressis ; foliis basi cuneatis, breviter petiolatis, lamina 1,3-7 cm. longa et 4-13 mm. lata, elliptica, apice acuta supra et infra appresse pilosa ; inflorescentiis glomerulatis, terminalibus, solitaribus, circ. 2,5 cm. latis, bracteis lanceolato-acutis circ. 8 mm. longis, velutinis, calyce 8 mm. circ. longo supra intus et extus albido-piloso, 10-dentato, dentibus circ. 2 mm. longis, tubo erecto ; corollae tubo 6-7 mm. longo extus et intus glabro, lobo superiori cucullato, dense villoso, lobo inferiori trilobato, staminibus non exsertis, filamentis 5-7 mm. circ. longis.

Leucas Ringoeti *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante atteignant 65 cm. de haut, tiges dressées, plus ou moins ramifiées, à poils courts denses, feuilles assez longuement pétiolées à pétiole, atteignant 15 mm. de long, courtement velu, limbe oblong-lancéolé, de 5-7 cm. de long et 1,3-2 cm. de large, cunéiforme à la base, aigu au sommet, velu sur la face supérieure, courtement tomenteux-grisâtre sur la face inférieure ; inflorescences en 3-7 glomérules axillaires et terminaux à nombreuses fleurs, distants parfois de plus de 14 cm., bractées linéaires, velues-ciliées, d'env. 6 mm. de long ; calice densément velu extérieurement et intérieurement dans la partie supérieure, recourbé à partir d'un peu en-dessous de la gorge, tube de 5 mm. env. de long, accrescent, à 10 dents subégales de 1,5-2 mm. de long ; corolle à tube de 4-4,5 mm. de long, velu extérieurement dans sa partie supérieure, lobe supérieur cucullé de 2 mm. env. de long, densément villeux, labelle trilobé un peu plus long que le lobe supérieur, à lobule médian émarginé ; étamines non exsertes à filet court d'env. 1 mm. de long.

Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 496. — Bords de l'eau) ; Uvira (Tanganika) ; 1908 (Rouling).

Obs. — Cette espèce appartient au groupe *Loxostoma* Benth., la courbure du calice s'observe à partir d'un certain âge seulement. Par la présence de bractées relativement développées, de feuilles pétiolées oblongues-lancéolées, aiguës au sommet, à poils apprimés, courts et grisâtres sur la face inférieure, le *L. Ringoeti* se range dans le groupe du *L. deflexa* Hook. f. et dans le voisinage du *L. Volkensii* Gürke du Kilimandscharo, dont les feuilles sont beaucoup plus développées, très velues, les glomérules plus larges et plus rapprochés.

SCUTELLARIA *L.*

Scutellaria Livingstonei *Baker.*

Sakania (Rogers, n. 10044) ; Mushoshi (Rogers, n. 10379A) ; Élisabethville (Rogers, n. 10168).

(¹) *Leucas Ringoeti* ; Ramis erectis usque 63 cm. altis, plus minus ramosis, pilosis, foliis petiolatis, petiolo usque 15 mm. longo, breviter velutino, lamina oblongo-lanceolata. 5-7 cm. longa et 1,3-2 cm. lata, basi cuneata, apice acuta, supra et infra velutina ; glomerulis floriferis 3-7 axillaribus et terminalibus, bracteis velutino-ciliatis, circ. 6 mm. longis, calice supra extus et intus dense velutino, recurvato, 10-dentato, dentibus subaequalibus 1,5-2 mm. circ. longis ; corollae tubo 4-4,5 mm longo extus supra velutino, lobo superiori cucullato dense villoso, labello trilobato, lobo mediano emarginato ; staminibus non exsertis, filamentis 1 mm. circ. longis.

Scutellaria Ringoeti *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante herbacée à tiges plus ou moins ramifiées de 20-25 cm. de long, quadrangulaires, courtement pubescentes ; feuilles ovales-elliptiques, courtement pétiolées, à pétiole velu de 1-3 mm. de long, à limbe de 10-16 mm. de long et 8-11 mm. de large, les supérieures passant aux bractées ; inflorescences allongées, lâches de 2,5-5.5 cm, de long ; rachis courtement tomenteux ; fleurs solitaires, opposées, bractées petites de 4 mm. de long au maximum sur 3 mm. de large, tomenteuses comme les feuilles, pédicelle d'env. 4 mm. de long, velu ; calice velu de 2-2,5 mm. de long sous la fleur, à tube campanulé, lobe supérieur dressé, libre sur env. 1 mm., lobe inférieur arrondi ; corolle pubescente d'env. 13 mm. de long, à tube velu dans sa partie supérieure, s'élargissant vers la gorge, lèvre supérieure recourbée en capuchon, 4-lobulée, lèvre inférieure légèrement réfléchie-étalée ; étamines insérées dans la lèvre supérieure, à filets relativement allongés.

Shinsenda, 9 mai 1912 (Ringoet, n. 3. — Dans la brousse).

Obs. — Cette espèce nous paraît affine des *S. paucifolia* Baker, *De Beerstii* Briquet et *Livingstoniana* Baker, qui ont, au dire de leurs auteurs, de nombreuses ressemblances ; elle se différencie en particulier du *S. De Beerstii* Briquet, originaire à peu près de la même région, par les pédicelles plus courts, les bractées ovales-arrondies et les inflorescences relativement réduites.

SOLANACEAE

PHYSALIS *L.*

Physalis minima *L.*

Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 463. — Nom ind. : Mokandimpo ; et Ringoet, n. 486).

(¹) *Scutellaria Ringoeti* ; Herbacea, ramis quadrangularibus, breviter pubescentibus, 20-25 cm. longis ; foliis ovato-ellipticis breviter petiolatis, petiolo 1-3 mm. longo velutino, lamina 10-16 mm. longa et 8-11 mm. lata ; inflorescentiis elongatis, laxis, rachide breviter tomentoso, floribus solitaribus, oppositis, bracteis 4 mm. circ. longis et 3 mm. latis, tomentosis, pedicellis velutinis circ. 4 mm. longis : calyce velutino, tubo campanulato, lobo superiori erecto libero circ. 1 mm. longo : corolla pubescenti, circ. 13 mm. longa, tubo supra velutino, labro superiori recurvato cucullato 4-lobulato, inferiori refracto-patulo.

SOLANUM *L.*

Solanum bifurcum *Hochst.*

Élisabethville (Rogers, n. 10182).

Solanum indicum *L.*

Élisabethville, (Rogers, n. 10148) ; Shindaika près de l'Étoile du Congo, juin 1912 (Homblé, n. 669. — Cultivé. — Nom ind. : Supwasasa).

Solanum nigrum *L.*

Uvira, avril 1906 (Cabra, n. 39. — Feuilles comestibles. — Nom ind. : Mutumba).

Solanum stellato-stylosum *U. Dammer.*

Entre le Lubile et le Lukaya 1910 (R. P. Vandermeiren. — Nom. ind. : Kabende-Bende) ; Kilwa, décembre 1911 (J. Bequaert, n. 232) ; Shinsenda, février 1912 (Ringoet, n. 392).

Solanum Urbanianum *U. Dammer.*

Chisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 79. — Nom ind. : Tuntula [Kib.]).

SCROPHULARIACEAE

LINDERNIA *All.*

Lindernia Newtonii *Engler.* BOT. JAHRB. XXIII, p. 503. tab. 9 fig. M-N.

Shinsenda, février 1912 (Ringoet, n. 412, 413, 414).

Obs. — MM. Hemsley et Skan. reproduisant dans la FLORE D'AFRIQUE la description du Prof. Engler, disent : « Flowers solitary, terminal », or, les figures ci-dessus rappelées, nous montrent nettement des fleurs axillaires et terminales.

SOPUBIA *Ham.*

Sopubia ramosa *Hochst.*

Élisabethville, mars 1912 (Homblé, n. 276. — Nom. ind. : Tunfisia).

Sopubia simplex *Hochst.*

Rivière Lufira (Rogers, n. 10322).

BUCHNERA *L.*

Buchnera capitata *Benth.*
Élisabethville (Rogers, n. 10079).
Buchnera Henriquesii *Engler.*
Élisabethville (Rogers, n. 10187).

BIGNONIACEAE

MARKHAMIA *Seem.*

Markhamia lanata *K. Schum.*

Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 173. — Sur termitière) : Chisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 83. — Sur termitière. — Nom ind. : Mupapali) ; Nieuwdorp, 8 octobre 1912 (Ringoet, n. 1).

STEREOSPERMUM *Cham*

Stereospermum dentatum *Rich.*

Bukama, 10 juillet 1911 (J. Bequaert, n. 152. — Grand arbre) ; Moero, août 1900 (Ed. Verdick).

Obs. — Nous ne pouvons admettre la synonymie proposée par M. Sprague dans la FLORA OF TROP. AFRICA ; il ne nous paraît pas possible de réunir, par exemple, *S. Arnoldianum* De Wild. et *S. dentatum* Rich.

La plante que nous signalons ici diffère un peu du type, tel qu'il est publié dans leur exciccata par MM. Schweinfurth et Riga, n. 1401.

Dans l'échantillon de M. Bequaert, les feuilles sont fréquemment paripennées, à limbe très inéquilatéral, la plante est totalement glabre sauf sur la partie externe de la corolle ; dans l'échantillon des récoltes de Schweinfurth et Riga, le calice est velu-grisâtre, dans celui de Verdick, le calice est courtement velu surtout à la base.

Stereospermum Verdickii *De Wild.*

Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1118. — Nom ind. : Mutubula).

PEDALIACEAE

SESAMUM

Sesamum angolense *Welw.*

Sesamum macranthum Oliv.

Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1285. — Assez rare).

Sesamum indicum *L.*

Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1285. — Cultivé. — Nom ind. : Bunania).

UTRICULARIACEAE

UTRICULARIA *L.*

Utricularia foliosa *L.*

Katanga, 1900 (Verdick) ; Moero, sept. 1900 (Verdick).

Utricularia subulata *L.*

Welgelegen, 1912 (Bequaert, n° 381) ; Welgelegen, 1912 (Homblé, n° 559).

ACANTHACEAE

NELSONIA *R. Br.*

Nelsonia tomentosa *R. Br.*

Elisabethville (Rogers, n° 10199).

THUNBERGIA *L. f.*

Thunbergia glaucina S. Moore.

Riv. Lufira (Rogers, n° 10320).

Thunbergia lancifolia *T. Anders.*

Élisabethville (Rogers, n° 10364).

Thunbergia Micheliana *De Wild.*

Élisabethville (Rogers, n^os^ 10134, 10365).

Thunbergia Rogersii *Turrill.*

Élisabethville (Rogers, n° 10185).

Thunbergia subfusca S. Moore.

Schinsenda (Rogers, n° 10400).

SYNNEMA *Benth.*

Synnema Acinos *S. Moore.*
Élisabethville (Rogers, n° 10001).

DYSCHORISTE *Nees.*

Dyschoriste linifolia.
Sakania (Rogers, n° 10021).

STROBILANTHES *Bl.*

Strobilanthes glutinifolia *S. Moore.*
Sakania (Rogers, n° 10021ᵃ).
Strobilanthes Rogersii *S. Moore.*
Kamatanda (Rogers, n° 10329).

RUELLIA *L.*

Ruellia praetermissa *Lindau.*
Élisabethville, février 1912 (Homblé, n° 149. — Termitière).

LEPIDAGATHIS *Willd.*

Lepidagathis Rogersii *Turrill.*
Sakania (Rogers, n° 10032) ; Elisabethville (Rogers, n° 10362).
Lepidagathis scariosa *Nees.*
Lukafu, 1910 (E. Verdick, n° 531).

BARLERIA *L.*

Barleria argenteo-calycina *De Wild.* BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, V (1915), p. 9.

Plante atteignant 1,25 m. de haut. à rameaux cylindriques velus, à poils étalés-dressés, munis à la base de ramifications étoilées, persistantes ; entrenœuds de 5,5-7,5 cm. de long ; feuilles ovales-oblongues, courtement pétiolées, à pétiole atteignant 5 mm. de long, velu, limbe de 3,5-7,5 cm. de long et 10-28 mm. de large, velu sur les deux faces, à poils plus ou moins épars sur la face supérieure, simples ou étoilés à la base, plus pâle en dessous qu'au-dessus, plus fortement velu en dessous qu'au-dessus, brillant sur la face supérieure, cunéiforme à la base et au sommet : fleurs subsessiles, axillaires ou terminales, opposées, solitaires à l'aisselle d'une feuille bractéale réduite ; non épineuse ; calice à 4 lobes ; lobe antérieur d'environ 15 mm. de long et 5 mm. de large, échancré au sommet, velu séricé, grisâtre-argenté extérieurement, à poils apprimés, lobe postérieur de 15 mm. de long et 6 mm. de large, velu-argenté extérieurement, arrondi entier au sommet, sépales latéraux plus courts que les deux autres, lancéolés, de 10 mm. de long et 2 mm. env. de large, velus comme les autres sépales ; corolle à tube de 2 cm. env. de long, légèrement renflé vers la base et atteignant env. 5 mm. de diam., glabre extérieurement, à 5 lobes subégaux de 18 mm. env. de long et atteignant 6 mm. de large, glabres, étamines à anthères de 6 mm. de long ; style glabre.

Rivière Buchi, mai 1891 (Capt. Descamps).

Barleria grandipetala *De Wild.* nov. spec. in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, V (1915), p. 10.

Rameaux dressés, cylindriques, rétrécis légèrement aux nœuds, velus; à poils simples et à poils étoilés à la base mélangés, divergents, entrenœuds de 5-6 cm. de long ; feuilles opposées, courtement pétiolées, à pétiole atteignant 4 mm. de long, cilié, limbe elliptique de 5-7,5 cm. de long et 2,5-3,2 cm. de large, velu sur les deux faces, surtout sur les nervures, cilié sur les bords, un peu plus pâle en dessous qu'au-dessus, largement cunéiforme subarrondi à la base, cunéiforme au sommet, à environ 4-5 nervures principales de chaque côté de la nervure médiane, plus proéminentes en dessous qu'au-dessus, s'anastomosant en arcs peu marqués au bord de la feuille ; fleurs axillaires solitaires ou terminant de courts rameaux latéraux, formant vers l'extrémité des rameaux des inflorescences à entrenœuds raccourcis plus ou moins denses; feuilles bractéales d'env. 3.5 cm. de long et 1 cm. de large généralement trinerviées ; calice à 4 lobes, lobe postérieur obovale atteignant env. 22 mm. de long et 9 mm de large, largement cunéiforme au sommet, velu sur les deux faces, cilié sur les bords, nervures pennées, les latérales disposées également à droite et à gauche de l'unique nervure centrale, lobe antérieur de 19 mm. env. de long et de 10 mm. de large, de même forme que le postérieur, émarginé, sur une longueur de 4 mm. env., à lobes largement cunéiformes au sommet, à deux nervures principales se terminant chacune dans l'un des sommets du lobe, sépales internes lancéolés, de 7 mm. env. de long et 2 mm. de large, velus sur les deux faces, ciliés sur les bords ; corolle à tube de 29 mm. de long, glabre, à lobes atteignant 3 mm. de long et 19 mm. de large, oblongs ou obovales, arrondis ou très légèrement émarginés au sommet, ovaire ovoïde, glabre à la base, velu au sommet, à style grêle, velu dans son tiers inférieur, glabre supérieurement, atteignant 4 cm. de long.

Katanga (Capt. Descamps).

BLEPHARIS *Juss* ;

Blepharis boerhaaviaefolia *Pers.*

Élisabethville, 8 mars 1912 (J. Bequaert, n° 226. — Savane boisée, de préférence sur les termitières).

PERISTROPHE *Nees.*

Peristrophe usta *C. B. Clarke.*
Élisabethville (Rogers, n° 10242).

HYPOESTES *R. Br.*

Hypoestes antennifera *S. Moore.*
Élisabethville (Rogers, n° 10147).

MONECHMA *Hochst.*

Monechma scabridum *Hochst.*
Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n° 547) ; Élisabethville, mars 1912 (Homblé, n° 223. — Sur termitière et surtout dans la brousse).

JUSTICIA *L.*

Justicia Bequaerti *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, V (1914), p. 429.

Plante à tiges dressées, de 40 cm. de haut ; entrenœuds courtement et éparsement velus, feuilles de 4,5-8 cm. de long, sessiles ou pétiolées, à pétiole, pouvánt atteindre 2 mm. de long, limbe oblong ou obovale, rétréci à la base, plus ou moins largement cunéiforme au sommet, de 2,3-6,5 de long et de 6-32 mm. de large, éparsement poilu sur les deux faces, surtout sur les nervures ; inflorescences axillaires, solitaires ou parfois par 2 à l'aisselle de la même feuille, atteignant 27 cm. de long, à rachis courtement mais assez densément velu, fleurs opposées, solitaires ou fasciculées par 2-5, fleurs en glomérules espacés, à entrenœuds atteignant 3 cm. de long, bractéolées à la base, bractéoles ovales-lancéolées, aiguës, subcarénées, velues-ciliées, atteignant 4 mm. de long, courtement pétiolées, pétiole bractéolé au sommet, bractéoles linéaires-aiguës, calice profondément 5-lobé, à lobes lancéolés-aigus d'environ 3,5 mm. de long, ciliés, corolle d'environ 9 mm. de long, velue extérieurement, à lobe postérieur courtement et obtusément bilobé au sommet, lèvre 3-lobée, étamines à deux loges distantes, l'inférieure appendiculée à la base, style exsert, ovaire glabre.

Bukama, 16 juin 1911 (J. Bequaert, n° 108).

Justicia Homblei *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, IV (1914), p. 428.

Plante à rameaux de 65 cm. env. de hauteur, glabres ou munis de poils courts le long de deux côtes opposées ; entrenœuds de 2 5 cm. env. de long ; feuilles opposées pétiolées, pétiole de 1,5-2 mm. env. de long, à poils épars, cilié, limbe ovale-oblong ou ovale-lancéolé, arrondi à la base, plus ou moins cunéiforme au sommet, plus ou moins aigu, de 1,7-5,5 cm. de long et de 1-2,1 cm. de large, plus petit à la base qu'au milieu, diminuant de grandeur vers le sommet et passant insensiblement aux bractées, à poils épars sur la face inférieure, épars mais plus abondants sur la face supérieure ; inflorescences axillaires, opposées, formant par leur ensemble une sorte de panicule terminale, longuement pédonculée, à pédoncule divergent redressé vers le sommet, éparsement et courtement velu le long de deux lignes opposées, grêle, de 2 à 3,5 cm. de long ; fleurs solitaires ou géminées, sessiles, entourées à la base par 2 bractéoles lancéolées-linéaires, aiguës, atteignant 5 mm. de long ; calice profondément 5-lobé, de 4-5 mm. de long à lobes linéaires-aigus, courtement ciliés sur les bords ; corolle blanche, tachetée de rouge, velue extérieurement, bilabiée, atteignant 10 mm. de long, lobe postérieur courtement bilobé au sommet, lobe antérieur d'env. 4 mm. de long, étamines à 2 loges insérées l'une au-dessus de l'autre, séparées par le connectif légèrement élargi, loge inférieure munie d'un prolongement basilaire ; ovaire courtement velu.

Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n° 1146. — Terre sèche).

Justicia kapiriensis *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, V (1915), p. 12.

Tiges grêles, glabres, de plus de 30 cm. de long, pouvant s'enraciner aux nœuds, entrenœuds de 3-13 cm. de long, feuilles opposées, plus ou moins longuement rétrécies en pétiole, pétiole atteignant 2 cm. de long, glabre ou muni de quelques poils épars assez allongés, limbe ovale-elliptique, plus ou moins longuement cunéiforme à la base, cunéiforme au sommet, de 1,8-6 cm. de long et 9-20 mm. de large, glabre sur les deux faces, à environ 5 nervures latérales principales de chaque côté de la nervure médiane, inflorescences axillaires, solitaires, pédoncule grêle, glabre, atteignant 32 mm. de long, terminé par une cyme 2-4 flore, scorpioïde, de 1-1,5 cm. de long ; fleurs blanches inférieures distantes de 5-6 mm., sessiles, bractéolées à la base, bractéoles lancéolées, aiguës, glabres, de 1,5 mm. de long, plus courtes que le calice ; sépales linéaires, glabres, de 4 mm environ de long ; corolle glabre, à tube de 4 mm. environ de long, à lobe postérieur dressé d'env. 3 mm. de long, à lèvre 3 lobée, étalée, d'environ 4 mm. de long, à lobes arrondis ; anthères disposées l'une au-dessus de l'autre, à loges de moins de 1 mm. de long, l'inférieure nettement appendiculée.

Vallée du Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1089),

RUBIACEAE

OLDENLANDIA *L.*

Oldenlandia Hockii *De Wild.* in *Fedde* Repert. XIII (1914) p. 108 ; Notes Fl. Katanga, III, (1914), p. 25.

Petite plante à souche paraissant ligneuse, à rameaux étalés-dressés atteignant tout au plus 4 cm. de long, glabres dans toutes leurs parties, ou légèrement scabres, à rameaux simples ou plus ou moins ramifiés, dichotomes. Feuilles rétrécies en pétiole à la base, à stipules soudées avec la base du pétiole, celles-ci formant une cupule autour de la tige. Limbe ovale atteignant au maximum 11 mm. de long et 5 mm. de large, plus ou moins coriace, cunéiforme-arrondi à la base, cunéiforme, obtus au sommet. Fleurs tétramères longuement pédicellées, à pédicelle atteignant 7 mm. de long, glabre, à calice de 2,5 mm. de long sous la fleur, accrescent sous le fruit, à lobes env. aussi longs que le tube. Corolle à tube d'env. 2 mm. de long, dépassant donc les lobes du calice, à limbe d'un peu plus de 1 mm. de long. Anthères dépassant la gorge de la corolle, d'env. 1 mm. de long. Fruit (non mûr) couronné par les 4 lobes du calice d'au moins 2 mm. de long sur 2,5 mm. de large.

Élisabethville, lieux humides, septembre 1911 (Ad. Hock).

Obs. — Par ses feuilles sessiles ou subsessiles, ses fleurs tétramères, ses cimes terminales, lâches, la plante semble devoir se classer dans le voisinage de l'*O. decumbens* Hiern, dont elle se différencie très aisément d'abord par le développement de toute la plante et par la forme toute particulière de ses fleurs plus réduites.

PENTAS *Benth.*

Pentas Homblei *De Wild.* in *Fedde* Repert. XIII (1914), p. 109; Notes Fl. Katanga, III (1914), p. 25.

Plante à tige dressée, de plus de 30 cm. de haut, forte, de plus de 5 mm. d'épaisseur, glabre, trigone, plus ou moins striée longitudinalement, feuilles verticillées, ovales-elliptiques, de 5,5 à 9 cm. de long et de 2 à 3,5 cm. de large, glabres sur les 2 faces, largement cunéiformes ou arrondies à la base, aiguës au sommet, à nervures latérales assez proéminentes se perdant dans le bord du limbe cilié ; stipules à lobules dressés, ciliés, atteignant au maximum 3 mm. de long, fleurs réunies au sommet de la tige en corymbes terminaux, formés de cimes plus ou moins longuement pédonculées, à pédoncule commun, glabre, atteignant env. 1 cm. de long ; fleurs blanches subsessiles, à calice glabre extérieurement d'env. 1 cm. de long, les lobes triangulaires aigus, ciliés sur les bords, aussi longs que le tube, corolle à tube très allongé de 6,5 à 9 cm. de long, à poils le long des côtes principales, à lobes étalés ou réfléchis, glabres intérieurement et extérieurement, sauf à la gorge de la corolle où ils sont fortement velus, atteignant 12 mm. de long sur 3-3,5 mm. de large ; étamines incluses à anthère d'env. 7 mm. de long, insérées à env. 1,5 cm. du sommet du tube dans un très léger renflement. Style dépassant la gorge de la corolle d'env. 13 mm., stigmate bilobé de 2 mm. compris.

Shisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 94. — Dembo, près d'un ruisseau. — Nom indigène : Kanoka).

Obs. — Cette espèce appartient au même groupe que le *P. Liebrechtsiana* que nous avons décrit antérieurement du Katanga et qui se différencie aisément par ses feuilles et ses fleurs plus réduites, ce qui lui donne un facies tout à fait particulier.

MUSSAENDA *L.*

Mussaenda arcuata *Poir.*

Élisabethville, 1912 (Homblé, n. 330. — Nom ind. : Mupulupumpi ; n. 253. — Nom ind. : Kisre-Sembe ; n. 281. — Nom ind. : Kinusi). Shinsenda, 1912 (Homblé, n. 359. — Sur termitières. — Nom ind. : *Mukolowondo).*

SABICEA *Aubl.*

Sabicea Homblei *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, V (1915), p. 32.

Arbrisseau à rameaux courtement pubescents, brunâtres à l'état jeune, devenant glabres, à écorce plus ou moins luisante ; feuilles pétiolées, à pétiole velu comme les tiges, de 5-10 mm. de long, à limbe de 2,3-7,5 cm. de long et 0,7-4 cm. de large, elliptique, plus ou moins longuement cunéiforme à la base, cunéiforme ou courtement acuminé au sommet, glabre sur les deux faces, sauf sur les nervures éparsement velues, nervures principales au nombre de 6 environ de chaque côté de la nervure médiane, peu proéminentes sur les deux faces ; stipules réfléchies, ovales, d'environ 2-3 cm. de long ; fleurs réunies en capitules pauciflores de 7-10 mm. de diam., pédonculées, à pédoncule strigilleux de 10-22 mm. de long ; bractées involucrales obovales, ciliées, de 3-6 mm. de long ; calice de 5-6 mm. de long à tube glabre extérieurement, densément velu intérieurement, à 5 lobes ovales-obtus, glabres sur les deux faces, éparsement ciliés sur les bords ; corolle à tube de 8 mm. env. de long, assez densément strigilleux extérieurement, velu à la gorge, à 5 lobes de 4 mm. env. de long, et, jusque 1,5 mm. de large, subaigus, densément velus-séricés extérieurement, glabres intérieurement.

Plateau de Biano, environs de Katentania, dans la plaine, au voisinage des cours d'eau, novembre 1912 (Homblé, n. 804).

LEPTACTINIA *Hook. f.*

Leptactinia lanceolata *K. Schum.*

Élisabethville (Rogers, n. 10169).

RANDIA *L.*

Randia malleifera *Benth.* et *Hook.*
Élisabethville (Rogers, n. 10295).

TRICALYSIA *A. Rich.*

Tricalysia platystigma *K. Schum.*
Élisabethville (Rogers, n. 10282).

PENTANISIA *Harv.*

Pentanisia rhodesiaca *S. Moore.*
Élisabethville (Rogers, n. 10004).
Pentanisia variabilis *Harv.*
Élisabethville (Rogers, n. 10222); Nieuwdorp (Rogers, n. 10403).

VANGUERIA *Juss.*

Vangueria edulis *Vatke.*
Katentania, novembre 1912 (Homblé, n. 719. — Vallée boisée); Sankisia, 24 septembre 1911 (J. Bequaert, n. 210); Élisabethville, mars 1912 (Homblé, n. 231. — Arbre de la brousse à fruits comestibles. — Nom ind. : Mukolongo).
Vangueria infausta *Burch.*
Mufonya, 11 décembre 1911 (J. Bequaert, n. 233. — Savane boisée) ; Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 182. — Arbuste sur termitière. — Nom ind. : Mukolongo ; et mars 1912, n. 237. — Termitières. — Fruits comestibles. — Nom ind. : Mutendankwali).

PLECTRONIA *L.*

Plectronia Laurentii *De Wild.*
— — var. **katangensis** *De Wild.* nov. var. (1).

Rameaux principaux nettement quadrangulaires-subailés vers le sommet, à angles courtement et densément tomenteux.

Plateau de Biano (Tshisiuka), février 1913 (Homblé, n. 255. — Arbre des bords des sources et des étangs. Assez rare et localisé. Nom ind. : Muvuma).

---

(1) *Plectronia Laurentii* var. *katangensis ;* ramis apice quadrangulari-subalatis ; angulis breviter sed dense tomentosis.

Obs. — Nous ne possédons ni fleurs, ni fruits de cette plante que nous considérons provisoirement comme une variété du type très polymorphe que nous avons décrit dans « Mission Laurent ».

Plectronia venenosa *Oliv.*

Riv. Lufira (Rogers, n. 10306).

CANTHIUM *Lam.*

Canthium lanciflorum *Hiern.*

Élisabethville (Rogers, n. 10142).

CRATERISPERMUM *Benth.*

Craterispermum laurinum *Benth.*

Élisabethville (Rogers, n. 10537).

FADOGIA *Schweinf.*

Fadogia ancylantha *Schweinf.*

Shisangwe, janvier 1912 (leg. Ringoet, coll. Homblé, n. 84. — A la base des termitières. — Nom ind. : Buliansimba).

Fadogia Cienkowskii *Schweinf.*

Kamatande (Rogers, n. 10342).

Fadogia fuchsioides *Welw.*

Tschinsenda (Rogers, n. 10202) ; Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 191. — Fruit comestible. — Nom ind. : Wombolin).

Fadogia Homblei *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 295 ; Notes Fl. Katanga, III (1914), p. 27.

Plante à tiges dressées atteignant 50 cm. de haut, à feuilles verticillées par 4 elliptiques, lancéolées, subsessiles, cunéiformes à la base, glabres sur la face supérieure, très courtement tomenteuses sur la face inférieure, cunéiformes-acuminées au sommet, atteignant 11 cm. de long et 2,5 cm. de large, à nervures latérales principales au nombre de 8-9 de chaque côté de la nervure médiane, stipules lancéolées, à lobes libres, atteignant 13 mm. de long, à cupule basilaire de 3 mm. env. de long. Fleurs axillaires, plus ou moins nombreuses, en fascicules courtement pédonculés, à pédicelle pouvant atteindre 3 à 4 mm. de long, calice glabre à tube d'env. 1,5 mm. de long, à lobes lancéolés aigus de 3 mm. env. de long. Corolle dépassant les lobes du calice, à tube d'env. 4 mm. de long, à lobes réfléchis d'env. 4 mm. de long, glabres comme le tube de la corolle, très aigus; étamines à anthères partiellement exsertes, style glabre dépassant la gorge de la corolle d'env. 2 mm., à stigmate calyptriforme d'env. 1 mm. de long.

Shinsenda, mars 1912 (rec. H. Berdal, coll. Homblé, n. 555).

Obs. — Cette plante vient se ranger dans le voisinage, semble-t-il, du *F. agrestis* Schweinf. avec lequel on ne peut d'ailleurs le confondre par suite de la présence de ses feuilles verticillées par 4.

Fadogia katangensis *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 295 ; Notes Fl. Katanga, III (1914), p. 27.

Petite plante à base ligneuse, à tige dressée atteignant 35 cm. de long, grêle, non ramifiée, à feuilles verticillées par 3, lancéolées-aiguës, longuement cunéiformes à la base, plus ou moins coriaces, à poils épars sur la face supérieure, tomenteuses sur la face inférieure, les inférieures courtes n'atteignant parfois que 7 cm. de long, les médianes 8 cm. de long et 14 mm. de large, à bord révoluté ; nervures en creux sur la face supérieure, assez nettement en relief sur la face inférieure, stipules formant une gaine intrapétiolaire, à lobe libre atteignant dans sa partie linéaire 1 cm. de long, élargi dans la partie basilaire, densément velu sur le dos, cilié sur les bords. Fleurs à pédicelle velu, pouvant atteindre env. 3 mm. de long, souvent bractéolé. Calice éparsement velu, partie inférieure de 2 mm. env. de long, à lobes dressés de 1,5 mm. env. de long ; corolle à tube éparsement velu extérieurement d'env. 3 mm. de long, à lobes réfléchis, aigus, env. aussi longs que le tube, glabres intérieurement, anthères légèrement exsertes, style exsert, à stigmate bilobé calyptriforme d'env. 1 mm. de long.

Elisabethville, septembre 1911 (Ad. Hock).

Obs. — Cette espèce est voisine de notre *F. Butayei* ; elle s'en différencie, comme on peut le voir par les descriptions, par les feuilles complètement développées, plus allongées, ce qui lui donne un aspect assez particulier ; la face inférieure des feuilles est peut-être moins cotonneuse dans la plante du Katanga que dans celle de la région du Kwango. Ces deux plantes ont cependant une très grande analogie et il serait possible que des matériaux plus complets de l'une et de l'autre permettent d'établir pour ces espèces un rapprochement plus complet.

Fadogia Ringoeti *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 296 ; Notes Fl. Katanga, III (1914), p. 27.

Plante à souche ligneuse, à tige dressée plus ou moins ramifiée, atteignant 80 cm. de haut, à feuilles verticillées par 3, sessiles, à limbe arrondi à la base ou largement cunéiforme, elliptique, lancéolé, de 4-5,5 cm. de long et 7 à 10 mm. de large, glabre sur les deux faces, un peu plus pâle en dessus qu'au-dessous, à quelques poils le long du bord, cunéiforme-obtus au sommet ; stipules à base élargie atteignant au plus 1 mm. de long à portion linéaire pouvant atteindre

3 mm. Fleurs axillaires, souvent en inflorescences plus ou moins dichotomes, à pédoncule commun pouvant atteindre 9 mm. de long, à pédicelle pouvant atteindre 4 mm., glabre; calice d'env. 2 mm. de long, tronqué au sommet, ondulé sur le bord; corolle à tube glabre d'env. 5 mm. de long, lobes réfléchis pendant l'anthèse, glabres sur les deux faces, d'env. 5 mm. de long, très aigus; anthères d'env. 2 mm. de long, exsertes, style dépassant la gorge de la corolle d'env. 4 mm., stigmate calyptriforme d'env. 2 mm. de long compris.

Shinsenda, mars 1912 (leg. Ringoet, coll. Homblé, n. 509. — Dans la brousse).

Obs. — Cette espèce se rapproche du *F. stenophylla* Welw. décrit sur une plante de la région de Huilla. La plante du Katanga se différencie par la forme de ses feuilles et par le développement de ses fleurs ainsi que par la disposition de ses inflorescences.

Fadogia Rogersii *Wernh.*

Banga (Rogers, n. 10230) ; Élisabethville, n. 10221.

Fadogia stigmatiloba *K. Schum.*

Tschinsenda (Rogers, n. 10396).

Fadogia triphylla *Baker.*

Tschinsenda (Rogers, n. 10108).

Fadogia Verdickii *De Wild.*

Sakania (Rogers, n. 10281).

PAVETTA *L.*

Pavetta canescens *DC.*

Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 151 et 160. — Sur termitières. — Arbre. — Nom ind. : Kianakassi) ; Chisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 110. — Terre sèche boisée. — Fleur blanche, odeur agréable) ; Plateau de Biano (Esschen), déc. 1912 (Homblé, n. 903. — Vallée boisée, sur termitière) ; environs de Katentania, novembre 1912 (Homblé, n. 801. — Fleurs blanches, termitières).

Pavetta radicans *Hiern.*

Welgelegen, 6 juin 1912 (J. Bequaert).

CEPHAELIS *Sw.*

Cephaelis australis *Wernh.*

Riv. Lufira (Rogers, n. 10304).

BORRERIA *C. F. W. Meyer.*

Borreria dibrachiata *K. Schum.*

Bukama 1911 (J. Bequaert, n. 120) ; Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1144).

Borreria senensis *K. Schum.*

Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1102, 1122) ; Shinsenda, 1912 (Ringoet, n. 425) ; Kantu, 1908 (Kassner, n. 2398).

Borreria stricta *DC.*

Élisabethville, 1912 (J. Bequaert, n. 261 et Homblé, n. 242) ; Shinsenda, 1912 (leg. Ringoet, coll. Homblé, n. 544, 443, 396).

SPERMACOCE *Gaertn.*

Spermacoce dibrachiata *Oliv.*

Élisabethville (Rogers, n. 10120, 10213).

Spermacoce stricta *L.*

Élisabethville (Rogers, 10073).

GALIUM *L.*

Galium stenophyllum.

Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 117. — Nom ind. : Kakoamahanga. Terrains secs boisés); Shinsenda, 13 février 1912 (leg. Ringoet, coll. Homblé, n. 380) ; Welgelegen, 1912 (leg. Corbisier, coll. Homblé, n. 600).

CUCURBITACEAE

CUCUMIS *L*

Cucumis Homblei *De Wild.*

Élisabethville, mars 1913 (Sur termitière. — Fleurs jaunes. — Nom ind. : Mabeh-Yanbwa. — Homblé, n. 227) ; Lupaka River, 6 février 1908, (Kassner, n. 2463).

CAMPANULACEAE

LIGHTFOOTIA *L'Hérit.*

Lightfootia abyssinica *Hochst.*

Sakania (Rogers, n. 10031).

Lightfootia napiformis *D. C.*
Élisabethville, mai 1912 (Homblé, n. 347. — Nom ind. : Katesia).

COMPOSITACEAE

BOTHRIOCLINE *Oliv.*

Bothriocline Schimperi var. **tomentosa** *Oliv.* et *Hiern.*
Uvira (Tanganika), 1908 (Rouling).

VERNONIA *Schreb.*

Vernonia acuta *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES. V (1915), p. 90 (Strobocalyx).

Plante à tiges ligneuses courtement mais assez densément velues, striées longitudinalement ; feuilles alternes, courtement pétiolées ou sessiles, à pétiole atteignant 2 mm. de long, assez épais, velu, limbe ovale, arrondi à la base, aigu au sommet, de 2-9 cm. de long et 8-37 mm. de large, brunâtre à l'état sec sur la face supérieure, scabre, plus pâle en dessous et courtement poilu, à dents marginales plus ou moins espacées, peu profondes, aiguës-apiculées, nervures latérales principales au nombre de 10 env. de chaque côté de la nervure médiane, à peine en relief sur la face supérieure, formant sur la face inférieure, avec les nervures secondaires et tertiaires, une réticulation en relief ; inflorescences axillaires et terminales formant par leur ensemble des panicules amples ; involucres sessiles ou courtement pédicellés, à pédicelle tomenteux, atteignant 4 mm. de long, bractéolé, à bractéoles linéaires, variables, ciliées, involucre de 7-9 mm. de long et d'env. 4 mm. de diam. un peu en dessous du sommet, à squames involucrales sur 3 rangs environ, peu nombreuses, les externes ovales, plus ou moins longuement acuminées, à acumen souvent aussi long que le limbe, les internes obovales-elliptiques, atteignant env. 7 mm. de long et 3 mm. de large, glabres sur les deux faces, scarieuses, plus ou moins herbacées au sommet ; akènes de 2,5-3 mm. env. de long, striés longitudinalement, très courtement tomenteux et glanduleux ; soies de 7,5 mm. de long, blanches, courtement ciliées.

Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1214. — Terre sèche).

Vernonia brachylaenoides *S. Moore.*
Élisabethville (Rogers, n. 10008).

Vernonia bukamaensis *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, V (1915), p. 95 (Stengelia).

Plante herbacée, atteignant 14-15 cm. de haut, à rameaux dressés densément et courtement velus-grisâtres, striés longitudinalement ; feuilles rapprochées distantes au maximum de 4-5 mm.; sessiles ou très courtement contractées en pétiole à la base, obovales-elliptiques, de 3-6,5 cm. de long et 10-20 mm. de large, à bords ciliés et plus ou moins éparsement et profondément dentés, à dents apiculées aiguës, velues-scabres sur la face supérieure, éparsement velues surtout sur les nervures de la face inférieure, densément glanduleuses sur la face inférieure, à glandes en creux à l'état sec ; capitules terminaux, solitaires ou géminés, dépassant assez fortement les feuilles, pédoncule de 3-4,5 cm. de long, velu, strié longitudinalement, muni de 1 ou 2 bractées elliptiques lancéolées, d'env. 3-4 mm. de long ; involucre d'env. 14-15 mm. de long, à squames disposées en 4-5 séries, elliptiques-lancéolées, aiguës-apiculées au sommet, plus ou moins densément velues sur le dos, au moins au sommet, glabres intérieurement, subscarieuses, ciliées sur les bords, les externes les plus courtes, les internes atteignant 12 mm. de long et un peu plus de 1 mm. de large. Akènes velus, à env. 10 côtes, de 3 mm. env. de long (mûrs ?). Soies d'un blanc légèrement jaunâtre, de 3-10 mm. de long. Fleuron d'env. 10 mm de long, étroit, à peine renflé vers le sommet, violacé.

Bukama, 15 mars 1911 (J. Bequaert, n. 147).

Vernonia densecapitulata *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Buxelles, V (1915), p. 92 (Strobocalyx).

Plante ligneuse, atteignant 3 m. de haut, à tiges brunâtres, à écorce courtement et densément tomenteuse, obscurément striée longitudinalement ; feuilles alternes, rétrécies en un court pétiole à la base, atteignant env. 6 mm. de long, à limbe plus ou moins décurrent, elliptique, cunéiforme à la base et au sommet, glabre ou légèrement scabre sur la face supérieure, courtement et plus ou moins densément velu sur la face inférieure, de 2-10 cm. de long et 8-45 mm. de large, denté sur les bords ciliés, dents apiculées ; nervures latérales principales au nombre de 10 env. de chaque côté de la nervure médiane, non en relief en dessus, proéminentes en dessous, nervures secondaires et tertiaires visibles en dessous ; inflorescences en panicules terminant la tige et ses ramifications axillaires, formant par leur ensemble de grandes panicules ; capitules sessiles ou très courtement pédicellés, à pédicelle atteignant 2 mm. de long, courtement tomenteux grisâtre, involucre de 3-4 mm. de long, squames sur 3-4 rangs, les internes caduques plus longues que les externes, atteignant 3 mm. de long et un peu plus de 1 mm. de large, subobtuses, glabres extérieurement ou très courtement et éparsement velues vers le sommet, glabres intérieurement, ciliées sur les bords, plus ou moins carénées sur le dos, capitule à 6-7 fleurs tubuleuses, violacées, de 3 mm. env. de long ; akène glabre, de 1 mm. env. de long (mûr ?), soies blanches de 3,5 mm. env. de long, courtement ciliées.

Shinsenda, 10 juin 1912 (J. Bequaert, n. 494. — Plante à tiges ligneuses, atteignant 3 m. de haut).

Vernonia Descampsi *De Wild.* (= Vernonia acrocephala in De Wild. et Th. Dur. *Contrib. Fl. Congo* I (1899), p. 30 ; De Wild.

Études Fl. Bas- et Moyen-Congo I (1905), p. 325 et *Illustr. Fl. Congo.* Pl., fig. 6-12, non Klatt in ANN. NAT. HIST. Hofm. Wien VII (1892), p. 100. (Stengelia) in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 97).

Petite plante atteignant en fleurs 17 cm. de haut, tige courte de 1,2-3 cm. de long, courtement mais densément tomenteuse-grisâtre ; feuilles suprabasilaires, plus ou moins en rosette au sommet de la tige, sessiles, de 2,5-11 cm. de long et 12-45 mm. de large, plus ou moins coriaces, éparsement et courtement velues sur les deux faces, obovales, peu profondément denticulées-roncinées sur les bords, arrondies au sommet, nervures latérales principales obliques, plus de 9 de chaque côté de la nervure médiane ; pédoncule central, courtement et densément velu-grisâtre, de 11,5-12,5 cm. de long, uni bractéolé, bractéole lancéolée-linéaire, de 1,3-3 cm. de long, velue-grisâtre à l'état sec, capitule terminal solitaire atteignant 4 cm. de large, multiflore, squames involucrales, obtuses au sommet, sur 4 rangs environ, les externes les plus courtes, elliptiques, de 8 cm. de long et de 3,5 mm. de large, glabres ou éparsement poilues, les intermédiaires de plus en plus larges, à base scarieuse, herbacées au sommet, les internes atteignant 16 mm. de long et 4 mm. de large, scarieuses et glabres sur la plus grande partie de leur longueur ; akènes courts de 2 mm. env. de long, velus, côtelés longitudinalement ; soies jaunâtres sur deux rangs, atteignant 12 mm. de long, plus ou moins aplaties, densément ciliolées, aiguës ou obtuses, les externes plus courtes que les internes ; corolle tubuleuse de 20 mm. env. de long, glabre, pourpre, à tube cylindrique dépassant légèrement ou aussi long que les soies, peu élargi au sommet et souvent légèrement recourbé, à 5 lobes aigus de près de 2 mm. de long.

Samba, 1891 (Capt. Descamps) ; Kausomme, 21 juillet 1904 (Lescrauwaet, n. 163. — Petite plante des herbes donnant une fleur pourpre).

Obs. — Les plantes signalées ci-dessus ont été signalées : la première d'après la détermination de Klatt lui-même, la seconde par nous sous le nom de *V. acrocephala* Klatt ; mais nous nous sommes aperçu de l'erreur de cette détermination.

Vernonia guineensis *Benth.*

Tinkosji, 1908 (Kassner, 2301A).

Vernonia lualabaensis *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1015), p. 93 (Strobocalyx).

Plante à tige dressée de 1 m. de hauteur, courtement et densément tomenteuse-brunâtre, striée longitudinalement, subcylindrique, feuillée dès la base, feuilles alternes rapprochées, distantes au maximum de 1,5 cm., rétrécies en un court pétiole à la base, pétiole atteignant 3 mm. de long, plus ou moins ailé, velu-brunâtre, limbe elliptique-obovale, cunéiforme à la base et au sommet, de 3-8,5 cm. de long et 8-20 mm. de large, glabre sur la face supérieure, d'un brun-noirâtre plus ou moins luisant, densément et courtement tomenteux, d'un brun pâle sur la face inférieure, ondulé sur les bords ; nervures latérales principales obliques,anastosmosées entre elles et formant une réticulation bien visible sur la face inférieure ; inflorescences terminales paniculées, ramifiées ; capitules sessiles ou courtement pédicellés, à pédicelle tomenteux-brunâtre atteignant 3-4 cm. de long ; involucres atteignant 6 mm. de long, bractées sur trois rangs, les externes les plus courtes, toutes plus ou moins velues sur le dos, au moins au sommet courtement apiculé, glabres intérieurement, les internes elliptiques, caduques, de 6 mm. de long et 2 mm. de large, arrondies au sommet, à environ 6 fleurs ; akènes courtement poilus d'env. 1 mm. de long (mûrs ?), fleurons de 6 mm. env. de long, soies jaunâtres de 6 mm., courtement barbelées.

Environs du Lualaba-Kraal, voisinage du fleuve, décembre 1912 (Homblé, n. 961).

Vernonia luembensis *De Wild.* et *Muschler.*

Welgelegen, 1913 (leg. Corbisier, coll. Homblé, n. 613. — Fleurs bleuâtres) ; Env. de Katentania, 1912 (Homblé, n. 790, 779. — Fleurs mauves).

Vernonia manikensis *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Brux. V (1915), p. 99) (Stengelia).

Plante herbacée, réduite, de 18 cm. env. de haut, racine plus ou moins tubéreuse à tubercules atteignant 4,5 cm. de long et 1 cm. de diam. terminés par une radicelle grêle pouvant atteindre 12 cm. de long, tige dressée, courte, de 2 cm. env. de long ; feuilles en rosette au sommet de la tige à plus de 8, obovales-oblongues, rétrécies à la base, sessiles, de 2-8 cm. de long et atteignant 2 cm. de large, dentées sur les bords, à dents glanduleuses au sommet, éparsement velues sur les deux faces, glanduleuses sur la face inférieure, à glandes en creux, obtuses au sommet, scape solitaire atteignant 13,5 cm. de long, courtement pubescente, capitule solitaire atteignant 4.5 cm. de large ; involucre atteignant 15 mm. de long, squames sur env. 4 rangs, les externes les plus petites, lancéolées, de 1,5 mm. de large, courtement et plus ou moins éparsement velues sur le dos, les internes plus ou moins longuement appendiculées au sommet, atteignant 18 mm. de long et 4,5 mm. de large, scarieuses dans la plus grande partie de leur longueur, glabres sur les deux faces, sauf sur le dos dans la partie herbacée ; akènes plus ou moins aplatis, de 4-5 mm. de long, velus, striés longitudinalement, à environ 10 côtes, pappus sur plusieurs rangs, les soies externes plus courtes, aplaties, subobtuses, ciliées sur les bords, jaunâtres, de 12 mm. env. de long ; fleuron de 17 mm. env. de long, légèrement renflé au sommet, lobes triangulaires d'env. 1,5 mm. de long.

Plateau de la Manika, octobre 1911 (Hock.).

Vernonia Petersii *Oliv.* et *Hiern.*

Mulenga, 1908 (Kassner, 2639A) ; Musofi (Kassner, n. 2686) ; Shinsenda, 1912 (Ringoet, n. 89) ; Élisabethville, 1912 (Homblé, n. 217, 205. — Nom ind. : Lenga-Lenga) ; Welgelegen, 1912 (leg. Corbisier, coll. Homblé, n. 607).

Vernonia polysphaera *Baker.*

Nieuwdorp (Rogers, n. 10396).

Vernonia punctulata *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX., V (1915), p. 100 (Stengelia).

Plante herbacée atteignant au moins 30 cm. de haut, à feuilles paraissant basilaires, au nombre de trois, très courtement pétiolées, pétiole atteignant 8 mm. de long, embrassant à la base, limbe elliptique, largement cunéiforme-subcordé à la base, arrondi au sommet, à poils épars sur la face inférieure, glabre sur la face supérieure, ponctué de blanc (traces de poils caducs ?) de 10-16 cm. de long et 4,5-6,8 cm. de large ; scape dressée unifoliée vers la base, feuille réduite, distante de 1 cm. env. des basilaires, atteignant 4,6 sur 2,2 cm., ramifiée au sommet, plus ou moins densément tomenteuse-brunâtre, portant au sommet des deux rameaux un capitule unique dont le pédoncule plus ou moins densément bractéolé vers le sommet atteint 9 cm. de long, bractées lancéolées-subaiguës, atteignant 9 mm. de long, passant aux squames involucrales, capitules de 23-28 mm. de large, squames sur env. quatre rangs, les externes ovales-aiguës d'environ 9 mm. de long et 4 mm. de large, densément velues-séricées sur la face externe, ciliées sur les bords, glabres intérieurement, les moyennes atteignant 5 mm. de large, les internes scarieuses dans la plus grande partie de leur longueur, colorées dans l'appendice terminal aigu, de 12 mm. env. de long sur 2,5 mm. de large, glabres intérieurement, éparsement velues sur la ligne médiane dorsale et sur le sommet ; akènes obconiques, plus ou moins obliques, obscurément 3-4 côtelés, glabres, très éparsement et courtement poilus-tuberculeux, de 4,5-5 mm. de long, de 0,5 mm. de large à la base et 1,5 mm. de large au sommet ; soies sur plusieurs rangs, les externes courtes, les internes atteignant 8 mm. de long, péléacées, aiguës, étroites, d'un blanc jaunâtre, ciliées ; corolle de 9 mm. env. de long, glabre, à lobes linéaires de 3 mm. env. de long.

Vernonia pinifolia *Less.*

Kundelungu, 19 décembre 1911 (J. Bequaert, n. 586) ; Baya (Rogers, n. 10384).

Vernonia cthonocephala *O. Hoffm.*

Élisabethville (Rogers, n. 10008).

Vernonia lancibracteata *S. Moore.*

Sakania (Rogers, n. 10024).

Vernonia Melleri *Oliv.* et *Hiern.*

Sakania (Rogers, n. 10023) ; Élisabethville (Rogers, n. 10299).

Vernonia purpurea *Sch. Bip.*

Élisabethville, 1912 (J. Bequaert, n. 437. — Savane sèche) : Sakania (Rogers, n. 100025).

Vernonia podocoma *Sch. Bip.*

Élisabethville (Rogers, n. 10092).

Vernonia roseo-violacea *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX., V (1915), p. 98 (Stengelia).

Plante herbacée, tiges dressées, de 23-28 cm. de long, glabres, plus ou moins anguleuses, striées longitudinalement ; feuilles rapprochées, alternes ou subopposées, distantes au maximum de 2,5 cm., les inférieures les plus courtes, la supérieure passant aux bractées, toutes sessiles, subembrassantes, plus ou moins longuement rétrécies à la base, cunéiformes-obtuses au sommet, de 9-20 cm. de long et 1,5-4 cm. de large, limbe entier sur le bord, plus ou moins scarieux, glabre sur les deux faces, nervures principales au nombre de 6-8 de chaque côté de la nervure médiane, très obliques, peu en relief sur les deux faces ; capitule terminal solitaire atteignant 4 cm. de diam., squames sur 4-5 rangs, les externes triangulaires-aiguës plus courtes que les internes, velues extérieurement, les internes d'env. 18 mm. de long et d'env. 4,5 mm. de large, glabres intérieurement, velues au moins sur le dos et au sommet, extrémité aiguë légèrement herbacée à partie inférieure scarieuse ; akènes glabres très obscurément côtelés longitudinalement, de 5,5 mm. env. de long, soies d'un blanc-jaunâtre, plus ou moins longuement ciliées, atteignant 11-12 mm. de long ; fleurons tubuleux de 18-19 mm. de long, très peu élargis au sommet, glabres ou éparsement glanduleux, lobes linéaires de 4,5 mm. de long et env. 0,4 mm. de large, ciliés au sommet.

Vallée de Kapiri, mars 1913 (Homblé, n. 1294).

Vernonia subaphylla *Baker.*

Kamatanda (Rogers, n. 10332) ; Élisabethville (Rogers, n. 10163).

Vernonia towaense *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX., V (1915), p. 96. (= Vernonia Grantii in De Wild. *Études Flore Bas- et Moyen-Congo* I (1904), p. 210, non Oliv. in TRANS. LINN. SOC. XXIX (1873), p. 92, tab. 57) (Stengelia).

Tiges de plus de 30 cm. de long, glabres ou éparsement et courtement poilues ; feuilles alternes plus ou moins distantes, les supérieures passant aux bractées involucrales, feuilles développées sessiles, distantes de 4-6 cm. le long de la tige, à limbe obovale-oblong de 8-14,5 cm. de long et 12-45 mm. de large, largement cunéiforme à la base, cunéiforme au sommet, irrégulièrement et peu profondément denté sur les bords, glabre sur les deux faces ou muni de quelques poils épars, nervures latérales obliques, à plus de 10 de chaque côté de la nervure médiane, peu proéminentes sur les deux faces; capitule terminal solitaire, atteignant 6 cm. de diam.; bractées involucrales sur 4 à 5 rangs, les externes ovales, longuement lancéolées, très aiguës, glabres sur les deux faces mates extérieurement, plus ou moins brillantes intérieurement, ciliées denticulées sur les bords, les internes atteignant 27 mm. de long, ovales-lancéolées aiguës, de 2,5-5,5 mm. env. de large, dépassant de 4-5 mm. les soies de l'akène, scarieuses et glabres sur la plus grande partie de leur longueur, plus ou moins herbacées au sommet et courtement velues au moins sur le dos, ciliées sur les bords, akènes de 4-4,5 mm. de long et de un peu plus de 1,5 mm. de large, plus ou moins comprimés, densément velus, striés, soies sur plusieurs rangs, subéquilongues, grêles, courtement ciliolées, atteignant 15 mm. de long, fleurons tubuleux peu élargis vers le sommet, dépassant les soies, de 25 mm. env. de long, à lobes lancéolés de 7-8 mm. de long.

Towa, septembre 1895 (Descamps).

Obs. — Cette espèce a été signalée antérieurement sous le nom de *V. Grantii*. Un coup d'œil jeté sur la description ci-dessus et sur la figure publiée en même temps que la diagnose du *V. Grantii*, dans le mémoire sur les plantes des récoltes de Speke et Grant (TRANS. LINN. SOC., *loc. cit.*), suffit pour voir qu'il n'y a aucune analogie entre ces deux espèces.

Vernonia violaceo-papposa *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX., V (1915), p. 89 (Lepidella).

Plante d'environ 70 cm. de haut, à tiges dressées, cotonneuses à la base; ramifiées seulement au sommet, velues, à poils blanchâtres-appliqués; feuilles striées longitudinalement, basilaires, longuement rétrécies à la base en un pétiole courtement ailé subembrassant, oblancéolées-linéaires, cunéiformes subobtuses au sommet, atteignant 23 cm. de long et 23 mm. de large, glabres ou à poils courts-scabres épars, bords scabres; nervures latérales très obliques, un peu plus proéminentes en dessous qu'au-dessus, feuilles du sommet plus petites et sessiles embrassantes, de même constitution; capitules atteignant 3,5 cm. de diam. par deux ou trois au sommet de la tige ou de ses ramifications, subsessiles ou pédonculés, à pédoncule velu comme la tige, atteignant 1 cm. de long, bractéolé, bractéoles semblables aux squames involucrales, celles-ci sur au moins 4 rangs, de 10-15 mm. de long et jusque 1,5 mm. de large, les inférieures les plus recourbées en crochet, les internes droites, toutes densément velues extérieurement, ciliées sur les bords, glabres intérieurement sauf vers le sommet velu, cilié et mucroné; fleurs à plus de 35 par involucre; fleurons tubuleux grêles de 12,5 mm. de long, à 5 lobes linéaires de 3 cm. env. de long, violets, courtement ciliés sur les bords, style à lobes divergents aigus; akènes de 2 mm. env. de long (mûrs?) densément velus au moins à la base, à poils érigés blanchâtres, lépides jaunâtres ou violacés de 1,7-2 mm. de long, frangés, soies de 10-11 mm. de long, violettes, ciliées, plus ou moins caduques.

Vallée de Kapiri, versant boisé du plateau de Biano, février 1913 (Homblé, n. 1222).

Vernonia undulata *Oliv.*

Environs du Lualala-Kraal, décembre 1912 (Homblé, n. 914).

ELEPHANTOPUS *L.*

Elephantopus scaber *L.*

Élisabethville (Rogers, n. 10136).

AGERATUM *L.*

Ageratum conyzoides *L.*

Vallée de Kapiri, Katanga, février 1913 (Homblé, n. 1219. — Nom vern. : Pumba-fumba [Kisa]) ; env. du Lualaba-Kraal, décembre 1912 (Homblé, n. 950).

EUPATORIUM *L.*

Eupatorium africanum *Oliv.* et *Hiern.*

Élisabethville (Rogers, n. 10231).

MIKANIA *Willd.*

Mikania scandens *Willd.*

Élisabethville (Rogers, n. 10971).

NIDORELLA *Cass.*

Nidorella resedaefolia *DC.*

Nieuwdorp (Rogers, n. 10377).

Nidorella auriculata *DC.*

Lukafu, octobre 1899 (E. Verdick) ; Vallée de Kapiri, fév. 1913 (Homblé, n. 1215. — Nom vern. : Vumba-Vumba [Kisa]) ; Chisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 103. — Nom vern. : Lunsangwé [Kib.]. — Dans les dembos) ; Nieuwdorp, 3 oct. 1912 (Ringoet) ; Lualaba-Kraal, vallée de la Kapanda, décembre 1912 (Homblé, n. 1020).

CONYZA *Less.*

Conyza aegyptiaca *Dryand.*

Vallée de la petite Luembe, 1910 (Ad. Hock).

BLUMEA *DC.*

Blumea aurita *(L. f.) DC.*
Bukama, 14 juillet 1911 (J. Bequaert, n. 144).

LAGGERA *Sch. Bip.*

Laggera alata *Sch. Bip.*
Élisabethville (Rogers, n. 10870).
Laggera brevipes *Oliv.* et *Hiern.*
Élisabethville, 17 mai 1912 (J. Bequaert, n. 447).

ACHYROCLINE *Less.*

Achyrocline batocana *Oliv.* et *Hiern.*
Élisabethville (Rogers, n. 20238).

GNAPHALIUM *L.*

Gnaphalium luteoalbum *L.*
Élisabethville (Rogers, n. 10152, 10871).

HELICHRYSUM *Gaertn.*

Helichrysum Kirkii *Oliv.* et *Hiern.*
Élisabethville, 1912 (Homblé, n. 348, 273.— Nom ind. : Kipipa); Shinsenda, mars 1912 (Homblé, n. 363. — Nom ind. : Kipipa) ; Élisabethville, 1912 (J. Bequaert, n. 345. — Savane boisée. — Atteignant 60 cm. de haut) ; Élisabethville (Rogers, n. 10972).
Helichrysum squamosifolium *S. Moore.*
Kamatanda (Rogers, n. 10331).

INULA *L.*

Inula auriculata *Wall.*
Bukama, 14 juillet 1911 (J. Bequaert, n. 143).

SPHACOPHYLLUM *Benth.*

Sphacophyllum candelabrum *Benth.*
Mafumbi, 1908 (Kassner, n. 2520).
Sphacophyllum Helenae *Busc.* et *Muschl.*
Élisabethville, 1908 (Kassner, n. 2509).

ANISOPAPPUS *Hook.* et *Arn.*

Anisopappus africana *Oliv.* et *Hiern.*
Élisabethville (Rogers, n. 10229).

WEDELIA *Jacq.*

Wedelia africana *Pal. Beauv.*
Baya (Rogers, n. 10388).

ASPILIA *Thou.*

Aspilia monocephala *Baker.*
Kamatanda (Rogers, n. 10330).

MELANTHERA *Rohr.*

Melanthera Brownei *Sch. Bip.*
Élisabethville (Rogers, n. 10945) ; Chisangwe, 1912 (Homblé, n. 78. — Nom ind. : Msoumbi) ; Élisabethville, 1912 (Homblé, n. 145. — Sur termitières) ; Shinsenda, 1912 (Ringoet, n. 444, 528).
— — var. **angustifolia** *O. Hoffm.*
Vallée de la Kapanda, décembre 1912 (Homblé, n. 1021) ; Chisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 102. — Nom ind. : Msombe [Kib.]).

GUIZOTIA *Cass.*

Guizotia Eylesi *S. Moore.*
Élisabethville (Rogers, n. 10945).

BIDENS *L.*

Bidens linearifolia *Oliv.*
Élisabethville (Rogers, n. 10956).
Bidens pilosa *L.*
Nieuwdorp (Rogers, n. 10410).
— — var. **leucantha** *Willd.*
Élisabethville (Rogers, n. 10959).
Bidens Schimperi *Sch. Bip.*
Élisabethville (Rogers, n. 10947).

JAUMEA *Pers.*

Jaumea angolensis *O. Hoffm.*
Schinsenda, 29 mars 1912 (Ringoet, n. 7) : Élisabethville, 2 mai 1912 (J. Bequaert, s. n.) ; Élisabethville, mars 1912 et mai 1912 (Homblé, n. 306, 244. — Nom. vern. : Kula [Kib.]).

Jaumea compositarum *Benth.* et *Hook.*
Élisabethville (Rogers, n. 10140).

SCHISTOSTEPHIUM *DC.*

Schistostephium heptaloba *DC.*
Élisabethville (Rogers, n. 10140).

GYNURA *Cass.*

Gynura cernua *Benth.*
Élisabethville (Rogers, n. 10181A).

Cynura cernua var. **cœrulea** *De Wild.*
Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 174. — Nom vern. : Mutundu) ; Élisabethville, 4 avril 1912 (J. Bequaert, n. 313) ; Shinsenda, mars 1912 (Ringoet. coll. Homblé, n. 469. — Nom vern. : Kivumbe) ; Lualaba-Kraal, décembre 1912 (Homblé, n. 935) ; Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1218).

Gynura crepidioides *Benth.*
Élisabethville, mai 1921 (Homblé, n. 310. — Nom vern. : Butundu [Kib.]) ; Élisabethville, 28 mars 1912 (J. Bequaert, n. 289).

Gynura vitellina *Benth.*
Élisabethville (Rogers, n. 10181).

SENECIO *L.*

Senecio diphyllus *De Wild.* et *Muschl.*
Lukafu (Ed. Verdick).

Senecio Homblei *De Wild* in BULL. JARD. BOT. BRUX., V (1915), p. 54).

Plante herbacée à racines fibreuses, nombreuses, tige dressée subcylindrique, fortement striée longitudinalement, simple, glabre ou éparsement et courtement velue-cotonneuse ; feuilles alternes à entrenœuds de 4-5 cm. de long, au nombre de 4, les médianes les plus développées, la supérieure formant transition vers les bractées de l'inflorescence ; feuilles médianes à limbe sessile, plus ou moins embrassant à la base, ovale, longuement lancéolé ou obovale longuement lancéolé, très aigu, courtement mais densément serré-denticulé sur les bords, à dents arrondies, subglanduleuses, à poils épars sur les deux faces, nervures latérales assez nombreuses, obliques, anastomosées en arc avant d'atteindre le bord, de 16-18,5 cm. de long et atteignant 4,5 cm. de large ; inflorescence terminale formant une panicule très lâche, ramifiée, atteignant 24 cm. de long, à rameaux distants] parfois de plus de 11 cm., bractéolés à la base, à bractéoles lancéolées-linéaires de 5-35 mm. de long ; capitules hétérogames ou homogames pédonculés, à pédoncule de 10-42 mm. de long, plus ou moins pubescent, subcotonneux, muni de bractées éparses subfiliformes surtout sur l'involucre où elles forment un calicule irrégulier ; involucre campanulé à 14-16 squames d'un jaune-brunâtre à l'état sec, velues à la base, glabres sur les deux faces, aiguës, très obscurément carénées, atteignant de 6,5-8 mm. de long et les internes parfois un peu plus de 2 mm. de large ; fleurons ligulés atteignant 2 mm. de diam., dépassant de 3 mm. env. les squames de l'involucre ; fleurons tubuleux de 6 mm. env. de long, soies blanches de 5 mm. env., pectinées.

Katentania, novembre 1912 (Homblé, n. 727. — Vallée boisée).

Senecio irregularibracteatus *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 85.

Plante annuelle, à tige dressée de 40-50 cm. de haut, peu ramifiée, à rameaux espacés peu nombreux, souche fibreuse, tiges glabres ou très éparsement et courtement poilues, feuilles lancéolées, les inférieures plus ou moins rétrécies à la base, les médianes plus ou moins embrassantes, aiguës au sommet, non dentées, à bords légèrement recourbés, de 3-12 cm. de long et 3,5-9 mm. de large, glabres ou très éparsement poilues sur les deux faces, les supérieures passant aux bractées ; capitules terminant la tige ou les ramifications, portés au sommet d'un pédoncule bractéolé à la base et muni de 1 à 3 bractéoles linéaires, atteignant 1-5 mm. de long ; calicule nul ; bractées involucrales sur un rang, irrégulières, au nombre de 5-10 environ, de 6,5-10 mm. de long et de 1-2,5 mm. de large, cunéiformes au sommet, glabres sur les deux faces, scarieuses sur les bords, courtement ciliées au sommet, fleurs toutes tubuleuses, très nombreuses, rouges, fleurons tubuleux de 10 mm. env. de large, glabres, à lobes linéaires de 3 mm. de long ; akène cylindrique, grêle, glabre, strié de 3 mm. env. de long, (mûr), soies blanches de 5 mm. env. de long, sétuleuses, disque glabre plus ou moins conique.

Environs du Lualala-Kraal, voisinage du fleuve, décembre 1912 (Homblé, n. 937).

Senecio picridifolius *DC.*

Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 552. — Marais) ; Élisabethville, avril 1912 (Homblé, nom ind. : Mutendu. — Dans le voisinage des cours d'eau) ; Shinsenda, mai 1912 (J. Bequaert, n. 431. — Dans le dembo marécageux) ; Élisabethville (Rogers, n. 10915, 10935, 10966).

Senecio Rogersii *S. Moore.*

Élisabethville (Rogers, n. 10176).

Senecio rosmarinifolius *L. f.*

Élisabethville (Rogers, n. 10934).

Senecio semiamplexifolius *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX., V (1915), p. 86 (Senecio bupleuroides in De Wild. *Études Flore Katanga* II (1913), p. 171, non *DC.*).

Plante à tige dressée de plus de 50 cm. de long, cotonneuse à la base, glabre supérieurement, ramifiée seulement vers le sommet, striée longitudinalement; feuilles au nombre de 5 environ, l'inférieure et la supérieure réduites, les moyennes sessiles, de 10-15 cm. de long et 3-4 cm. de large, cordées-amplexicaules à la base, plus ou moins aiguës au sommet, ovales-oblongues, entières sur les bords, glabres sur les deux faces, nervures latérales légèrement proéminentes sur les deux faces, très obliques, anastomosées avec les nervures secondaires, formant une réticulation plus ou moins en relief sur les deux faces, feuille supérieure atteignant env. 4 cm. de long sur 1,2 cm. de large; capitules à plus de 10 fleurs, longuement pédonculés, pédoncule glabre, bractéolé à la base et portant espacées 1 ou 2 bractéoles linéaires de 2 mm. de long, grêle, atteignant 4 cm. de long, réunis en un corymbe très lâche; calicule nul, bractées involucrales, sur un rang, au nombre de 5-7, lancéolées ou ovales elliptiques, de 4,5-5,5 mm. de long et 1-3 mm. de large, glabres sur les deux faces, scarieuses sur les bords, très courtement ciliolées au sommet; corolle de 5 mm. env. de long, courtement lobulée, stigmates recourbés exserts; réceptacle nu, akène de 3,5 mm. de long, strié longitudinalement, stries blanches de 4 mm. env. de long, courtement ciliées.

Vallée de la petite Luembe, février 1910 (Ad. Hock).

TRIPTERIS *Less.*

Tripteris monocephala *Oliv.* et *Hiern.*
Élisabethville (Rogers, n. 10018).

HAPLOCARPHA *Less.*

Haplocarpha scaposa *Harv.*
Élisabethville (Rogers, n. 190055, 10191).

PLEIOTAXIS *Steetz*

Pleiotaxis pulcherrima *Steetz.*
Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1220. — Nom vern. : Kassana mutwé [Kisa]); Plateau du Biano (Esschen, plateau), novembre 1912 et décembre 1912 (Homblé, n. 878, 891).

DICOMA *Cass.*

Dicoma Kirkii *Harv.*
Élisabethville (Rogers, n. 10913, 10933).

GERBERA *Gronov.*

Gerbera lascopus *Baker.*
Sakania (Rogers, n. 100036).

SONCHUS *L*

Sonchus Elliottianus *Hiern.*
Élisabethville (Rogers, n. 10016, 10177).

LACTUCA *L.*

Lactuca taraxacifolia *Schum.* et *Thonn.*
Élisabethville, 17 avril 1912 (J. Bequaert, n: 334).

Examen critique de la Notion de « Valeur »

DANS

ses Rapports avec les Systèmes Monétaires

PAR

Max HAUPTMANN
Administrateur-délégué de la Banque commerciale de Belgique

Dans des publications précédentes : *Le Crédit après la Guerre* et *Le Rôle de l'Etalon Monétaire dans la Crise actuelle,* nous avons présenté quelques arguments qui militent en faveur d'une réforme des systèmes monétaires actuels.

Nous croyons, en effet, que le malaise économique dont le monde entier souffre actuellement, pourrait être fortement atténué si l'on adoptait une unité de mesure des valeurs plus rationnelle que l'étalon d'or.

Les encouragements que nous ont valus nos premiers essais nous ont conduit à approfondir la question. Convaincu de ce qu'en pareille matière la ligne de conduite la plus logique consiste à s'assurer d'abord de l'exactitude théorique des raisonnements et déductions sur lesquels sont basées les modifications proposées, nous croyons faire œuvre sage en soumettant dès à présent à la critique du monde savant quelques-unes des bases scientifiques de notre système.

Nous pensons avoir démontré, dans notre étude sur *le Rôle de l'Etalon Monétaire dans la Crise actuelle,* que l'étalon d'or est une mauvaise base pour la mesure des valeurs. Toutefois, prévoyant que l'on ne manquera pas de nous objecter que la valeur n'est pas susceptible d'être *mesurée* au véritable sens du mot, nous avons procédé à un examen approfondi de cette question.

Le but de cette communication est d'en donner, en résumé, les grandes lignes et les conclusions.

Nous esquisserons d'abord rapidement le processus d'élaboration de la notion de valeur, afin d'opérer une mise au point nécessaire à l'intelligence du sujet ; nous aborderons ensuite l'étude de la nature intime, de l'essence de cette valeur ; puis nous examinerons la valeur sous l'un de ses principaux aspects extérieurs, la grandeur, le seul qu'il soit vraiment indispensable d'apprendre à bien connaître, ce qui ne peut se faire qu'à l'aide d'un procédé de mesure ; enfin, nous verrons que l'échange et les prix permettent effectivement de mesurer la valeur, mais que jusqu'à présent les moyens employés dans ce but n'ont pu se dégager de l'empirisme et ont grand besoin d'être améliorés dans un sens plus scientifique.

HISTORIQUE

L'idée de valeur, au sens que nous lui donnons aujourd'hui, n'a pris naissance qu'au XVIII^{me} siècle ; précédemment, le mot *valeur* n'avait d'autre signification économique que celle de *prix*. C'est Turgot qui, l'un des premiers, établit nettement la distinction entre les notions de valeur et de prix (¹). Malheureusement, cet économiste, et après lui tous les physiocrates, ses continuateurs, n'arrivent pas à différencier la valeur d'avec l'*utilité*.

Vers la même époque, Adam Smith sépare ces deux notions ; mais, ayant découvert la place importante que l'idée de travail occupe dans celle de valeur, à son tour, et bien malheureusement, il confond ces deux dernières cependant si distinctes.

Ricardo, Bastiat, Karl Marx ne font que renforcer, sous ce rapport, la théorie du *Travail unique générateur de la valeur*. Ricardo eut cependant le grand mérite de distinguer la notion de valeur de celle de *richesse*.

Par contre, Stanley Jevons, qui a beaucoup contribué à mettre en échec la théorie travailliste, revient aux traditions utilitaristes

---

(¹) Paul Leroy-Beaulieu, *Traité théorique et pratique d'Economie politique ;* vol. III, pages 16-17.

dans sa conception de l'*Utilité limite,* continuée d'une part par l'école autrichienne, et d'autre part par l'école française considérée par beaucoup comme classique, encore aujourd'hui. Leroy-Beaulieu, notamment, le principal représentant de celle-ci, se rallie nettement aux théories utilitaristes.

Ainsi donc, pour les deux grandes catégories d'économistes qui se disputent encore actuellement le terrain économique, la valeur s'identifie, ou presque, soit avec l'utilité, soit avec le travail.

Beaucoup de bons esprits (¹) ont très bien compris qu'il devait y avoir une part de vérité dans chacune des deux thèses en présence et se sont efforcés de les concilier ; d'autres ont très bien vu les erreurs manifestes dont la notion de valeur reste encore entachée ; mais aucun n'a réussi, selon nous, à faire la lumière complète sur cette question, car à leur tour, ils commettent des erreurs qui proviennent notamment de ce qu'ils ne tiennent pas toujours suffisamment compte des faits (²).

Nous avons formé le projet audacieux de présenter au sujet de cette notion si subtile de la valeur une théorie toute nouvelle. Si nous n'osons nous flatter de ce qu'elle réalisera l'accord définitif sur ce sujet important, nous espérons cependant qu'elle lui fera faire un pas en avant. Malheureusement, nous ne pouvons que la résumer très brièvement dans cette communication où l'espace nous est mesuré.

ANALYSE DE LA NOTION DE VALEUR

Ainsi que nous l'avons vu dans l'historique, la notion de valeur, longtemps confondue avec celles de prix et de richesse, n'est pas encore bien dégagée de celles d'utilité et de travail ; d'aucuns même l'identifient encore avec le *désir* (³) ou avec des choses aussi disparates qu'un jugement ou un sentiment (⁴).

Ne pouvant nous attarder à faire une revue complète des innombrables théories qui se sont fait jour autour de la valeur, nous

---

(¹) Voir notamment Gide, *Principes d'Economie politique*, page 71.

(²) Georges Valois, *L'Economie nouvelle*, pages 143-144 et suivantes.

(³) Gide, *op. cit.*, page 74 : « C'est notre désir seul qui constitue la valeur ».

(⁴) Paul Leroy-Beaulieu, *op. cit.*, t. III, page 44.

renvoyons le lecteur aux auteurs déjà cités, ainsi qu'à un ouvrage important de Chr. Cornelissen (¹).

Bornons-nous à signaler les discussions entre les économistes objectivistes et subjectivistes, les premiers estimant qu'il est possible de déterminer la valeur en dehors de l'homme, les autres pensant que c'est d'une estimation toute personnelle qu'elle est faite.

Or, tout ce qui intéresse l'homme possède évidemment à la fois un caractère objectif et subjectif. C'est donc perdre son temps et chercher des complications là où il n'en existe pas, que de rechercher si la valeur a un caractère exclusivement objectif ou subjectif (²).

En réalité, elle possède les deux. Évidemment, le point de vue subjectif y semble dominer ; mais, cette distinction d'école ne nous apprend rien de bien utilisable à son sujet. Elle explique cependant que cette notion soit restée jusqu'ici fort vague dans l'esprit même de ceux qui s'en sont le plus occupés. Comme nous l'avons dit ci-dessus, Paul Leroy-Beaulieu lui-même se demande si la valeur est autre chose qu'un sentiment ou un jugement ! Or, de toute évidence, elle ne peut être ni l'un ni l'autre ; car, le concept de valeur est purement passif. Il se peut qu'il dépende d'un jugement et engendre un sentiment, le désir ; mais comment pourrait-il s'identifier avec des concepts asssi essentiellement actifs que ceux de jugement et de sentiment ? !

Ce n'est qu'après avoir fait de vains efforts pour concilier les nombreuses thèses en présence que nous avons dû nous résoudre, uniquement dans le but de bien asseoir notre projet de réforme monétaire, à formuler une théorie originale et en beaucoup de points inédite, croyons-nous, de la valeur.

Comme le lecteur le verra, nous avons eu soin d'en écarter les formules mathématiques, les distinctions d'ordre psychologique et le vocabulaire spécial qui en est la conséquence et dont on a réellement abusé (³).

(¹) *Théorie de la valeur*. Paris, M. Giard et E. Brière, 1913.

(²) Georges Valois, *L'Économie nouvelle*, p. 143 et suivantes.

(³) Voir notamment Chr. Cornelissen, *op. cit.*, page 475.

Pour notre part, nous avons pu dénombrer jusque quarante espèces de valeurs différentes considérées par les divers auteurs.

Pour nous, il existe une notion générale et fondamentale de la valeur dont toutes les valeurs particulières, telles que : valeur d'échange, valeur limite, valeur personnelle, etc., ne sont que des aspects divers, de même qu'il existe une notion générale de la longueur, une de la masse, une de la force, une de la lumière, une du son, une du droit, une de la beauté, etc.

C'est cette notion générale de la valeur qui constitue le fondement même de toute l'*économie politique*, cependant que l'un de ses aspects particuliers principaux, la valeur d'échange, constitue la base de l'*économie monétaire.*

Ainsi donc, il y a *la valeur*, tout court, indépendamment de toutes espèces de valeurs particulières, comme il y a *la couleur*, tout court, indépendamment du rouge, du bleu et des autres couleurs du spectre. Cette notion répond à peu près à ce qu'on a appelé notamment la valeur absolue, la valeur intrinsèque, la valeur d'usage, la valeur dans un sens général, la valeur en soi. Parmi ces dénominations, nous avons fait choix de la dernière, la *valeur en soi*, pour bien différencier, chaque fois qu'il sera nécessaire, la notion fondamentale de valeur de la notion particulière, également fort importante, de *valeur d'échange.*

Le cadre restreint de cette communication ne nous permet pas de donner la justification du choix de cette expression combattue d'ailleurs par Paul Leroy-Beaulieu (¹).

Un Edmond Picard (²) aurait vraisemblablement choisi l'expression *valeur pure*. Celle-ci, toutefois, nous paraît quelque peu prétentieuse et, au surplus, pas rigoureusement exacte, car nous voulons caractériser la valeur en faisant abstraction de tous les *accidents* qui peuvent l'influencer et modifier ses aspects propres, tant internes qu'externes, plutôt que débarrassée des *éléments étrangers* qui pourraient en altérer la nature même (³).

(¹) *Op. cit.*, tome III, chap. II, page 26.

(²) *Le Droit pur*. Paris, Ernest Flammarion, 1912, page 8.

(³) Nous croyons devoir insister sur ce que la plupart des économistes n'ont pas indiqué suffisamment la distinction, capitale selon nous, à faire entre le caractère général de la notion fondamentale de valeur et le caractère particulier de chacun des aspects de cette valeur. En fait, la plupart d'entre eux ont traité la valeur en général et les valeurs en particulier comme des notions exactement de même ordre.

Or donc, qu'est-ce que la valeur en soi ?

C'est cet aspect (¹) des choses qui nous porte à les désirer plus ou moins. Mais, cet aspect, loin d'être simple, paraît singulièrement confus à l'analyse ; il correspond, dans toute la force du terme, à un *concept* (« begriff » — Kant), c'est-à-dire à une notion générale sans être absolue, laquelle s'applique à un amalgame de divers éléments que l'esprit rassemble (begreifen) en un seul mot. C'est donc une idée complexe, — et dans ce cas-ci très complexe même, — réductible à des éléments plus simples.

En effet, si nous nous rappelons l'esquisse historique par laquelle nous avons commencé, nous voyons que, de toute évidence, l'utilité et le travail tiennent chacun une place importante dans le concept de valeur. Ces deux éléments ne sont d'ailleurs pas les seuls ; mais, suivant les points de vue différents auxquels se sont placés les économistes, l'un des deux éclipsait les autres à leurs yeux. Et, en effet, bien que ces deux conditions ne soient pas suffisantes pour donner naissance à la valeur, il apparaît comme évident qu'un objet qui n'aurait pas d'utilité, au sens traditionnel du mot, et dont l'acquisition ne nécessiterait aucun travail, ne pourrait avoir aucune valeur (²).

Examinons donc d'abord les facteurs *utilité* et *travail*.

⁂

L'utilité, au sens traditionnel du mot où l'ont employé la plupart des économistes, répond elle-même à une notion assez vague, qui, en réalité — nous le verrons plus loin — est, elle aussi, un concept au vrai sens du mot (begriff), c'est-à-dire, comme nous l'avons vu, une notion complexe, faite d'un assemblage de notions plus simples.

De même que la notion de valeur, celle d'utilité a donné lieu à de nombreuses théories modernes. Parmi celles-ci, nous signale-

---

(¹) C'est à dessein que nous évitons de dire une « propriété » des choses, car ce mot exagère à notre sens l'objectivité de la valeur en soi. Le mot « aspect » nous paraît convenir beaucoup mieux au caractère à la fois objectif et subjectif de la valeur, car il exprime bien un rapport entre l'observateur et l'objet ou la chose observée.

(²) Voir, à ce sujet, la discussion de la valeur que nous donnons pp. 9, 10.

rons celles « si ingénieuses et si séduisantes » de Stanley Jevons et de Boehm-Bawerk notamment, auxquelles s'est rallié Paul Leroy-Beaulieu sur l'utilité minima, l'utilité marginale, l'utilité de la dernière fraction infiniment petite, etc.

La critique de ces théories nous entraînerait hors du cadre de cette communication ; mais, comme aucune d'elles ne nous a donné pleine satisfaction, nous avons été amené à formuler également une théorie nouvelle de l'utilité, dont nous donnons les conclusions ci-après.

Le sens traditionnel du mot *utilité* doit être abandonné, parce que trop général et, par suite, trop peu précis. L'on doit y distinguer deux éléments plus simples, au premier desquels nous réservons le mot *utilité* et qui signifiera *la propriété qu'ont effectivement les choses de répondre à des besoins possibles.* Cette utilité dépend uniquement des propriétés physiques, chimiques ou sociales des choses considérées (¹). Elle est donc immuable dans le temps et dans l'espace. Le second élément répond à ce que depuis longtemps les économistes sont à peu près d'accord pour désigner sous le vocable de *besoin.*

En effet, un objet ne peut avoir de valeur qu'à condition qu'il soit utile au sens traditionnel du mot, ce qui implique : 1° qu'il le soit au sens restreint que nous avons donné au mot *utilité,* et, 2° que le besoin auquel il correspond existe.

La théorie des besoins ayant été suffisamment éclaircie par les divers économistes (²), nous nous abstiendrons de nous y étendre ici. Remarquons seulement que le *besoin*, contrairement à l'*utilité* au sens que nous donnons à ce mot, est essentiellement variable.

Au sens où nous la comprenons, l'*utilité,* étant invariable, ne peut avoir aucune influence sur la variation de la valeur ; par contre, le *besoin* peut subir de grandes fluctuations qui affecteront dans le même sens celles de la valeur.

(¹) Si l'on désirait absolument conserver au mot « utilité » son sens traditionnel, on pourrait forger un nouveau mot pour désigner l'ensemble des propriétés physiques, chimiques ou sociales des choses. Mais nous ne voyons à ce néologisme aucune espèce d'..... utilité.

(²) Voir notamment Gide, *op. cit.*, p. 43, *Des besoins.*

Mais, de toute évidence, il ne suffit pas qu'un objet réponde aux conditions qui précèdent pour avoir de la valeur. S'il en était autrement, l'air serait un des objets les plus précieux, puisqu'il est éminemment utile et qu'un besoin énorme et constant en existe : il faut que d'autres conditions soient remplies et, parmi celles-ci, la principale est que la mise en conjonction de l'objet utile avec le besoin correspondant exige un *travail*.

Ce *travail* n'est lui-même que ce que nous pouvons appeler l'*équivalent mécanique de la difficulté d'accessibilité,* c'est-à-dire de l'ensemble des conditions qui régissent les rapports entre les objets utiles et les besoins auxquels ils répondent, rapports eux-mêmes extrêmement complexes, mais qui peuvent se ramener aux cinq points principaux suivants :

1° la *quantité absolue* de choses utiles existantes dans l'univers (¹) ;

2° la *distance* entre le siège du besoin et celui de l'objet utile ;

3° les *obstacles* qui se dressent entre eux ;

4° les *transformations* que la chose utile doit subir ;

5° le *degré de perfectionnement* des procédés de transport ou de transformation.

Qu'il nous soit permis d'insister ici sur l'importance capitale de la distinction que nous avons opérée entre les deux éléments très distincts du concept de l'*utilité* au sens traditionnel. C'est grâce à elle, en effet, que nous pouvons mettre en pleine lumière le rôle jusqu'ici si mal compris du *travail*. Car, il y a travail et travail ; et un travail ne peut avoir d'influence sur la valeur de l'objet auquel il s'applique qu'à la condition de tendre à rejoindre les deux termes, *utilité* (sens nouveau) et *besoin*. C'est ce qui explique les cas nombreux où le travail, quoi qu'en disent ses adeptes, n'engendre aucune valeur.

Mais, il est un quatrième élément dont la présence est indispensable à la formation définitive de la notion de valeur, c'est la *sécurité* (²), c'est-à-dire, la certitude que le possesseur d'une chose

---

(¹) C'est ce que beaucoup d'économistes appellent la Rareté.

(²) Cfr. Edmond Picard, *Le Droit pur,* p. 31. « Aussi a-t-on pu dire qu'elle (la sécurité) était un des éléments de la valeur au sens économique du terme. »

doit avoir d'en jouir ou d'en disposer conformément à ses goûts ou à ses nécessités.

Utilité, au sens restreint, *besoin, travail, sécurité* constituent donc les quatre éléments principaux de la valeur.

La loi générale qui régit leurs rapports avec la valeur même doit, selon nous, s'exprimer comme suit : *une chose (ou un objet) quelconque ne peut avoir de valeur que si elle est utile. Si le besoin en existe, si un travail est nécessaire pour mettre la chose utile en conjonction avec le besoin, afin qu'elle puisse y satisfaire, enfin, si la sécurité est assurée ; l'utilité, étant invariable, ne peut affecter les variations de la valeur ; par contre, les trois autres éléments étant sujets à variations, celles-ci influenceront la valeur dans les conditions ci-après : toutes autres conditions supposées égales, cette valeur augmente lorsqu'augmente la somme des besoins auxquels l'objet répond ; diminue lorsqu'augmentent les quantités de ces mêmes objets à pied d'œuvre et disponibles pour y satisfaire ; augmente lorsqu'augmente la difficulté d'accessibilité ; augmente lorsqu'augmente la sécurité dont bénéficie la satisfaction du besoin et la possession des choses propres à y satisfaire.*

Evidemment, cette formule est bien longue ; et l'esprit humain, qui aime les phrases lapidaires faciles à retenir, se contente malheureusement trop souvent d'aphorismes. Dans le cas qui nous occupe, ceux-ci ne traduisent que fort imparfaitement la loi générale que nous venons d'énoncer.

L'un de ces aphorismes porte le nom pompeux de *Loi de l'offre et de la demande.* Il exprime certes une vérité incontestable et intangible ; mais une vérité incomplète ou, plutôt, un aspect incomplet de la vérité, ce qui fait que beaucoup ont cru pouvoir en contester le fondement (¹). La loi de l'offre et de la demande s'énonce comme suit : *la valeur d'un objet augmente avec l'accroissement de la demande et diminue avec l'augmentation de l'offre dont il est l'objet* (²).

(¹) Voir notamment Georges Valois, l'*Économie nouvelle*, pages 76-77 et suivantes.

(²) C'est intentionnellement que nous évitons de dire « augmente ou diminue *proportionnellement à* ou *en raison directe de* », comme le font beaucoup

Quoique incomplet, cet énoncé serait à l'abri de toute critique si on le complétait par la phrase : *Toutes autres conditions restant égales d'ailleurs*, restriction que nous croyons être le premier à proposer.

En écourtant plus encore l'énoncé de la loi de l'offre et de la demande dans la formule suivante : *l'abondance ou la rareté d'un objet règlent toute sa valeur,* on a cru ériger une autre théorie appelée la *théorie quantitative ;* mais cette formule, elle non plus, n'a d'autre valeur que celle de cet autre aphorisme de Marx : *la substance de la valeur, c'est le travail.* Tous deux expriment une part de vérité, mais leur grand tort est qu'ils donnent à penser qu'ils sont la vérité tout entière.

Pour illustrer la théorie de la valeur dont nous venons de poser les jalons, et la discuter d'une façon plus attrayante qu'« in abstracto », nous avons choisi la valeur de l'hélium, parce qu'il s'agit d'un corps nouveau dont la valeur a passé rapidement par la plupart des stades qui peuvent caractériser l'évolution de la valeur d'une chose, ce qui rend son cas assez typique.

Premier stade. — Avant que l'hélium fût connu, et de tout temps, son *utilité* existait, parce qu'elle résulte uniquement de l'ensemble des propriétés physiques et chimiques (légèreté et incombustibilité) qui le rendent éminemment propre au gonflement des aérostats. D'ailleurs, le *besoin* de ce corps existait depuis l'invention des ballons, puisque les gaz qu'il est appelé à remplacer, présentent de grands dangers au point de vue incendie, et qu'il y aurait eu tout avantage à leur substituer un gaz incombustible tel que l'hélium.

Il ne peut être évidemment question d'attribuer une valeur à ce dernier, au stade considéré, puisqu'il était inconnu. La *sécurité,* dans ces conditions, ne peut elle-même jouer aucun rôle à ce stade, non plus d'ailleurs qu'au suivant.

Deuxième stade. — Après que l'hélium eut été reconnu dans la masse incandescente du soleil, et avant sa découverte sur terre,

---

d'auteurs. Cette façon d'exprimer la loi de l'offre et de la demande a été condamnée magistralement par P. Leroy-Beaulieu, *op. cit.*, t. III, pages 61 à 67.

il ne pouvait être question encore de lui attribuer une valeur ; est-ce à dire qu'elle n'existait en aucune façon ? Nous ne le pensons pas, car l'utilité existait, le besoin aussi : mais le travail à effectuer pour mettre l'objet en contact avec le besoin dépassait les forces humaines ; il eût été infiniment grand. Pour ce motif, l'on peut dire que la valeur de l'hélium, à ce moment, se maintenait également vers l'infini positif. Nous croyons que c'est à la valeur considérée à ce stade, et seulement alors, que l'on pourrait appliquer avec quelque raison l'épithète de *potentielle* dont certains économistes ont quelque peu abusé (¹). Nous préférerions cependant l'expression de *virtuelle* ou *latente*, dont la nuance nous paraît s'appliquer mieux à un concept purement passif comme celui de valeur.

Troisième stade. — Du jour où l'hélium fut découvert sur notre planète, le travail de mise en conjonction entra en ligne de compte, car il devint réalisable. Le facteur *sécurité*, dès ce moment, entre également en jeu, car il est évident que si le premier producteur d'hélium n'avait pas pu jouir en paix des résultats de son labeur, son produit n'aurait pu avoir aucune espèce de valeur. Du fait que les quatre éléments *utilité, besoin, travail et sécurité* se trouvent réunis à ce stade, la valeur de l'hélium sort de l'état de virtualité où nous l'avons entrevue au stade précédent pour prendre une existence réelle. Comme le travail est toujours très grand, la valeur elle-même reste considérable.

Quatrième stade. — Actuellement, par suite de la découverte de sources nouvelles (²) et de procédés plus perfectionnés d'extraction, il est possible de produire de l'hélium dans des conditions de bon marché qui permettront de l'utiliser pratiquement bientôt.

L'*utilité*, le *besoin*, le *travail* et la *sécurité* concourent tous à établir sa valeur au niveau actuel, laquelle a déjà bien diminué et diminuera encore.

(¹) Cfr. Chr. Cornelissen, *op. cit.*, pages 385, 386, 387, etc. Chap. XVIII. *La valeur potentielle.*

(²) Cfr. page 10. *La découverte de sources nouvelles correspond à une diminution d'obstacle* (v. page 8, 3°).

Cinquième stade. — On peut imaginer qu'un jour viendra où l'hélium sera à son tour détrôné par un gaz plus léger et tout aussi incombustible, que l'on pourrait découvrir. Dès lors, son utilité restant toujours la même, c'est le besoin qui d'abord diminuera, puis disparaîtra, ce qui se produirait également dans le cas où le plus lourd que l'air l'emporterait définitivement sur le plus léger, et où aucun autre usage ne serait découvert à l'hélium. Par suite de la disparition du besoin auquel il correspond, la valeur de l'hélium disparaîtrait à son tour et tomberait à zéro.

Sixième stade. — Il peut même arriver, — éventualité qui semble difficilement pouvoir se réaliser pour l'hélium, mais qui s'est produite à maintes reprises pour d'autres objets tout aussi utiles, — qu'une surproduction trop intense pour les besoins locaux, non seulement enlève en certains endroits toute valeur aux dits objets, mais même leur donne une valeur négative. C'est le cas, notamment, pour les lapins en Australie, et pour les bois de certaines forêts vierges qu'il faut détruire à grands frais. Si ces frais devenaient immenses, la valeur négative tendrait vers l'infini négatif.

Nous voyons ainsi que la valeur en soi d'une même chose, son *utilité* restant immuable, peut varier dans certaines conditions de *l'infini positif à l'infini négatif,* en passant naturellement par *zéro,* suivant les variations propres de ces trois autres éléments : ***besoin, travail, sécurité.***

La grande importance de cette conclusion ressortira bientôt, lorsque nous traiterons de la mesure des valeurs.

⁂

En effet, nous devons nous demander s'il est utile de mesurer la valeur : « Si vous pouvez mesurer ce dont vous parlez et l'exprimer par un nombre, vous savez quelque chose de votre sujet », a dit Lord Kelvin, l'illustre savant anglais ; « mais, si vous ne pouvez pas le mesurer, si vous ne pouvez pas l'exprimer par un nombre, vos connaissances sont d'une pauvre espèce et bien peu satisfaisantes » (¹).

(¹) L. Poincaré, *La physique moderne*, page 22.

Au surplus, la crise actuelle aux manifestations aussi variées que déconcertantes, nous indique impérieusement la nécessité de tout tenter pour apprendre à mieux connaître la valeur. Si nous pouvons arriver à en mesurer avec succès les variations de grandeur, nous aurons fait un grand pas vers cette connaissance.

D'ailleurs, tous les économistes ont reconnu, au moins implicitement, l'importance de la mesure des valeurs, puisque cette expression revient constamment sous leur plume lorsqu'ils parlent de la monnaie et des prix (¹). Cependant, la plupart ne semblent avoir eu au sujet de la mesure en général, et de celle des valeurs en particulier, que des idées très vagues et souvent radicalement fausses (²).

Voyons donc d'abord ce que c'est que mesurer.

Évidemment, c'est établir ou prendre la mesure d'une grandeur; mais le mot « mesure » possède lui-même en mathématiques diverses acceptions qui se découvrent dans les phrases suivantes :

1° la mesure des longueurs est le mètre ;

2° le nombre est la mesure des grandeurs ;

3° la mesure de telle longueur est 10 mètres.

Ce n'est que dans cette dernière phrase que l'on trouve évidemment le sens complet (³) du mot « mesure ». A vrai dire, il s'emploie encore fréquemment dans le sens de mesurage ; mais, dans

---

(¹) Voir notamment Stanley Jevons, *La monnaie*. Paris, Alcan, 1891, p. 7, chap. II. — Gide, *op. cit.*, p. 73, chap. V. — P. Leroy-Beaulieu, *op. cit.*, p. 90, p. 100 et autres, etc.

(²) Paul Leroy-Beaulieu, *op. cit.*, tome III, pages 90-91-92, est d'avis qu'il est impossible d'obtenir une mesure *commune* (sic) de la valeur, dans le temps et dans l'espace. Il a raison s'il a voulu parler d'une unité fixe et immuable, mais non pas s'il a entendu dire qu'il est impossible de choisir une unité meilleure que celles dont on s'est servi jusqu'ici.

Faisons remarquer ici combien la terminologie économique et même mathématique est peu fixée encore, puisqu'il est permis à un auteur comme M. Leroy-Beaulieu de substituer l'expression « commune mesure » qui possède, en mathématiques, un sens traditionnel propre absolument différent, à celle si claire d'*unité*. Presque tous les économistes d'ailleurs ont fait comme lui.

(³) Voir *Mesures électriques* de M. Eric Gerard, Directeur de l'*Institut Electrotechnique Montefiore de l'Université de Liége* (Paris, Gauthier-Villars, 1908). L'auteur, p. 1, emploie pour la *mesure* l'expression de « grandeur numérique », qui correspond bien à cette acception.

ce cas, le contexte est généralement suffisant pour éviter toute confusion.

Donc, *prendre la mesure d'une grandeur, c'est déterminer, ou mieux, exprimer celle-ci au moyen :* 1° *d'une grandeur ou d'une portion de grandeur de même espèce, prise comme unité ;* 2° *d'un nombre qui indique combien de fois l'unité considérée est comprise dans la grandeur à mesurer, qui donne donc le rapport numérique de cette grandeur à son unité.*

Mais, comme nous le voyons dans cette définition, la notion de mesure présuppose celle de *grandeur.*

Ici encore, l'absence d'une théorie toute faite de la grandeur nous obligerait à entrer dans des détails très longs qui pourraient paraître déplacés dans ce travail. Ne pouvant les donner ici in extenso, nous nous bornerons à résumer les conclusions auxquelles une étude approfondie de la notion de grandeur nous a amené.

En dehors de la notion fondamentale de *grandeur,* qui signifie *ce qui peut être divisé*, il existe un grand nombre de grandeurs particulières correspondant aux divers aspects des choses (¹). Nous pouvons les répartir, suivant les points de vue auxquels nous nous plaçons pour les examiner, en catégories que voici :

1° les grandeurs composées (le volume) ou simples (la longueur), suivant qu'elles répondent à des entités qui peuvent ou non se décomposer elles-mêmes en éléments plus simples ;

2° les grandeurs discontinues (une armée) ou continues (l'espace), suivant que les unités qui peuvent servir à les mesurer possèdent ou non une individualité naturelle propre (²) ;

3° les grandeurs stables (le poids) ou instables (la température), suivant leur degré de stabilité par rapport aux objets auxquels elles se rapportent ;

4° les grandeurs limitées ou illimitées, suivant qu'elles sont ou non comprises entre des bornes ou limites qu'elles ne peuvent

---

(¹) Au sujet de la grandeur, voir H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion ; A. Witz, REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, 20 janvier 1920, pp. 92 et 93.

(²) Au sujet de la continuité ou de la discontinuité, voir Sir O. Lodge, *Rapport de la « British Association for the advancement of sciences »*, année 1914.

dépasser ; les premières peuvent elles-mêmes se diviser en grandeurs bornées en un sens seulement, vers le zéro par exemple (la longueur, la surface) et en grandeurs bornées dans les deux sens (la grandeur angulaire, comprise entre 0 et 90°) (¹). Quant aux grandeurs illimitées dans les deux sens, positif et négatif, elles sont assez rares, à ce qu'il nous semble ; nous croyons pouvoir y ranger l'électricité statique et la valeur ;

5° les grandeurs objectives (la longueur) ou subjectives (la lumière), suivant que le point de vue objectif ou subjectif y domine ;

6° une autre classification importante des grandeurs peut encore s'obtenir si l'on considère les divers modes d'emploi des unités destinées à leur mesure :

a) emploi par juxtapositions successives (longueur) ;
b) » » divisions successives (angles, temps) ;
c) » » mesure des effets de la grandeur considérée (poids) ;
d) » » mesurage des éléments de la grandeur (surface, volume) ;
e) » » le calcul (distance inaccessible) ;
f) » » jugement (intensité lumineuse) (²).

Cette dernière classe comporte la plupart des grandeurs subjectives.

Disons ici en passant que les mathématiciens distinguent surtout les grandeurs algébriques des grandeurs vectorielles ; mais, cette distinction n'a aucune importance pour le sujet qui nous occupe.

De ces considérations, sur lesquelles nous ne pouvons malheureusement insister ici, se dégagent les conclusions suivantes dont l'importance n'échappera à personne si l'on veut bien se rappeler

---

(¹) Nous savons que la question des limites peut donner lieu à controverse ; aussi nous bornerons-nous à dire que tout se passe (ou paraît se passer) comme si certaines grandeurs étaient limitées et d'autres illimitées. D'ailleurs les théories de Lorentz, développées par Einstein, et d'où il résulterait que la vitesse de la lumière est *la limite supérieure des vitesses*, ne sont-elles pas de nature à ouvrir de nouveaux horizons sur la question des limites ? (Voir à ce sujet Lucien Fabre : *Les théories d'Einstein.* Payot, Paris, 1922).

(²) Cfr. Eric Gérard *op., cit.*, p. 73.

que tous les économistes considèrent la monnaie et les prix comme exprimant la mesure des valeurs :

1° La valeur est une grandeur composée, mais ses éléments, que nous connaissons, — ou la plupart d'entre eux du moins, — sont presque aussi difficilement mesurables qu'elle-même, parce que déjà fort complexes ; par conséquent, il y a lieu, sous le rapport de la mesure, de la traiter comme une grandeur simple, donc de la mesurer au moyen d'*unités de même nature*.

2° La valeur est une grandeur continue et, par conséquent, il faut lui choisir une *unité artificielle* ou *conventionnelle,* l'unité naturelle n'existant pas.

3° La valeur est une grandeur essentiellement instable, et c'est pourquoi *il est impossible de trouver un étalon qui puisse représenter son unité de façon adéquate*.

4° La valeur est une grandeur illimitée dans les deux sens ; il n'existe donc pour elle qu'un point de repère, le zéro ; par conséquent, la *grandeur de son unité ne peut être qu'arbitraire*.

5° La valeur est une grandeur d'ordre principalement subjectif, ce qui explique qu'*elle échappe aux procédés de mesure scientifique habituels*.

6° Elle entre donc dans la catégorie des grandeurs qui ne peuvent être mesurées que *par jugement* (estimation, évaluation).

⁂

Jusqu'à présent, nous sommes resté dans le domaine de la valeur en soi. Mais, du moment où nous en arrivons à parler de sa mesure, nous devons envisager la comparaison d'une valeur avec d'autres, puisque la mesure de grandeur n'est en somme que la comparaison numérique de la grandeur à mesurer avec l'unité choisie.

Or, la comparaison des valeurs s'établit principalement par l'échange qui dans sa forme primitive est caractérisé par le troc. Cette opération consiste à se transmettre la propriété de certains objets, contre celle d'autres objets, directement sans l'intermédiaire d'une monnaie quelconque : par exemple, un bœuf contre quatre moutons, ce qui suppose que les parties sont d'accord pour estimer que la valeur en soi d'un bœuf est égale à quatre fois la valeur en soi d'un mouton et inversement, sans quoi l'échange n'aurait pas lieu. Cette opération donne naissance à un aspect bien particulier et très important de la valeur en soi, que l'on a appelée la *valeur d'échange* ou *la valeur en échange*. C'est sous cet aspect qu'elle devient pratiquement mesurable.

Nous ne pouvons nous attarder à examiner ici si la valeur d'échange s'identifie absolument avec la valeur en soi. Bornons-nous à dire que nous ne le pensons pas, mais qu'en tout état de cause, la valeur d'échange nous apparaît comme le seul aspect sous lequel la valeur en soi est pratiquement mesurable ; l'on doit donc bien se contenter des résultats plus ou moins approximatifs que donne la mesure de la valeur d'échange.

C'est qu'en effet, il y a, dans cette opération du troc, ainsi que chacun peut le voir, un premier procédé de mesure de la valeur en soi, puisque la valeur d'un bœuf peut s'exprimer au moyen de la valeur du mouton qui est prise comme unité. Comment s'opère cette mesure ?

Par un double jugement, car si le propriétaire du bœuf accepte les moutons en échange, c'est qu'il juge que leur valeur équivaut à celle du bœuf, et inversement pour le propriétaire des moutons.

Remarquons immédiatement que ce procédé de mesure, tout primitif qu'il est, est encore employé de nos jours sur une grande échelle dans bien des cas. C'est ainsi, notamment, que pour l'évaluation des bois sur pied, le vendeur et l'acheteur procèdent eux-mêmes, chacun de leur côté, à l'évaluation du volume ou cubage, par des procédés d'estimation qui n'ont rien de la rigueur scientifique.

Il s'emploie également, dans le domaine scientifique, pour la mesure de l'intensité lumineuse (¹) avec application de ce que l'on appelle la *réduction à zéro*, qui n'est pas sans une analogie frappante avec le procédé de mesure des valeurs dont nous nous occupons.

En effet, pour comparer les intensités de deux sources lumineuses, on s'arrange de façon que l'impression produite sur la rétine par chacune d'elles soit aussi identique que possible ; et pour estimer la valeur des objets que l'on échange, on fait également en sorte d'équilibrer, autant que faire se peut, les valeurs

---

(¹) Cfr. Eric Gérard, *op. cit.*, pages 73, 74, 75 et suivantes.

des objets à échanger ; d'une part un bœuf, d'autre part quatre moutons.

L'opération peut n'être pas rigoureusement exacte ; mais elle comporte une marge d'approximation que l'on doit s'efforcer par tous moyens de réduire au minimum. Et c'est à quoi précisément doit tendre un bon système monétaire.

⁂

Car, évidemment, le troc n'est qu'un procédé primitif et barbare ; et l'on ne peut s'expliquer que tant de gens songent en ce moment à y revenir, que par suite de la faillite évidente des systèmes monétaires actuellement en vigueur, lesquels cependant marquent un progrès déjà sérieux sur le troc.

Que sont les unités monétaires, en effet, sinon des unités conventionnelles des valeurs ? Tous les économistes sont d'accord sur ce point. Ces unités, les mêmes dans chaque pays, servent de base à toutes les transactions et simplifient considérablement les opérations auxquelles les échanges donnent lieu.

Malheureusement, selon nous, ces unités n'ont pas été choisies dans un esprit suffisamment scientifique, en ce sens qu'il s'est établi une confusion, combien regrettable, et grosse de conséquences, entre deux notions bien distinctes, l'unité elle-même, simple fraction théorique de la grandeur à mesurer, c'est-à-dire donc, quantité déterminée et, si possible, invariable de valeur, et l'étalon, objet matériel qui est censé représenter pratiquement cette unité, c'est-à-dire, contenir précisément la quantité de valeur choisie pour servir d'unité.

Ici encore, de longues considérations sont nécessaires pour l'établissement de notre point de vue. Nous devons nous borner à indiquer les conclusions auxquelles elles nous ont conduit : C'est que, *scientifiquement parlant*, — et c'est bien sans doute ce qu'il convient de faire même en économie, — il est tout aussi inexact de dire que des quantités déterminées d'or, d'argent, d'un métal ou d'un corps quelconque peuvent être considérées comme unités de valeur, et, comme le disent tous les partisans de l'or, que ce métal est le meilleur étalon parmi ces unités, qu'il le serait de dire, par exemple, que le verre est le meilleur étalon d'électricité, que le platine est le meilleur étalon de vitesse, ou que l'eau est le meilleur étalon de chaleur. Tout cela, sous prétexte que chacun de ces corps est celui qui, dans des conditions déterminées, subit le moins de variations de charge électrique, de vitesse ou de température, comme l'or est celui qui subit, ou paraît subir, le moins de variations de valeur.

Or, personne n'a jamais songé, dans le domaine scientifique, à représenter des grandeurs instables telles que la charge électrique, la vitesse, la chaleur, par des étalons matériels. C'eût été d'une absurdité complète. Pourquoi faut-il que l'on soit arrivé au vingtième siècle sans s'apercevoir de ce qu'il n'était pas plus justifié de le faire dans le domaine économique ?

Évidemment, l'on pourrait objecter que l'électricité, la vitesse, la chaleur et les autres grandeurs instables d'ordre plutôt objectif peuvent se déterminer indépendamment des corps ou des objets auxquels elles s'appliquent, et qu'il peut difficilement en être ainsi de la valeur. Cependant, il est un procédé que nous avons indiqué dans nos précédentes publications (¹) qui permet de les en affranchir autant qu'il est possible en pareille matière : c'est d'admettre comme unité la valeur moyenne d'un certain nombre d'objets convenablement choisis, parmi lesquels l'or, l'argent, le charbon, le froment, etc.

Nous nous sommes déjà étendu suffisamment sur cette question pour qu'il nous soit permis, croyons-nous, de ne pas y insister plus longuement ici.

Qu'il nous suffise de remarquer que cette unité, pour n'avoir pas d'étalon équivalent, n'en présenterait pas moins une réalité formelle, beaucoup mieux définie que celle de l'unité basée sur la valeur de l'or, puisque celle-ci varie beaucoup plus que ne varierait la nouvelle unité que nous proposons et qui, en fait, pourrait être rendue pour ainsi dire invariable, par rapport à l'homme s'entend, ce qui est l'essentiel, si l'on choisissait bien les éléments qui devraient la déterminer (²).

— Mais, nous dira-t-on, par quoi représenterez-vous votre unité si vous supprimez l'or ?

(¹) *Le rôle de l'étalon monétaire dans la crise actuelle* et *Le Crédit après la guerre*.

(²) Cfr. *Le rôle de l'étalon monétaire dans la crise actuelle*.

— A quoi nous répondrons : Par quoi représentez-vous l'unité d'électricité, ou l'unité de vitesse, ou l'unité de chaleur ? Vous ne la représentez pas ! Vous vous bornez à la déterminer. Cela suffit et ne gêne en rien les savants appelés à s'en servir journellement.

Évidemment, le commun des mortels appelé à utiliser l'unité des valeurs n'a pas l'esprit scientifiquement entraîné des savants auxquels nous venons de faire allusion. Mais nous ne savons plus quel économiste a dit, et le fait ne peut être nié, que les 9/10, pour ne pas dire les 99/100 des personnes appelées à se servir de pièces de monnaie, qu'elles soient d'or ou d'argent, les acceptent en payement, *sans se rendre compte le moins du monde de leur valeur*. C'est tellement vrai qu'à certaines époques et dans certains pays (en Norvège notamment), lorsqu'il s'est agi de remplacer des billets de banque qui avaient cours depuis un certain temps par des pièces de métal jaune, on eut toutes les peines du monde à faire admettre celles-ci par les paysans. C'est là, semble-t-il, la meilleure réponse à donner à ceux qui, comme M. Georges Valois nous le faisait remarquer récemment, pensent que jamais il ne sera possible de faire admettre une autre unité que l'or par les paysans français habitués depuis longtemps à compter en louis. Il nous semble que M. Valois n'a qu'une bien piètre opinion de ses compatriotes. Pour notre part, nous pensons, au contraire, que l'opinion publique chez nos voisins du Sud, plus rapidement sans doute que partout ailleurs si elle était bien éclairée, adopterait facilement une réforme qui compléterait, en le perfectionnant, le remarquable système métrique dont le génie de la France a doté le monde entier, et que certains pays, trop imbus de leurs traditions, ne se sont pas encore résignés à adopter.

Oserions-nous espérer également que la Belgique, sœur de la France, et patrie du génial inventeur du système décimal, sera l'une des premières parmi les nations à examiner la possibilité d'adopter une réforme aussi rationnelle et indispensable que celle que nous préconisons et à laquelle, nous en avons le ferme espoir, il ne faudra pas deux siècles, comme il l'a fallu à celle de Simon Stévin, pour s'imposer définitivement ?

SESSION DU 9 FÉVRIER 1922

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première Section

M. d'Ocagne fait une communication relative aux *Notes mathématiques* que M. Neuberg a publiées récemment dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES (41^e année, 1er fasc., p. 67).

M. Neuberg a bien voulu le citer dans cet intéressant travail ; c'est pourquoi M. d'Ocagne pense qu'il y a lieu de donner quelques références complémentaires en ce qui le concerne. Il signale, en particulier, son article des NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES (1883, p. 256) dans lequel le problème C traité par M. Neuberg parmi ses *Applications de la Méthode dite de Roberval* (p. 77 des ANNALES) est résolu pour la première fois. Depuis lors M. d'Ocagne a introduit ce problème parmi les exercices qui figurent dans son *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 136) en faisant la remarque (p. 137) que la solution obtenue peut être regardée comme exactement corrélative de celle qui permet de construire la tangente au lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés ont pour enveloppes des courbes données. Voici (avec les notations de M. Neuberg) comment peut s'énoncer cette solution : *Si les points* U *et* V *dont la distance est vue du point* O *sous un angle constant décrivent des courbes dont les tangentes se coupent en* P *et si la droite* UV *touche son enveloppe au point* Q, *les droites* OP *et* OQ *sont antiparallèles par rapport à l'angle* UOV.

M. le comte de Sparre fait rapport sur le mémoire de M. Pasquier, intitulé : *Sur le mouvement gyroscopique.*

M. Pasquier commence par définir ce qu'il entend par un mouvement gyroscopique autour d'un point fixe O d'un solide de révolution dont l'axe passe par O, ou, plus exactement, pour un solide dont l'ellipsoïde d'inertie pour le point fixe est de révolution.

Il adopte la définition, que le mouvement sera gyroscopique si l'angle de l'axe cinétique OK avec l'axe de révolution reste toujours petit.

Il montre d'ailleurs, dans la suite du mémoire, comment cette définition peut se transformer en d'autres équivalentes, qui permettent de reconnaître plus facilement si un mouvement donné est gyroscopique et de fixer la nature de ce mouvement.

Comme il le dit ensuite, M. Pasquier rappelle des notions et des résultats qui font d'ordinaire partie d'un cours de mécanique analytique.

Il divise d'ailleurs l'étude du mouvement en deux parties, celle du mouvement moyen du solide déduit du théorème relatif à la vitesse de l'extrémité de l'axe cinétique, et celle du mouvement du corps par rapport à l'axe cinétique, ce qui constitue ce qu'il appelle le mouvement particulier du corps.

Il commence par examiner le cas classique où le corps n'est soumis à aucune force, cas dans lequel la solution est donnée sous une forme très simple par le théorème de Poinsot. Toutefois M. Pasquier croit utile de reprendre analytiquement la question afin d'obtenir certaines formules et certains résultats sur lesquels il s'appuie par la suite.

Il passe ensuite au cas où le couple des forces extérieures, par rapport au point fixe, n'est plus nul mais seulement petit ; il examine les modifications qui en résultent pour le mouvement et les conditions pour que ce mouvement reste gyroscopique.

Cet examen lui permet d'indiquer, ainsi que je l'ai dit au début, les formes différentes que l'on peut donner de la définition d'un mouvement gyroscopique, formes qui d'une part permettent, pour un mouvement donné, de se rendre plus facilement compte s'il est gyroscopique et d'autre part de voir, de suite, quel est le mouvement moyen du corps.

M. Pasquier fait ensuite application de ce qui précède d'abord au cas d'un solide de révolution fixé par un point de son axe et animé d'une vitesse de rotation suffisante autour de cet axe, et il montre les conditions que doit remplir cette vitesse de rotation pour que le mouvement soit gyroscopique.

Il examine ensuite le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité en tenant compte de la précession des équinoxes et il montre que ce mouvement est bien un mouvement gyroscopique.

Je propose à la Section de voter l'impression du mémoire de M. Pasquier dans les ANNALES.

M. le comte de Montessus de Ballore, second rapporteur, appuyant les conclusions de M. le comte de Sparre, la Section décide l'impression du mémoire dans la seconde partie des ANNALES.

M. M. Alliaume présente une *Contribution à la théorie du niveau à bulle.*

1. En 1912 M. Goedseels a publié dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES (36^{me} année, vol. mém., p. 133) une *théorie du niveau à bulle longitudinal* qui peut être qualifiée de parfaite, sous la réserve d'une certaine complication dans la théorie du *niveau à pivot.* C'est cette complication que je me propose ici de faire disparaître. — J'ajouterai quelques indications sur l'application de la Théorie des erreurs à la confrontation de la théorie et de l'étude expérimentale du niveau à pivot, actuellement effectuée sur quelques appareils de la collection topographique de l'Université de Louvain.

2. Je rappelle la définition du niveau à pivot, niveau longitudinal dont la fiole est solidaire d'une pièce qui ne peut que tourner autour d'une droite, appelée pivot, destinée à recevoir une position verticale ou à peu près verticale. La liaison entre la fiole et la pièce susceptible de rotation autour du pivot est assurée par un dispositif déformable dont la configuration dépend d'un seul paramètre : c'est le dispositif de réglage.

Les deux extrémités du niveau sont marquées de signes de repère, tels que des lettres A et B ; les mêmes signes servent à distinguer les graduations voisines des extrémités correspondantes et dirigées chacune positivement vers chacune de celles-ci ; les lectures aux extrémités de la bulle s'appellent a et b, à savoir a dans la graduation A à l'extrémité de la bulle la plus voisine de l'extrémité A du niveau, et b dans la graduation B à l'extrémité de la bulle la plus voisine de l'extrémité B du niveau ; enfin la lecture efficace L est définie par l'égalité

$$\mathrm{L} = \frac{a - b}{2}.$$

Appelons OXYZ des axes rectangulaires fixes par rapport au sol, dont l'origine O appartient au pivot et dont l'axe OZ est vertical. Appelons encore $Oxyz$ des axes rectangulaires ayant la même origine O et le même sens que les axes OXYZ, invariablement liés à la pièce dont le niveau est solidaire par l'intermédiaire du dispositif de réglage, et dont l'axe Oz, appartenant au pivot, est dirigé de manière à faire un angle non obtus avec l'axe OZ. Par définition du niveau à pivot, cet angle, obliquité du pivot sur la verticale, est dès lors petit, c'est-à-dire mesuré en radians par un nombre i dont le carré est négligeable. Soit α_0 l'angle de position de l'axe Oz dans le système OXYZ. La direction dont l'angle de position est α_0 et dont l'angle de pente est $(-i)$ appartient au plan yz du système mobile. L'axe Oz est déterminé dans la pièce mobile par la condition d'avoir cette direction $(\alpha_0, -i)$ dans la position de cette pièce pour laquelle la lecture équivalente sur le niveau est maximum. Dans toute autre position de la pièce mobile, l'axe Ox fera avec la direction $(\alpha_0, -i)$ un angle qui sera appelé θ. Dans cette orientation quelconque de la partie mobile, l'angle de position et l'angle de pente de l'axe Oz seront appelés respectivement α et p.

3. Pour toutes les orientations possibles de la pièce mobile, la variable p ne sort pas de l'intervalle $(-i, +i)$. A deux valeurs égales de p correspondent deux mêmes lectures L sur le niveau, et à des valeurs différentes de p correspondent généralement des lectures différentes L. Eu égard à ce que la valeur absolue de p est au plus égale à la valeur absolue de i, on peut donc écrire :

$$\mathrm{L} = m + np,$$

où m et n représentent respectivement les valeurs que prennent L et $\frac{dL}{dp}$ lorsqu'on y fait $p = 0$. Pour une valeur déterminée de l'obliquité i, le terme m dépend en ordre principal de la configuration du dispositif de réglage, tandis que le facteur n, qui ne varie que peu avec cette configuration et doit être multiplié par le facteur p déjà petit, peut être considéré comme une constante attachée à la fiole pourvue de sa graduation.

Les coordonnées polaires (α, p) de l'axe Ox satisfont à l'équation qui exprime la perpendicularité de cet axe sur le pivot $(\alpha_o, \pi/2 - i)$,

$$\cos i \sin p + \sin i \cos p \cos (\alpha - \alpha_o) = 0,$$

ainsi qu'à l'équation qui exprime que cet axe fait un angle θ avec la direction $(\alpha_o, - i)$,

$$- \sin i \sin p + \cos i \cos p \cos (\alpha - \alpha_o) = \cos \theta.$$

L'élimination de $(\alpha - \alpha_o)$ entre ces deux égalités laisse :

$$\sin p = - \sin i \cos \theta,$$

ou, à l'approximation actuelle,

$$p = - i \cos \theta,$$

de sorte que, en fonction de θ,

$$L = m - ni \cos \theta.$$

On en tire les valeurs de θ pour lesquelles, la lecture efficace étant nulle, la bulle se trouve entre ses repères, ainsi que les conditions pour que ces valeurs soient réelles et distinctes, réelles et confondues.

4. Les déplacements angulaires de la pièce mobile autour du pivot, c'est-à-dire les variations de l'angle θ, sont ordinairement mesurés sur un cercle gradué dont le plan est perpendiculaire au pivot, et dont le sens de chiffraison doit être adopté pour sens des rotations dans les plans XY et xy des systèmes d'axes OXYZ et $Oxyz$. Soient φ la lecture sur ce cercle pour une position quelconque de la pièce mobile, et φ_o cette lecture pour la position de cette pièce définie par une valeur nulle de l'angle θ :

$$\theta = \varphi - \varphi_o$$

et

$$L = m - ni \cos(\varphi - \varphi_o).$$

Un instrument à pivot théoriquement vertical et porteur d'un niveau étant proposé et installé, l'étude de ce niveau comporte la détermination des constantes m, $-ni$ et φ_o. Cette détermination peut se faire d'une manière immédiate par les lectures L sur le niveau et les lectures φ_o et ($\varphi_o + 1$ droit) sur le cercle gradué dans deux positions de la pièce mobile perpendiculaires et pour l'une desquelles L passe par sa valeur maximum. — La recherche de l'orientation pour laquelle L passe par sa valeur maximum sera pénible, et il vaudra mieux remarquer que les orientations pour lesquelles L passe par ses valeurs maximum et minimum sont bissectrices de celles pour lesquelles L passe par des valeurs égales, nulles par exemple. En agissant ainsi, l'opérateur considère comme rigoureux les calculs approchés par lesquels on a exprimé L en fontion de φ, et ne cherche pas à diminuer l'influence des erreurs inévitables d'observation.

Pour se rendre compte, sur un niveau de précision, de la valeur de cette théorie, on donnera à la pièce mobile des orientations quelconques repérées par les lectures φ_1, φ_2, ... φ_n sur le cercle gradué, et on fera sur la fiole les lectures L_1, L_2, ... L_n correspondantes. Ces observations permettent d'écrire un système de n équations aux trois inconnues m, $-ni$, φ_o :

$$L_k = m - ni \cos(\varphi_k - \varphi_o), \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Pour préparer ce système à l'application de la Théorie des erreurs et le rendre linéaire sans effectuer des développements en série à partir de valeurs approchées des inconnues, il suffit de poser :

$$P = -\frac{1}{-ni \cos \varphi_o}, \qquad Q = \frac{m}{-ni \cos \varphi_o}$$

pour le transformer dans le système

$$\sin \varphi_k \operatorname{tg} \varphi_o + L_k P + Q + \cos \varphi_k = 0,$$

linéaire en $\operatorname{tg} \varphi_o$, P, Q, fonctions des inconnues. Les valeurs les plus avantageuses de ces inconnues ayant été trouvées, il suffira d'une observation qualitative pour lever l'ambiguïté sur φ_o, et les valeurs correspondantes des deux autres inconnues finales s'obtiendront sans difficulté.

5. L'application rigoureuse de la Théorie des erreurs comporte souvent des calculs si longs qu'on peut désirer sacrifier quelque peu la rigueur de manière à les abréger. Ici, par exemple, on pourra grouper les observations trois par trois, écrire des séries de trois équations à trois inconnues, et combiner, pour chaque inconnue, les valeurs tirées de toutes les séries. La résolution d'un pareil système

$$\sin \varphi_k \operatorname{tg} \varphi_o + L_k P + Q + \cos \varphi_k = 0, \qquad k = 1, 2, 3$$

serait ici sans intérêt, mais les valeurs de ses racines se prêtent aux remarques suivantes :

1° On peut trouver désagréable l'obligation de faire les lectures a_k et b_k aux deux extrémités de la bulle. Si on croit pouvoir considérer la somme de ces deux lectures comme une constante $2c$ pendant la durée des trois observations, on a :

$$L_k = a_k - c \quad \text{ou} \quad c - b_k,$$

et les équations

$$\sin \varphi_k \operatorname{tg} \varphi_o + (a_k - c) P + Q + \cos \varphi_k = 0$$

ou

$$\sin \varphi_k \operatorname{tg} \varphi_o - (b_k - c) P + Q + \cos \varphi_k = 0.$$

Les valeurs de $\operatorname{tg} \varphi_o$ et de P tirées de l'un ou de l'autre de ces systèmes sont indépendantes de c. Il n'en est pas de même de la valeur de Q. Il en résulte que, en vue du calcul de $\operatorname{tg} \varphi_o$ et de $-ni$, on peut, dans les équations primitives, remplacer chaque L_k par a_k ou par $-b_k$; mais on ne peut pas faire pareille simplification en vue du calcul de m.

2° Les valeurs de m et de $-ni$ ne dépendent des lectures φ_k sur le cercle gradué que par leurs différences deux à deux, sans qu'il en soit de même de la valeur de φ_o. Les calculs se simplifient considérablement lorsque, dans chaque série d'observations, on donne à la partie mobile trois orientations à 120° l'une de l'autre. En particulier, dans ce cas, on trouve pour m (comme il était nécessaire) la moyenne arithmétique des lectures efficaces L_k.

6. Indépendamment de toute théorie, l'étude expérimentale d'un niveau à pivot se résume dans une série de graphiques dont chacun correspond à une certaine obliquité du pivot sur la verticale et à une certaine configuration du dispositif de réglage. Chaque graphique porte autant de points qu'il a été fait d'observations dans ces conditions, et ces points appartiennent théoriquement à la courbe représentative de la manière dont la lecture équivalente L sur la fiole dépend de la lecture φ sur le cercle gradué. Au moyen d'axes rectangulaires portant des segments proportionnels à ces lectures respectives L et φ, la courbe obtenue sera voisine d'une sinusoïde. (Elle sera voisine d'une cardioïde lorsqu'on fera usage de coordonnées polaires, avec les lectures φ comme angles de position et les lectures L comme rayons vecteurs.) Il s'agira de voir moyennant quelle approximation cette courbe peut être assimilée à une sinusoïde (ou à une cardioïde). Si cette approximation est satisfaisante, on pourra donner la forme suivante à la théorie du niveau à pivot.

Pour une même configuration du dispositif de réglage, la lecture efficace L sur le niveau est une fonction de l'obliquité, petite par hypothèse, du pivot sur la verticale, et une fonction périodique de la lecture φ sur le cercle gradué, moyennant une période de quatre angles droits. Cette fonction peut donc, à l'approximation actuelle, être d'abord remplacée par les deux premiers termes de son développement en série suivant les puissances de i :

$$L = m + i\,\frac{\partial L(0, \varphi)}{\partial i}.$$

Mais lorsque, le pivot étant vertical, i est égal à zéro, la lecture L est indépendante de φ, pour une même configuration du dispositif de réglage. Le premier terme m est donc indépendant de θ, et la partie périodique de L est le coefficient de i. Celui-ci peut donc être développé en série trigonométrique suivant les cosinus et sinus des multiples successifs de φ, et l'expérience montre qu'il est conforme à l'approximation actuelle de limiter ce développement aux termes en cos φ et sin φ :

$$L = m - ni \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Le rapprochement des différents graphiques montrera de quelle manière la courbe obtenue se modifie pour des variations apportées à l'obliquité du pivot sur la verticale et à la configuration du dispositif de réglage. Pour retrouver les conclusions de la théorie, il faudra faire les constatations suivantes :

1° Lorsqu'on fait varier l'obliquité seule, la sinusoïde (rapportée aux axes rectangulaires) se déforme principalement par une variation dans le même rapport des distances de tous ses points à son axe parallèle à l'axe des φ, sans qu'il y ait modification sensible de l'ordonnée de cette droite et des abscisses des extrema ; et pour des obliquités de plus en plus faibles, la sinusoïde tend de plus en plus à se confondre avec cette droite.

2° Lorsqu'on fait varier la configuration du dispositif de réglage seule, la sinusoïde se déplace sans déformation sensible, et parallèlement à l'axe des L ; dans le niveau réglé, l'axe de la courbe est confondu avec cet axe.

L'expérience aura alors justifié la conclusion que voici : en ordre principal, le seul à considérer ici, n dépend seulement de l'obliquité du pivot, m dépend seulement de la configuration du dispositif de réglage, et φ_0 est une constante instrumentale. Comme on ferait varier φ_0 en ajoutant un même nombre à tous les nombres de la chiffraison du cercle gradué, il est clair que cette constante instrumentale dépend de l'orientation donnée par le constructeur à la fiole par rapport à la chiffraison du cercle gradué.

M. V. Thébault adresse à la Section trois *Contributions à la géométrie du tétraèdre.*

I. — POINT REMARQUABLE DU TÉTRAÈDRE

Nous avons signalé déjà un point remarquable du tétraèdre (¹) sur les propriétés duquel nous voudrions donner des développements supplémentaires.

1. Considérons un tétraèdre quelconque ABCD dans lequel $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$. Marquons sur chacune des faces du tétraèdre les points α, β, γ, δ dont les distances aux trois arêtes qui limitent ces faces soient inversement

---

(¹) JOURNAL DE VUIBERT, 45ᵉ année, p. 157, question 9371.

proportionnelles aux arêtes opposées. *Les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ *sont concourantes en un point* K.

En effet, les coordonnées normales de δ, par exemple, par rapport au triangle ABC, étant proportionnelles à $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{c'}$, les coordonnées barycentriques de ce point sont proportionnelles à $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$. On verrait de même que les coordonnées barycentriques de α, par rapport au triangle DBC, sont proportionnelles à $\frac{a}{a'}$, $\frac{c'}{c}$, $\frac{b'}{b}$. On en conclut que les droites $A\delta$ et $D\alpha$, divisant la droite BC dans le même rapport $\frac{c}{c'} : \frac{b}{b'}$ sont situées dans un même plan ; ceci suffit pour prouver que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ sont concourantes. Désignons maintenant par x, y, z, t des coordonnées barycentriques par rapport au tétraèdre ABCD. Nous avons trouvé pour les points δ et α, respectivement,

$$x : y : z = \frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} : \frac{c}{c'} = ab'c' : bc'a' : ca'b'$$

$$y : z : t = \frac{c'}{c} : \frac{b'}{b} : \frac{a}{a'} = bc'a' : cb'a' : abc.$$

Il en résulte que les quatre droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ concourent en un point K pour lequel

$$x : y : z : t = ab'c' : bc'a' : ca'b' : abc\,; \tag{1}$$

de sorte que ses coordonnées barycentriques sont entre elles comme les produits des trois arêtes des faces correspondantes, ou comme les quantités

$$\frac{R_a}{h_a},\ \frac{R_b}{h_b},\ \frac{R_c}{h_c},\ \frac{R_d}{h_d},$$ si h_a, h_b, h_c, h_d et R_a, R_b, R_c, R_d

représentant les hauteurs du tétraèdre ABCD et les rayons des cercles circonscrits à ses faces.

2. *Les coordonnées normales de* K *sont proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits aux faces du tétraèdre.*

Ceci résulte immédiatement de l'expression des coordonnées barycentriques de K.

Si l'on mène par le point K des plans parallèles aux faces du tétraèdre qui rencontrent les droites OO_a, OO_b, OO_c, OO_d, (O, O^a, O_b, O_c, O_d étant le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre et ceux des cercles circonscrits aux faces), respectivement en S_a, S_b, S_c, S_d, les droites KS_a, KS_b, KS_c, KS_d sont parallèles aux droites αO_a, βO_b, γO_c, δO_d.

Les cônes qui ont pour sommets les points S_a, S_b, S_c, S_d *et pour bases les cercles circonscrits aux faces correspondantes du tétraèdre sont semblables.*

Désignons par (d_a, d_b, d_c, d_d) les distances de K aux faces de ABCD, par ω l'angle S_dAO_d ; nous aurons $d_a = R_a \operatorname{tang} \omega$; $d_b = R_b \operatorname{tang} \omega$; $d_c = R_c \operatorname{tang} \omega$; $d_d = R_d \operatorname{tang} \omega$.

Mais, si T_a, T_b, T_c, T_d sont les aires des faces et V le volume du tétraèdre,

$$T_a d_a + T_b d_b + T_c d_c + T_d d_d = 3V\,;$$

par suite,

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{3V}{T_a R_a + T_b R_b + T_c R_c + T_d R_d}$$

et

$$\cot \omega = \frac{ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc}{12V}$$

$$= \frac{R_a}{h_a} + \frac{R_b}{h_b} + \frac{R_c}{h_c} + \frac{R_d}{h_d}.$$

En se reportant à la relation (1), si l'on pose

$$ab'c' = p_A,\ bc'a' = p_B,\ ca'b' = p_C,\ abc = p_D,$$

$$ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc = S,$$

on est conduit facilement aux rapports

$$\frac{K\alpha}{KA} = -\frac{p_A}{S - p_A},\quad \frac{K\beta}{KB} = -\frac{p_B}{S - p_B},$$

$$\frac{K\gamma}{KC} = -\frac{p_C}{S - p_C},\quad \frac{K\delta}{KD} = -\frac{p_D}{S - p_D},$$

et à l'expression du volume v du tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$,

$$v = \frac{3V p_A p_B p_C p_D}{(S - p_A)(S - p_B)(S - p_C)(S - p_D)}.$$

3. Dans un tétraèdre ABCD *équifacial*, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ et les coordonnées barycentriques du point K correspondant à ce tétraèdre sont telles que

$$x : y : z : t = 1 : 1 : 1 : 1.$$

Le point K est le centre de gravité du tétraèdre. Ses coordonnées normales sont égales ; il est le centre de la sphère inscrite au tétraèdre (résultat connu), et les cônes qui ont K pour sommet et pour bases les cercles circonscrits aux faces sont égaux.

Pour un tétraèdre ABCD *isodynamique*, $aa' = bb' = cc'$. Les coordonnées barycentriques des points α, β, γ, δ sont proportionnelles à $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, c'est-à-dire à a^2, b^2, c^2 et α, β, γ, δ sont *les points de Lemoine des triangles déterminés par les faces du tétraèdre. Le point* K *est donc l'intersection des droites qui joignent les sommets du tétraèdre aux points de Lemoine des faces opposées.*

Ce résultat a été donné par M. Neuberg dans son *Mémoire sur le tétraèdre*, § 28. Le point K du tétraèdre isodynamique a conduit M. Neuberg à des résultats très curieux qui étendent à ce tétraèdre les propriétés des centres isodynamiques, des cercles d'Apollonius et des cercles de Lemoine du triangle (¹).

(¹) Qu'il nous soit permis, et ceci dans le but de répandre des propriétés relatives à cette intéressante question de Géométrie, d'ajouter une communication que nous devons à l'obligeance de M. Neuberg :

Plus récemment, dans un Mémoire intitulé *The Cosymedian system of tetraedra inscribed in a sphere* (PROCEEDINGS OF THE MATHEMATICAL SOCIETY OF EDINBURG, 1918-1919), Dr Marr s'est aussi occupé du tétraèdre isodynamique (qu'il appelle équiharmonique).

L'auteur considère les droites joignant les sommets A, B, C, D aux sommets A_1, B_1, C_1, D_1 du tétraèdre formé par les plans tangents en A, B, C, D à la sphère O circonscrite. *Ces droites concourent en un point* K *et passent par les points de Lemoine des faces du tétraèdre* ABCD.

Les six sphères d'Apollonius de ABCD *se coupent en deux points (points*

4. Il est évident que, si le tétraèdre ABCD dégénère en un quadrangle de sommets A, B, C, D, et que l'on considère un point α dont les distances aux côtés BC, CD, DB du triangle BCD sont inversement proportionnelles à AD, AB, AC, puis des points analogues β, γ, δ relatifs aux triangles CDA, DAB, ABC, *les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ *se coupent en un même point* K.

Lorsque ce quadrangle est isodynamique, les points α, β, γ, δ qui lui correspondent sont les points de Lemoine des triangles BCD, CDA, DAB, ABC et nous retrouvons ce résultat également dû à M. Neuberg (*Mémoire sur le tétraèdre*, § 39) :

Les droites qui joignent les sommets d'un quadrangle isodynamique aux points de Lemoine des triangles déterminés par les trois autres sommets, passent par un même point.

Remarque. — Lorsqu'un quadrilatère ABCD est inscrit dans une circonférence, le point K qui lui correspond n'est autre que le point de concours des diagonales.

II. — QUATRE SPHÈRES SE COUPANT DEUX A DEUX SOUS UN MÊME ANGLE

1. Considérons quatre sphères, dont les centres sont O_1, O_2, O_3, O_4 se coupant deux à deux sous un même angle que nous désignerons par 2θ, et qui, trois à trois, déterminent huit points (A_1, A_2, A_3, A_4), (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4). Pour plus de clarté ces huit points et les sphères se correspondent ainsi :

$(O_2), (O_3), (O_4)$ et A_1, A'_1 ; $(O_4), (O_1), (O_2)$ et A_3, A'_3 ;
$(O_3), (O_4), (O_1)$ et A_2, A'_2 ; $(O_1), (O_2), (O_3)$ et A_4, A'_4.

---

isodynamiques) et forment une division harmonique avec K *et le centre* O *de la sphère circonscrite à* ABCD.

Dans une Note, M. Davis remarque que ABCD provient par inversion (transformation par rayons vecteurs réciproques), d'un tétraèdre régulier. Ces résultats sont contenus dans le *Mémoire sur le tétraèdre* de M. Neuberg.

Dr Marr étudie encore le tétraèdre A'B'C'D' qui a pour sommets les points où les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 recoupent la sphère O :

Il existe une infinité de tétraèdres inscrits dans la même sphère O *et ayant même point* K. *Les tétraèdres* ABCD *et* A'B'C'D' *sont circonscrits à un même ellipsoïde dont les plans cycliques sont perpendiculaires à la droite* OK.

Associons quatre points (A_1, A_2, A_3, A_4), puis (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4) où les angles $(O_2, O_3 ; O_3, O_4 ; O_4, O_2)$; ... $(O_1, O_2 ; O_2, O_3 ; O_3, O_1)$ ont même sens.

Tout d'abord, il est évident que les droites $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, $A_4A'_4$ se coupent au centre radical C des quatre sphères O_1, O_2, O_3, O_4, si bien que les tétraèdres $O_1O_2O_3O_4$ et $A_1A_2A_3A_4$, $O_1O_2O_3O_4$ et $A'_1A'_2A'_3A'_4$ sont *orthologiques*. Les centres d'orthologie sont respectivement C et chacun des centres ω et ω' des sphères circonscrites aux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$ et $A'_1A'_2A'_3A'_4$.

A_1 et A_2 sont deux points anti-homologues des sphères O_3 et O_4 ; la droite A_1A_2 passe par l'un des centres de similitude M des sphères O_3, O_4 et le produit MA_1, MA_2 exprime à la fois la puissance de M, par rapport à toute sphère (Σ) qui passe en A_1 et A_2, et le module de l'inversion qui, ayant M pour centre, transforme deux des sphères contenant ces points l'une dans l'autre.

Pour la même raison, les autres arêtes A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, A_4A_2, A_1A_3, contiennent l'un des centres de similitude N, P, Q, S, U, des sphères (O_4, O_1), (O_1, O_2), (O_2, O_3), (O_1, O_3), (O_2, O_4). Or, les six points M, N, P, Q, S, U, sont situés sur les arêtes du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, puis dans un même plan (π), l'un des plans de similitude des quatre sphères.

Les tétraèdres $O_1O_2O_3O_4$ *et* $A_1A_2A_3A_4$, $O_1O_2O_3O_4$ *et* $A'_1A'_2A'_3A'_4$ *sont par suite à la fois homologiques et orthologiques ; la droite qui joint le centre radical* C *des quatre sphères aux centres des sphères* ω *et* ω', *contient les centres d'homologie* K *et* K' ; *elle est normale au plan d'homologie* (¹).

Deux des seize sphères tangentes aux quatre sphères données ont donc leurs centres Γ_1, Γ_2 sur la perpendiculaire $C\omega\omega'$ au plan de similitude (π) correspondant qui contient par suite *sept points remarquables :* C, ω, ω', K, K', Γ_1, Γ_2.

2. Si l'on appelle α_1, β_1, γ_1, δ_1 les contacts de la sphère Γ_1 avec O_1, O_2, O_3, O_4, P le centre de similitude *direct* des sphères O_1 et O_2, α_1 et β_1, A_3 et A_4 étant des couples anti-homologues des sphères O_3, O_4,

$$P\alpha_1 . P\beta_1 = PA_3 . PA_4.$$

(¹) C. Servais, Bulletins de l'Académie royale de Belgique, 1921, p. 57.

P est situé, par suite, sur le plan radical des sphères Γ_1 et O_1, Γ_1 et O_2, c'est-à-dire sur leurs plans tangents communs en α_1 et β_1. Comme

$$\overline{MA}^2_4 = MA_1 . MA_2 ; \ NA^2_1 = NA_2 . NA_3 ;$$
$$\overline{PA}^2_2 = PA_3 . PA_4 ; \ QA^2_3 = QA_1 . QA_4 ,$$

MA_4, NA_1, PA_2, QA_3, touchent la sphère ω respectivement en A_4, A_1, A_2, A_3. Il en est ainsi de MA'_4, NA'_1, PA'_2, QA'_3, et *les plans tangents aux sphères circonscrites aux trois tétraèdres* $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ *à leurs sommets rencontrent les plans des faces opposées de ces tétraèdres suivant quatre droites situées dans un même plan* (π), *l'un des plans de similitude des sphères* O_1, O_2, O_3, O_4.

Remarquons enfin que les sphères ω et ω', circonscrites aux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$ et $A'_1A'_2A'_3A'_4$, qui contiennent deux points anti-homologues sur chacun des groupes de sphères (O_1, O_2), (O_2, O_3), (O_3, O_4), (O_4, O_1), sont deux sphères *isogonales* aux quatre sphères données. Le plan tangent à ω en A_1, par exemple, bissecte l'angle des plans tangents en A_1 aux sphères O_2 et O_3. Suivant que ce plan tangent à ω en A_1 bissecte extérieurement ou intérieurement l'angle des plans tangents précédents, la sphère ω coupe les sphères O_1, O_2, O_3, O_4 sous un angle égal à $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ ou θ.

III. — SUR LES SPHÈRES DE S. ROBERTS

1. S. Roberts a considéré les sphères dont les centres ω_a, ω_b, ω_c, ω_d sont ceux des cercles circonscrits aux faces d'un tétraèdre ABCD et passent par les sommets de la face correspondante ; il a indiqué notamment que le centre radical Ω de ces quatre sphères est le conjugué isogonal, par rapport au tétraèdre ABCD, du centre O de la sphère qui lui est circonscrite et que le centre Σ_2 de la sphère circonscrite au tétraèdre $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$ est au milieu de $O\Omega$ (¹).

(¹) EDUCATIONAL TIMES, 1887, p. 212, question 9093.

Pour la démonstration de la question 9093, par M. Neuberg, voir le même Recueil, 1887, p. 305, et le volume supplémentaire de 1888.

Si l'on rapproche de ces sphères ω_a, ω_b, ω_c, ω_d la configuration de quatre sphères que nous avons étudiée (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1921, deuxième partie, p. 239), on obtient la propriété suivante, qui a son analogue dans le triangle (droite d'Euler) : *Soient* ω_a, ω_b, ω_c, ω_d *les centres des cercles circonscrits aux faces d'un tétraèdre* ABCD, O *le centre de la sphère circonscrite. Si* A', B', C', D' *sont les symétriques des sommets du tétraèdre, par rapport aux faces correspondantes du tétraèdre* $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$, *et* O_a, O_b, O_c, O_d *ceux du centre* O, *par rapport aux faces du tétraèdre* ABCD, *les centres* O, Σ_1, Σ_2, Σ_3 *des sphères* ABCD, A'B'C'D', $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$, $O_aO_bO_cO_d$ *sont en ligne droite et* Σ_3 *est le centre de similitude interne des sphères* O *et* Σ_1.

Il est d'ailleurs à observer que le centre Σ_3 de la sphère $O_aO_bO_cO_d$ n'est autre que le conjugué isogonal Ω de O, par rapport au tétraèdre ABCD.

2. Le géomètre anglais est aussi l'auteur de ce théorème (¹) : *Si l'on choisit arbitrairement un point,* a, b, c, a', b', c' *sur chacune des arêtes* BC, CA, AB, DA, DB, DC *d'un tétraèdre* ABCD, *les quatre sphères passant par un sommet et les points marqués sur les trois arêtes adjacentes, ont un point commun* K.

M. Neuberg a donné de ce théorème une solution géométrique rédigée d'après une Note que S. Roberts avait fait paraître dans les Proceedings of the London Mathematical Society, vol. XII, 1880, n° 173, puis une solution analytique, accompagnée d'une généralisation remarquable (Mathesis, 1884, p. 17).

Désignons par ω_a, ω_b, ω_c, ω_d les centres des quatre sphères qui contiennent respectivement les sommets A, B, C, D, du tétraèdre. Prises trois à trois, ces sphères se coupent, en outre de K, en quatre points K_a, K_b, K_c, K_d situés chacun sur une des faces du tétraèdre. Chaque face détermine en effet sur les trois sphères

---

(¹) Ce théorème a été également signalé en 1902 par le géomètre américain Harkell, avec son analogue dans l'espace à n dimensions. W. Franz Meyer en a aussi publié une démonstration analytique et une généralisation dans Archiv der Mathematik umd Physik, III (5), pp. 278-287. Dans ce dernier journal, M. Neuberg a également donné un article intitulé : *Zur Tetraedergeometrie*, qui reproduit son étude de Mathesis, 1884, p. 17, et d'autres propositions déjà connues, Archiv der Mathematik und Physik, III, 16, p. 12.

qui passent par ses sommets, trois cercles qui ont un point commun. Ces quatre points sont les symétriques de K par rapport aux plans des faces du tétraèdre $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$. Il est évident que *le point* K *est le conjugué isogonal, par rapport au tétraèdre* $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$, *du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* $K_aK_bK_cK_d$ *dont les sommets sont les points communs à trois des sphères sur les faces du tétraèdre* ABCD.

3. Le cas particulier où les points *a, b, c, a', b', c'* sont situés dans un même plan, nous a donné des résultats intéressants que nous avions signalés à M. Neuberg, auteur de cette question :

Un plan P *coupe les arêtes* BC, CA, AB, DA, DB, DC *d'un tétraèdre aux points* a, b, c, a', b', c'. *Démontrer que les sphères circonscrites aux tétraèdres* Aa'bc, Bb'ac, Cc'ab, Da'b'c' *passent par un même point* K. (*Conséquence d'un théorème de M. Roberts*) (¹).

Le journal anglais n'a du reste rien ajouté à cette proposition.

Les six points *a, b, c, a', b', c'* sont les sommets d'un quadrilatère complet situé dans le plan P. Les sphères $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$ sont coupées par ce plan suivant quatre cercles qui sont circonscrits aux triangles *a'b'c', b'ac, c'ab, a'bc*. Or, ces cercles ont un point commun K, point de Miquel (²) relatif au quadrilatère complet. K est évidemment commun aux quatre sphères.

En les prenant trois à trois, les sphères ω_a, ω_b, ω_c, ω_d déterminent quatre autres points K_a, K_b, K_c, K_d situés sur les faces du tétraèdre ABCD. Ces points sont les points de Miquel des quadrilatères complets déterminés par chaque face du tétraèdre avec la trace du plan P sur cette face ; ils appartiennent par suite à chacun des cercles circonscrits aux faces, c'est-à-dire à la sphère O circonscrite au tétraèdre ABCD, et sont de plus les symétriques de K par rapport aux plans des faces du tétraèdre $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$.

Les points K_a, K_b, K_c, K_d sont les sommets d'un tétraèdre. S'ils étaient en effet situés dans un même plan, il en serait de même des centres ω_a, ω_b, ω_c, ω_d des quatre sphères. Comme ces sphères se coupent en un même point K, ce point serait situé dans le plan

---

(¹) Educational Times, 1898, p. 189.

(²) Le terme *point de Miquel* est parfois remplacé par celui de *foyer* de quadrilatère complet.

$\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$ ainsi que ses symétriques par rapport à $\omega_a\omega_b\omega_c$, $\omega_b\omega_c\omega_d$, $\omega_c\omega_b\omega_a$, $\omega_d\omega_a\omega_b$, ce qui est impossible, ces symétriques étant sur chacune des faces du tétraèdre ABCD.

En résumé :

Lorsqu'un plan P *rencontre les arêtes d'un tétraèdre* ABCD *en six points, les quatre sphères* ω_a, ω_b, ω_c, ω_d *passant respectivement par chaque sommet et par les points situés sur les arêtes adjacentes se coupent en un point* K *situé dans le plan* P. *Les quatre autres intersections des sphères prises trois à trois, sont situées sur la sphère* O *circonscrite au tétraèdre* ABCD, *et les points* O *et* K *sont conjugués isogonaux par rapport au tétraèdre* $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$.

M. M. Lecat fait rapport sur le mémoire de M. G. Bertrand : *Figures d'équilibre d'une masse sphéroïdale hétérogène en repos.*

Ce titre omet de spécifier que la masse est fluide.

Parmi les problèmes les plus difficiles de la Mécanique céleste, il y a celui qui consiste à trouver les figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation sous l'action newtonienne de ses particules. La masse est supposée isolée dans l'espace, c'est-à-dire soustraite à toute action extérieure. Cette question, qui a passionné les plus grands géomètres (Maclaurin, Clairaut, Legendre, Laplace, Tisserand, Poincaré, G.-H. Darwin, etc.), est aujourd'hui encore en pleine évolution : on est bien loin d'avoir complètement résolu les équations fonctionnelles, intégro-différentielles fournissant toutes les solutions possibles et l'on ignore même si le nombre des solutions est fini ou infini.

Ce qui fait l'intérêt théorique du problème, c'est l'imprévu des résultats (¹).

Le cas d'une masse homogène a fait l'objet de nombreuses

(¹) Ce fut une grande surprise dans le monde des mathématiciens lorsqu'on apprit qu'il peut y avoir des figures d'équilibre qui ne sont pas des surfaces de révolution. Maclaurin (1742) avait établi que l'ellipsoïde à deux axes inégaux est une solution ; C. G. J. Jacobi (1834) démontra qu'il en est de même si les trois axes sont différents. Mais l'on fut au moins aussi étonné lorsque H. Poincaré fit connaître la figure piriforme, qui donna lieu assez récemment à de nombreux débats, notamment entre J.-H. Jeans et G.-H. Darwin, en ce qui concerne la stabilité.

recherches (^{1}), dont nous n'avons pas à nous occuper, le travail de M. Bertrand supposant l'hétérogénéité. Le problème est ici plus épineux et l'on n'en connaît presque rien. Or, c'est celui qui présente, de loin, le plus d'importance au point de vue de la Mécanique céleste.

Dès 1743, A. Clairaut étudia la question avec un grand succès pour l'époque. Il suppose la figure d'équilibre voisine d'une sphère et la masse constituée par des couches homogènes concentriques. Il trouve les relations qui relient l'aplatissement à la densité et à la force centrifuge, la vitesse de rotation étant supposée constante et suffisamment petite.

Dans des travaux de grande valeur, Laplace, O. Callendreau, F.-R. Helmert, G.-H. Darwin, M. Roche, F. Tisserand (dans sa *Mécanique céleste)*, E. Wiechert et d'autres se sont occupés de problèmes analogues, mais en se plaçant plutôt au point de vue de la figure des planètes qu'à celui d'une analyse rigoureuse.

Comme recherches récentes sur les figures d'équilibre ellipsoïdales d'une masse fluide hétérogène, P. Appell (^{2}) ne cite que trois travaux. Ce sont les principaux, mais il en est d'autres cependant — et qui ne sont pas négligeables. M. G. Bertrand ne mentionne que P. Appell et, sans vouloir diminuer le mérite du mémoire qui nous est soumis, nous avouerons que la lecture nous a laissé un peu l'impression que son auteur n'a peut-être pas une connaissance parfaite de la littérature du sujet.

Pour ces raisons, nous signalerons brièvement les principales recherches.

Après un premier travail sur la figure des corps célestes (1887), M. Hamy approfondit la question dans sa belle thèse de doctorat (^{3}). Il établit, entre autres, ce résultat remarquable : si une masse fluide en rotation est composée de couches de densités différentes, il ne peut pas arriver que les surfaces de séparation de deux couches consécutives soient toutes des ellipsoïdes.

(^{1}) Une bibliographie assez longue est donnée par P. Appell, à la fin du tome IV de son célèbre *Traité de Mécanique rationnelle*, Paris, 1921. Toutefois il semble que l'auteur n'ait pas visé à être complet.

(^{2}) *Loc. cit.*

(^{3}) *Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes*, JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, série 4, t. VI, 1890.

H. Poincaré (¹) fait d'intéressantes remarques sur ce théorème. Son ouvrage sur les figures d'équilibre ne renferme que peu de résultats nouveaux sur le cas de l'hétérogénéité ; il traite le problème de Clairaut (²).

Dans sa savante thèse doctorale (³), A. Véronnet applique à l'ellipsoïde hétérogène les démonstrations faites pour les ellipsoïdes de Maclaurin.

Dans un petit travail qui se rattache au calcul des variations, qu'il a beaucoup fait progresser, L. Lichtenstein (⁴) démontre que l'énergie est minimée pour la sphère, même en cas d'hétérogénéité, la densité ne dépendant que de la distance au centre.

On peut citer aussi S. Oppenheim (⁵), auteur d'un article dans l'Encyclopédie allemande des Sciences mathématiques, M. W. J. Fry (⁶), Ch. S. Schlichter (⁷), V. Crudeli (⁸) et F. R. Moulton (⁹).

M. Bertrand fait l'hypothèse que la masse — hétérogène — est au repos. Ce cas particulier présente moins d'intérêt que celui où

(¹) *Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation*. COMPTES RENDUS ACAD. SC. PARIS, t. CVI, 1888, 4 juin, pp. 1571-1574.

(²) H. Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*. Rédigé par L. Dreyfus. Paris, 1902, pp. 59-96.

(³) *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre*. JOURNAL DE MATH., série 6, t. VIII, 1912, pp. 331-463.

(⁴) MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT, t. III, 1919, pp. 8-10.

(⁵) *Die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen und die Gestalt der Himmelskörper*. I. u. II. Theil. JAHRESB. D. DEUTSCHEN STAATSREALSCHULE IN KAROLINENTHAL, t. XXX, 1905-6, éd. 1906, pp. 25-53 ; t. XXXI, 1906-7, éd. 1907, pp. 3-45, partim.

(⁶) PROC. ROYAL IRISH ACADEMY, A, t. XXVII, 1908, pp. 139-144.

(⁷) *The rotation-period of a heterogeneous spheroid*. CARNEGIE INSTIT. WASHINGTON. Publication 107, 1909, pp. 61-67.

(⁸) *Contributo alla teoria delle figure di equilibrio di un corpo fluido, incompressibile dotato di moto rotatorio*. NUOVO CIMENVO, serie 5, t. XVII, 1909, pp. 108-73, partim. — *Su la velocità angolare dei fluidi eterogenei, rotanti limitati da figura di equilibrio*. REND. ACCAD. LINCEI ROMA, serie 5, t. XIX, IIᵉ partie, 1910, pp. 41-43.

(⁹) *Notes on the possibility of fission of a contracting rotating fluid mass*. ASTROPHYSICAL JOURNAL, t. XXIX, 1909, pp. 1-13, partim. — *On figures of equilibrium of a rotating compressible fluid mass*. TRANSACTIONS AMERICAN MATH. SOC., t. XVI, 1915, pp. 100-108.

il y a rotation. L'auteur suppose une masse de matière M dont la densité en chaque point est une fonction continue ou discontinue de la distance à un point fixe, la densité moyenne étant D ; la masse se termine par une couche homogène d'épaisseur finie et de densité δ.

Après avoir signalé la sphère comme première figure d'équilibre évidente, il s'occupe de celles qui en sont infiniment voisines.

Déjà A.-M. Legendre (1789) avait recherché, pour le cas d'homogénéité, les figures d'équilibre voisines de la sphère. Il exprime en chaque point la côte par rapport à la surface, à l'aide des coordonnées sphériques. Étendant au cas de plusieurs variables la méthode qui permet d'exprimer une fonction d'une seule variable par une série de fonctions trigonométriques, il exprime le potentiel au moyen des harmoniques sphériques, appelés plus tard polynômes de Legendre. Ce procédé est aujourd'hui de la plus grande importance en physique mathématique.

M. Bertrand suit la méthode de Legendre. Il déforme donc légèrement la sphère en y ajoutant une couche de densité δ, d'épaisseur tantôt positive et tantôt négative, dont le volume total est nul, ce qui revient à une simple déformation. Si ce sphéroïde est encore une figure d'équilibre, le nouveau potentiel doit être constant en tous les points de la surface, ce qui fournit entre les coefficients une série d'équations d'où l'on déduit les éléments de la question. Il calcule donc le potentiel de la masse totale en un point du sphéroïde, en décomposant la sphère en deux ; une première, de densité constante, et une seconde formée de la matière restante. Puis il écrit l'équation intégrale, qui est très simple. A l'aide du développement en série de fonctions sphériques et en utilisant un théorème sur le potentiel, il étudie les solutions de l'équation homogène qui correspond à cette équation de Fredholm. Il distingue différents cas, suivant les valeurs relatives de D, δ et n (indice de la fonction sphérique). Passant à l'équation avec second membre, il montre aisément dans quels cas il y a une figure d'équilibre infiniment voisine de la sphère.

M. Bertrand envisage ensuite le cas particulier de l'homogénéité, qui conduit à la sphère initiale légèrement déplacée, et le cas de l'ellipsoïde peu différent d'une sphère.

La généralisation, comme le signale l'auteur, consisterait à considérer les figures d'équilibre voisines des ellipsoïdes. Appliquant la méthode de Legendre aux figures peu différentes d'un ellipsoïde et utilisant, pour étudier les équations intégrales, les fonctions de Lamé dont on se sert pour exprimer le potentiel d'un ellipsoïde, A.-M. Liapounoff (1884, russe ; 1904, traduction française) et ensuite H. Poincaré ont déterminé par déformation les figures d'équilibre infiniment voisines des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi.

M. Bertrand réservera sans doute à un prochain mémoire la question, très délicate mais très importante, de la stabilité (¹) des figures d'équilibre.

Bien que le travail qui nous est soumis ne renferme pas d'idée extrêmement originale, il apporte cependant une contribution non négligeable et suffisamment intéressante pour que nous proposions à la Section de décider son insertion dans nos ANNALES.

La Section adopte cette conclusion. Le mémoire de M. G. Bertrand sera inséré dans la seconde partie des ANNALES.

M. Lecat fait la communication suivante : *Sur diverses formes remarquables des produits et puissances de trois codéterminants cubiques. (Première communication).*

1. Dans un mémoire récent (²), nous avons étudié les « cayléens

---

(¹) Il ne suffit pas, en effet, de trouver des figures d'équilibre ; il faut encore, comme l'ont fait principalement W. Thomson (Lord Kelvin), H. Poincaré et, plus récemment, L. Lichtenstein, reconnaître si elles sont stables. C'est là un problème plus délicat qu'on n'avait cru d'abord. W. Thomson a montré qu'il faut distinguer la stabilité séculaire et la stabilité temporaire ou ordinaire. Pour qu'une figure soit stable — et qu'elle puisse ainsi exister dans la nature — il suffit, d'après J.-L. Lagrange et Lejeune-Dirichlet, que l'énergie potentielle soit maximée, condition qui deviendrait nécessaire s'il y avait viscosité, celle-ci pouvant à la longue détruire l'équilibre par perte d'énergie due aux frottements. — Signalons en passant un travail peu connu, quoique de grande envergure et de première importance, celui que Lichtenstein a publié en deux mémoires dans le périodique qu'il édite depuis la guerre : MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT, t. I, 1918, pp. 229-284, et t. VII, 1920, pp. 126-231. C'est dans la seconde partie qu'il étudie la stabilité.

(²) *Diverses formes du produit de codéterminants cubiques et cayléens anormaux*, RENDICONTI CIRCOLO MAT. PALERMO, t. XLVI, 1922.

et les scottiens » d'une matrice cubique. Une *cayléenne* de deux matrices M_1 et M_2, de même ordre, est une matrice de cet ordre et dont des déterminants — *les cayléens normaux* — expriment, suivant la règle de Cayley-Rice, le produit d'un déterminant Δ_1 de M_1 par un déterminant Δ_2 de M_2, la signance des divers indices de ces cayléens étant choisie d'après celles des indices de Δ_1 et de Δ_2. Les *cayléens anormaux* sont ceux dont la valeur ne s'obtient pas par cette règle. — Une cayléenne d'*une* matrice M est une cayléenne de deux matrices identiques à M. Si les matrices primitives sont cubiques, les cayléennes sont de classe 4. Si l'on part d'une seule matrice, de la permutabilité des deux facteurs de l'élément général il résulte que les 9 cayléennes se réduisent à 6 distinctes et qu'elles sont actinoïdes.

Si D_α désigne le déterminant cubique à non-signance de rang α, chacun des deux facteurs de l'élément général d'un cayléen normal, déterminant d'espèce 2, contient une seule signance et la valeur d'un tel cayléen s'obtient en remplaçant par D_α un facteur où α est le rang de la non-signance, et en faisant alors le produit des deux déterminants cubiques ainsi obtenus. Suivant que les deux indices sommants occupent ou non le même rang dans les deux facteurs, les 4 cayléens normaux sont distincts ou se réduisent à 3, à cause de la permutabilité des facteurs.

2. Les cayléens anormaux sont : le *persignant* (¹) (d'espèce 4), le permanent (d'espèce 0) et les deux déterminants d'espèce 2 où un facteur comporte 2 signances (l'autre contenant 2 non-signances). Suivant que les deux indices sommants occupent ou non le même rang, ces deux déterminants anormaux d'espèce 2 se réduisent ou non à un seul.

Dans le mémoire signalé (²), nous avons donné en outre la loi suivante de formation des valeurs anormales : $\pi_{\alpha,\mu}$ désignant le permanent, de classe 2, de la tranche μ de rang α de la matrice cubique et $\delta_{\alpha,\mu}$ le déterminant correspondant, on remplace par P, valeur du permanent cubique, un ou deux facteurs éventuels à 2 non-signances et par D_α les facteurs éventuels à 2 signances,

---

(¹) *Full-sign determinant* (L.-H. Rice).

(²) Cf. M. Lecat, COMPTES RENDUS ACAD. SC. PARIS, t. CLXXIV, 1922.

α étant, dans le facteur, le rang de l'indice sommant ; ensuite au produit des deux valeurs ainsi trouvées, on ajoute 2^{p-1} fois la somme en μ des produits des deux facteurs obtenus en remplaçant par $\pi_{\alpha,\mu}$ ou par $\delta_{\alpha,\mu}$ un facteur respectivement à 2 ou à zéro non-signance.

3. De même qu'à la règle de Cayley-Rice se rattachent les cayléennes, à celle de Scott-Rice se rattachent les *scottiennes,* matrices de classe 5 si les deux primitives sont cubiques. Si l'on part d'une seule matrice, les 9 scottiennes se ramènent à 6 distinctes, à cause de la permutabilité des facteurs. Chacune a 16 déterminants : de l'espèce 4, il y en a 5, qui sont distincts ou se réduisent à 3, suivant que l'*indice lié* (l'indice qui se répète) occupe, dans les deux facteurs, 2 ou 1 rang ; de l'espèce 2, il y en a 10, qui sont distincts ou se réduisent à 6, suivant les mêmes cas ; enfin il y en a 1 d'espèce 0 (le permanent). Il importe d'observer que des déterminants *distincts* peuvent n'être pas *inégaux* en valeur, même si l'espèce et les rangs de l'indice lié sont donnés. Cela a lieu pour ceux des *scottiens* d'espèce 2 où l'indice lié occupe 2 rangs : bien que distincts, ces 10 déterminants ne sont pas tous inégaux, ils ne donnent que 7 valeurs différentes. Il y a donc $3\,(3+6+1)+3\,(5+7+1)=69$ scottiens distincts, représentant 10 valeurs : P^2, D_i^2, PD_i, D_iD_j, $i, j = 1, 2, 3$, avec des ordres de multiplicité dont nous ne nous occuperons pas ici.

De la loi de Scott, il résulte que : la valeur d'un scottien peut s'obtenir en remplaçant chaque facteur de l'élément général par une des quantités P, D_1, D_2, D_3, d'après la règle suivante, et en faisant le produit des 3 fonctions ainsi obtenues : *a)* s'il y a 3 non-signances dans le facteur, on le remplace par P ; *b)* s'il y a 2 non-signances, n'affectant pas l'indice lié, on prend encore P ; *c)* s'il y a 2 non-signances dont une affecte l'indice lié, on prend D_α, en désignant par α le rang que possède dans le facteur le υ qui n'affecte pas l'indice lié ; *d)* s'il n'y a qu'une seule non-signance dans le facteur, on prend D_α, α étant, dans le facteur considéré, le rang non-signant ; *e)* si tous les indices du facteur sont signants, on prend encore D_α, α étant le rang de l'indice lié.

4. L'objet du présent travail est d'étudier très succinctement

diverses formes remarquables du produit de *trois* déterminants (permanent y compris) et les valeurs anormales y relatives.

Le produit de trois déterminants peut s'effectuer en appliquant : *a*, *b*) soit une fois la règle de Cayley et une fois celle de Scott, en commençant par l'une ou par l'autre ; *c)* soit deux fois la règle de Cayley ; *d)* soit enfin deux fois la règle de Scott. Les matrices auxquelles on est ainsi conduit, seront appelées respectivement : *cayley-scottiennes, scott-cayléennes, bicayléennes, biscottiennes ;* et les déterminants obtenus seront nommés *cayley-scottiens, scott-cayléens, bicayléens, biscottiens,* tous *normaux,* leurs valeurs étant *normales*. Tous les autres *déterminants* des mêmes matrices sont *anormaux* ou *quasi-normaux ;* leurs valeurs sont anormales ou quasi normales, n'étant plus données exclusivement par les règles de formation du produit. Les valeurs quasi normales s'expriment *normalement* (par la règle de Cayley) en fonction des déterminants cubiques et de leurs cayléens anormaux.

5. Les *cayley-scottiennes* d'une matrice cubique sont, par définition, les scottiennes de cette matrice et d'une de ses cayléennes (de classe 4). Ce sont donc des matrices de classe 6. En voici un exemple :

$$(m) \qquad \left\| (i_1, i_2, i_3) \sum_{\mu=1}^{p} (\mu, i_1, i_4)(\mu, i_5, i_6) \right\|_p .$$

A chacune des 3 cayléennes (α, β), β ≠ α, où les deux indices sommants occupent les rangs α, β, correspondent 12 couples de rangs distinctes pour l'indice lié ; mais ce nombre devient 6 pour les 3 cayléennes (α, α) ; de sorte qu'il a $3.6 + 3.12 = 54$ cayley-scottiennes distinctes (¹). Comme chacune possède 32 déterminants : 1 d'espèce 6, 15 d'espèce 4, 15 d'espèce 2 et 1 d'espèce 0 (le permanent), les cayley-scottiens sont au nombre de 1728. Et ils sont bien tous distincts, car de la position de l'indice répété en deçà du signe sommatoire et au delà dans un seul facteur, on conclut aisément à l'impossibilité d'avoir des déterminants qui ne

---

(¹) Si les deux matrices auxquelles on applique la règle de Cayley étaient quelconques, il y aurait manifestement $9.4.3 = 108$ cayley-scottiennes, toutes distinctes.

le sont pas. Mais ces déterminants distincts n'ont pas toutes valeurs différentes, comme on le verra plus loin.

Il est évident que l'application de la règle de Cayley, suivie de celle de Scott, doit donner des valeurs normales et quasi normales, à l'exclusion des valeurs anormales. *La valeur des cayley-scottiens normaux s'obtient très aisément en remplaçant, dans l'élément général : a) par* P, *un facteur à 3 non-signances ou à 2 indices non-signants libres et à un indice signant lié ; b) par* D_α *un facteur renfermant soit 2 indices non-signants dont 1 libre, de rang* α, *soit 2 indices signants et une non-signance de rang* α, *soit 3 indices signants dont 1 lié, de rang* α.

6. Étudions la répartition des diverses valeurs des cayley-scottiens et d'abord des normaux. Pour la commodité du langage, appelons *rang principal* le rang qu'occupe l'indice lié dans le facteur de la somme, et convenons de dire que l'indice sommant est *isolé* dans le facteur dépourvu de l'indice lié ; par exemple, dans le facteur (μ, i_5, i_6) de la matrice (m), l'indice sommant μ est isolé. Enfin, par cayley-scottienne (α, β) on entendra toute cayley-scottienne déduite d'une cayléenne (α, β).

Pour chacune des 18 cayley-scottiennes (α, α), $\alpha = 1, 2, 3$, l'expression $D_1D_2D_3$ est donnée par 2 déterminants, dont 1 ou 2 sont d'espèce 4. Le second cas est réalisé dans chacune des 12 matrices où le rang principal est le rang de l'indice sommant isolé. Pour chacune des 36 matrices (α, β), $\alpha \neq \beta$, $D_1D_2D_3$ est la valeur de 3 déterminants, dont 1, 2 ou 3 sont d'espèce 4. Le premier cas a lieu pour chacune des 6 matrices où le rang principal est le rang de l'indice sommant isolé ; le troisième cas est réalisé dans chacune des 6 matrices où l'indice lié occupe le seul rang de l'indice sommant isolé. Il y a en tout 144 cayley-scottiens valant $D_1D_2D_3$.

En ce qui concerne D^3_s, chaque cayley-scottienne (α, α) engendre 1 fois D^3_β, D^3_γ, si l'on désigne, comme il sera fait dans toute la suite de ce travail, par α, β, γ les nombres 1, 2, 3 dans un ordre quelconque. Ces deux cubes sont d'espèce 4 dans chacune des 6 matrices où l'indice lié occupe devant le signe sommatoire le rang β et sous ce signe le rang γ. Dans les autres cas, un seul cube, D^3_r, est d'espèce 4, r désignant, dans le facteur qu'il occupe, le rang de l'indice lié sous le signe sommatoire. Chaque matrice

(α, β) possède 1 déterminant d'espèce 2 ou 4 valant D^3_γ. Il est d'espèce 2 pour chacune des 12 matrices où l'indice lié occupe : ou bien un seul rang, soit α, soit β, ou bien les 2 rangs α et β. Au total chacun des 3 cubes est exprimé 24 fois.

Les expressions de la forme $D_r D^2_s$ sont données par 8 déterminants pour chaque cayley-scottienne, 2 ou 3 étant d'espèce 2. Chaque matrice (α, α) fournit 1 fois $D_\alpha D^2_\beta$, $D_\alpha D^2_\gamma$ et 3 fois $D_\beta D^2_\gamma$, $D_\gamma D^2_\beta$. Quand l'indice lié occupe un même rang β, deux de ces déterminants sont d'espèce 2 et valent $D_\alpha D^2_\gamma$, $D_\beta D^2_\gamma$; sinon 3 sont d'espèce 2. Si l'indice lié figure aux rangs β et γ, β devant le signe sommatoire, l'espèce 2 représente $D_\alpha D^2_\beta$, $D_\beta D^2_\gamma$, $D_\gamma D^2_\beta$. Si l'indice lié occupe devant le signe le rang α et sous le signe le rang β, l'espèce 2 engendre 1 fois $D_\gamma D^2_\beta$ et 2 fois $D_\beta D^2_\gamma$.

Chaque cayley-scottienne (α, β) donne 2 fois $D_\alpha D^2_\gamma$, $D_\beta D^2_\gamma$ et 1 fois les 4 autres valeurs. Sont d'espèce 2, deux de ces déterminants quand (ce qui a lieu pour 12 matrices) : *a)* le rang principal est le rang de l'indice sommant isolé, soit α ; ces déterminants valent alors $D_\alpha D^2_\gamma$, $D_\alpha D^2_\beta$; *b)* l'indice lié occupe les 2 rangs sommants : les valeurs sont alors $D_\alpha D^2_\gamma$, $D_\beta D^2_\gamma$. Dans les autres cas (qui se présentent chacun pour 6 matrices), sont d'espèce 2, trois déterminants. Si l'indice lié occupe le seul rang, soit α, d'un des indices sommants, les valeurs sont 2 fois $D_\beta D^2_\gamma$ et 1 fois $D_\gamma D^2_\beta$. Si l'indice lié figure au seul rang γ et si α est le rang de l'indice sommant isolé, les valeurs sont $D_\alpha D^2_\beta$, $D_\beta D^2_\alpha$, $D_\gamma D^2_\alpha$. Si l'indice lié occupe devant le signe le rang α ou γ et sous le signe le rang γ ou α, l'espèce 2 fournit respectivement : d'une part $D_\beta D^2_\gamma$, $D_\alpha D^2_\beta$, $D_\gamma D^2_\beta$ et d'autre part $D_\alpha D^2_\gamma$, $D_\beta D^2_\gamma$, $D_\gamma D^2_\beta$.

On voit que chacune des fonctions $D_r D^2_s$ est représentée en tout 72 fois : les 18 matrices (α, α) en donnent 24, tandis que les 36 matrices (β, γ) en fournissent 48.

Chaque cayley-scottienne (α, α) possède 2 déterminants, d'espèce 2, valant $PD_\beta D_\gamma$ et chaque matrice (β, γ) en a 3, valant les 3 expressions $PD_r D_s$. Chacune est donc représentée par 48 cayley-scottiens, 12 ayant pour matrices les trois (α, α) et 36 ayant pour matrices les six cayley-scottiennes (β, γ).

Quant aux PD^2_i, chaque matrice (α, α) possède 2 déterminants d'espèce 2, valant PD^2_β et PD^2_γ et chaque matrice (β, γ) en a 1 égal à PD^2_α. Donc chaque expression PD^2_α est représentée 24 fois, également réparties entre les matrices (β, β), (γ, γ), (β, γ), (γ, β).

7. Abordons la répartition des valeurs quasi normales des cayley-scottiens. Désignons :

a) par $\Delta_{r,s}$ et $P_{r,s}$ respectivement le persignant et le permanent de la cayléenne (r, s), de sorte que [n° 2], par exemple :

$$\Delta_{2,1} \equiv \left| \sum_{\mu=1}^{p} (\epsilon_1, \mu, \epsilon_2)(\mu, \epsilon_3, \epsilon_4) \right|_p = D_1 D_2 + 2^{p-1} \sum_{\mu=1}^{p} \delta_{1,\mu}\delta_{2,\mu} = \Delta_{1,2},$$

$$P_{3,2} \equiv \overset{+}{\Bigg|} \sum_{\mu=1}^{p} (\breve{\epsilon}_1, \breve{\epsilon}_2, \mu)(\breve{\epsilon}_3, \mu, \breve{\epsilon}_4) \overset{+}{\Bigg|}_p = P^2 + 2^{p-1} \sum_{\mu=1}^{p} \pi_{2,\mu}\pi_{3,\mu} = P_{2,3} ;$$

b) par $\sigma_{\omega,\omega}$ les cayléens (ω,ω), d'espèce 2, où les 2 non-signances occupent un seul facteur ; ainsi :

$$\sigma_{3,3} \equiv \left| \sum_{\mu=1}^{p} (\breve{\epsilon}_1, \breve{\epsilon}_2, \mu)(\epsilon_3, \epsilon_4, \mu) \right|_p = \left| \sum_{\mu=1}^{p} (\epsilon_1, \epsilon_2, \mu)(\breve{\epsilon}_3, \breve{\epsilon}_4, \mu) \right|_p$$

$$= PD_3 + 2^{p-1} \sum_{\mu=1}^{p} \delta_{3,\mu}\pi_{3,\mu} ;$$

c) par $\sigma^{(1)}_{r,s}$, $\sigma^{(2)}_{r,s}$ respectivement les cayléens (r,s), d'espèce 2, où les 2 non-signances occupent le premier ou le second facteur, de sorte que, par exemple,

$$\sigma^{(1)}_{3,2} \equiv \left| \sum_{\mu=1}^{p} (\breve{\epsilon}_1, \breve{\epsilon}_2, \mu)(\epsilon_3, \mu, \epsilon_4) \right|_p = PD_2 + 2^{p-1} \sum_{\mu=1}^{p} \pi_{3,\mu}\delta_{2,\mu} = \sigma^{(2)}_{2,3},$$

$$\sigma^{(2)}_{3,2} \equiv \left| \sum_{\mu=1}^{p} (\epsilon_1, \epsilon_2, \mu)(\breve{\epsilon}_3, \mu, \breve{\epsilon}_4) \right| = PD_3 + 2^{p-1} \sum_{\mu=1}^{p} \pi_{2,\mu}\delta_{3,\mu} = \sigma^{(1)}_{2,3}.$$

Chacune des valeurs $P\Delta_{r,s}$ et $D_\alpha\Delta_{r,s}$, pour $\alpha, r, s = 1, 2, 3$, est exprimée par un cayley-scottien (r, s), d'espèce 4, si α n'est pas le rang principal, d'espèce 6 (c'est-à-dire par le persignant) si α est ce rang. Chacun de ces produits est donc, au total, exprimé 12 ou 6 fois, suivant que $r \neq s$ ou $r = s$. De même pour les $D_\alpha P_{r,s}$ et pour les $PP_{r,s}$, les premiers étant engendrés par l'espèce 2, les seconds par les permanents.

Chaque (ω, ω), dont α est le rang principal, fournit :

$$D_\beta \sigma_{\omega,\omega} \quad , \quad D_\gamma \sigma_{\omega,\omega} \quad \text{par l'espèce 2}$$

$$D_\alpha \sigma_{\omega,\omega} \text{ (2 fois)} \quad , \quad D_\beta \sigma_{\omega,\omega} \quad , \quad D_\gamma \sigma_{\omega,\omega} \quad \text{par l'espèce 4,}$$

de sorte que chaque scott-cayléenne (ω, ω) donne toujours 2 fois chacune des fonctions $D_r \sigma_{s,s}$, pour $r, s = 1, 2, 3$, et ces valeurs sont, au total, exprimées chacune 12 fois. De même pour les $P\sigma_{\alpha,\alpha}$, chacune des (α, α) les fournissant 2 fois par l'espèce 2.

Ces résultats se généralisent dans les suivants. Chaque matrice (r, s), où α est le rang principal, fournit : *a)* par 2 de ses déterminants d'espèce 2, les produits $D_\beta \sigma^{(2)}_{r,s}$, $D_\gamma \sigma^{(2)}_{r,s}$ ou bien $D_\beta \sigma^{(1)}_{r,s}$, $D_\gamma \sigma^{(1)}_{r,s}$, suivant que l'indice lié affecte le premier ou le second facteur sous le signe sommatoire ; *b)* par 4 de ses déterminants d'espèce 4, les valeurs :

$$D_\alpha \sigma^{(1)}_{r,s} \quad , \quad D_\alpha \sigma^{(2)}_{r,s} \quad ; \quad D_\beta \sigma^{(1)}_{r,s} \quad , \quad D_\gamma \sigma^{(1)}_{r,s},$$

ou bien :

$$D_\alpha \sigma^{(1)}_{r,s} \quad , \quad D_\alpha \sigma^{(2)}_{r,s} \quad ; \quad D_\beta \sigma^{(2)}_{r,s} \quad , \quad D_\gamma \sigma^{(2)}_{r,s},$$

suivant les mêmes cas. De toute façon, chacune des 6 fonctions $D_\omega \sigma^{(\theta)}_{r,s}$, pour $\omega = 1, 2, 3$, $\theta = 1, 2$, est exprimée une seule fois. Au total, 12 fois, puisque $\sigma^{(1)}_{r,s} = \sigma^{(2)}_{r,s}$. Il en est de même pour $P\sigma^{(\theta)}_{r,s}$, puisque chaque cayley-scottienne (r, s) fournit, par 2 déterminants d'espèce 2, les produits $P\sigma^{(1)}_{r,s}$ et $P\sigma^{(2)}_{r,s}$.

De cette répartition des diverses valeurs, on déduit qu'il y a 16 déterminants normaux, dont 8 pour chacune des espèces 2 et 4, et 16 quasi normaux, dont 7 pour chacune de ces espèces, outre le persignant (d'espèce 6) et le permanent. Ces déterminants, qui sont distincts, ne sont pas tous inégaux : chacune des 18 cayley-scottiennes (α, α) donne 22 valeurs distinctes, dont 10 normales ; tandis que les 36 matrices (α, β) fournissent chacune

28 valeurs inégales, dont 12 normales (¹). Enfin, le nombre total des valeurs distinctes est 100, dont 16 normales :

$$(3)\ D^3_i\ ,\quad (6)\ D_iD^2_j\ ,\quad (1)\ D_1D_2D_3\ ,\quad (3)\ PD^2_i\ ,\quad (3)\ PD_iD_j\ ;$$

et 84 quasi-normales :

$$(9)\ D_i\sigma_{j,j}\ , (9)\ D_i\sigma^{(1)}_{j,k}\ , (9)\ D_i\sigma^{(2)}_{j,k}\ ; (3)\ P\sigma_{j,j}\ , (3)\ P\sigma^{(1)}_{j,k}\ , (3)\ P\sigma^{(2)}_{j,k}\ ;$$

$$(9)\ D_i\Delta_{j,j}\ , (9)\ D_i\Delta_{j,k}\ ; (3)\ P\Delta_{j,j}\ , (3)\ P\Delta_{j,k}\ ; (9)\ D_iP_{j,j}\ , (9)\ D_iP_{j,k}\ ;$$

$$(3)\ PP_{i,i}\ , (3)\ PP_{j,k}\ ;$$

expressions dans lesquelles on a : $i, j, k = 1, 2, 3, j < k$.

L'étude du dénombrement et de la répartition des valeurs normales et quasi-normales dans les cas de mérogénéité, 2 ou 3 déterminants de la matrice primitive étant égaux, sera publiée ailleurs, faute de place. Le cas de la monogénéité, produit notamment par l'actinomorphisme, est particulièrement intéressant.

8. Étudions maintenant les *scott-cayléens*. Considérons, à cette fin, les cayléennes, de classe 6, d'une matrice cubique et d'une scottienne (de classe 5) de cette matrice. Si l'indice sommant dans le facteur-produit provenant de la scottienne est un indice libre, la sommation affecte un indice écrit seulement 2 fois et l'on est donc conduit aux cayley-scottiennes (étudiées précédemment);

(¹) Dénombrons les valeurs distinctes par espèces. Pour toute cayley-scottienne (α, α), il y a 6 valeurs quasi-normales inégales de chacune des espèces 2 et 4. Pour les déterminants normaux, distinguons 3 cas : *a)* si l'indice lié occupe un seul rang, il y a respectivement 7 et 5 valeurs différentes pour les espèces 2 et 4 ; *b)* s'il figure aux rangs β et γ, les nombres sont 7 et 6 ; *c)* s'il occupe le rang α (et un autre rang), le nombre est 6 pour chacune de ces espèces. Pour toute cayley-scottienne (α, β), on constate qu'il y a 7 valeurs quasi-normales de chacune des espèces 2 et 4. Pour les déterminants normaux, nous devons distinguer 5 cas : *a, b)* suivant que le rang principal est le rang de l'indice sommant, isolé ou non, il y a 7 valeurs distinctes pour chacune des espèces 2 et 4, ou respectivement 6 et 8 ; *c)* si l'indice lié occupe le seul rang de l'indice sommant isolé, il y a 7 et 5 valeurs différentes ; *d)* s'il figure au seul rang γ, il y en a 8 et 5 ; *e)* s'il occupe 2 rangs, dont l'un est celui de l'indice sommant isolé, il y a respectivement 8 et 7 valeurs distinctes. A chacun des 4 premiers cas correspondent 2 cayley-scottiennes, mais il y en a 4 dans le dernier cas.

sinon la sommation s'applique à un indice figurant 3 fois, comme dans cet exemple :

$$\left\| \sum_{\mu=1}^{p} (\mu, i_1, i_2)\,(\mu, i_3, i_4)\,(\mu, i_5, i_6) \right\|_p ,$$

et l'on obtient les matrices auxquelles on réservera le nom de *scott-cayléennes.*

Si l'on partait de 3 matrices distinctes, il y aurait 27 scott-cayléennes. Mais *une* matrice cubique en a 10 distinctes : 3 où l'indice lié occupe le même rang dans les 3 facteurs : ce sont les *scott-cayléennes* (α, α, α), *de catégorie 1 ;* une (α, β, γ), *de catégorie 3,* où il occupe les 3 rangs ; enfin 6, *de catégorie 2,* de la forme (α, α, β). Chacune de ces 10 matrices possède 32 déterminants : 1, 15, 15, 1, d'espèces respectives 6, 4, 2, 0. Mais à cause de la permutabilité des facteurs de l'élément général, résultant de ce qu'on part d'une seule matrice, ces 320 *scott-cayléens* ne sont pas tous distincts. Pour chacune des 3 scott-cayléennes (α, α, α), 10 déterminants sont distincts, respectivement 1, 4, 4, 1 d'espèces 0, 2, 4, 6 ; pour chacune des 6 matrices (α, α, β), il y en a 20, respectivement 1, 9, 9, 1 d'espèces 0, 2, 4, 6 ; pour (α, β, γ), les 32 sont distincts. Au total, il y a 182 scott-cayléens distincts.

Il est évident que l'application de la règle de Scott suivie de celle de Cayley doit donner des valeurs normales et anormales, à l'exclusion des quasi-normales.

9. De l'application de ces règles, il résulte que *la valeur des scott-cayléens normaux s'obtient très aisément en remplaçant, dans l'élément général :* a) *par* P, *un facteur à 2 non-signances ;* b) *par* D_α, *un facteur, soit sans non-signance,* α *étant le rang de l'indice sommant, soit à une seule non-signance, de rang* α *; on fait alors le produit des trois fonctions.*

Exemple :

$$\left| \sum_{\mu} (\breve{i}_1, \mu, i_2)\,(\mu, \breve{i}_3, i_4)\,(\mu, i_5, i_6) \right| = D_3 D^2{}_1 .$$

P intervient toujours si l'espèce est 2, jamais si elle est 4.

10. Voyons les conséquences de cette règle quant au dénom-

brement et à la répartition des diverses valeurs normales. Comptons-les en considérant les 32 déterminants, même pour les scott-cayléennes des 2 premières catégories ; entre parenthèses, mettons les nombres trouvés en n'envisageant que les 10 déterminants distincts.

Chacune des trois scott-cayléennes (α, α, α), de catégorie 1, engendre : *a)* par l'espèce 2, les valeurs PD^2_β, PD^2_γ et $PD_\beta D_\gamma$, respectivement 3, 3 et 6 fois (1, 1, 1) ; *b)* par l'espèce 4, les valeurs $D_\alpha D^2_\beta$, $D_\alpha D^2_\gamma$, et $D_1D_2D_3$, respectivement 3, 3 et 6 fois (1, 1, 1). Ensemble, ces trois matrices donnent donc : *a*) par leurs 12 (3) déterminants normaux d'espèce 2, six (2) fois chacune des six valeurs PD^2_i, PD_jD_k $(i, j, k = 1, 2, 3\,;\, j \neq k)$; *b*) par leurs 12 (3) déterminants normaux d'espèce 4, trois (1) fois les six fonctions de la forme $D_jD^2_k$ et 18 (3) fois $D_1D_2D_3$.

Chacune des six scott-cayléennes (α, α, β) exprime : *a)* par l'espèce 2, une (1) fois PD^2_β, 3 (2) fois PD^2_γ, 2 (1) fois $PD_\alpha D_\beta$, 2 (1) fois $PD_\alpha D_\gamma$, et 4 (2) fois $PD_\beta D_\gamma$; *b*) par l'espèce 4, une (1) fois D^3_β, une (1) fois $D_\beta D^2_\gamma$, 2 (1) fois $D_\beta D^2_\alpha$, $D_\gamma D^2_\beta$, $D_\gamma D^2_\alpha$, $D_\alpha D^2_\gamma$ et 2 (1) fois aussi $D_1D_2D_3$. Ensemble ces 6 matrices donnent donc : *a)* par leurs 12 (7) déterminants normaux d'espèce 2, 8 (6) fois chacune des 3 valeurs PD^2_i et 16 (8) fois chacune des 3 expressions PD_iD_k ; *b)* par leurs 12 (7) déterminants normaux d'espèce 4, 2 (2) fois chacun des 3 cubes D^3_i, 9 (5) fois chacun des six produits $D_jD^2_k$ et 12 (6) fois $D_1D_2D_3$.

La scott-cayléenne (α, β, γ) exprime : *a)* par l'espèce 2, une fois chacune des 3 valeurs PD_i^2 et trois fois PD_jD_k valeur ; *b)* par l'espèce 4, trois fois $D_1D_2D_3$, une fois chacun des 3 cubes et une fois les 6 expressions $D_jD^2_k$.

Au total, les 10 scott-cayléennes fournissent : *a)* par l'espèce 2, 15 (9) fois les PD_i^2, 25 (13) fois les PD_jD_k ; *b)* par l'espèce 4, trois (3) fois chaque cube D_i^3, 18 (7) fois les 6 expressions $D_jD_k^2$ et 36 (12) fois $D_1D_2D_3$.

Nous traitons ailleurs les cas de mérogénéité de la matrice primitive.

11. Pour chaque scott-cayléenne, les (8) déterminants anormaux sont : ceux d'espèces 0 et 6, les 3 d'espèce 2 où les deux signances appartiennent à un même facteur et les 3 d'espèce 4 où la même disposition a lieu pour les deux non-signances.

On exprime un scott-cayléen anormal en ajoutant à ce que donnerait la règle pour les valeurs normales, $2^{2(p-1)}$ *fois la somme en* μ *des produits des trois fonctions obtenues, comme pour les cayléens, en remplaçant par* $\pi_{\alpha,\mu}$ *ou par* $\delta_{\beta,\mu}$ *un facteur respectivement à 2 ou à zéro non-signances,* α *ou* β *étant, dans ce facteur, le rang de l'indice sommant.*

Dans le cas des scott-cayléennes de catégorie 1, les trois déterminants anormaux d'espèce 2 sont égaux entre eux, n'étant pas vraiment distincts, de même que ceux d'espèce 4. Pour ces matrices, on obtient une somme de cubes pour l'expression du permanent et pour celle du persignant. Par exemple, C étant la constante numérique, le permanent

$$\overset{+}{\Bigg|}\sum_{\mu=1}^{p}(i_1,\mu,i_2)(i_3,\mu,i_4)(i_5,\mu,i_6)\overset{+}{\Bigg|}_p = \mathrm{P}^3 + \mathrm{C}\sum_{\mu=1}^{p}\pi^3_{2,\mu}.$$

Comme autre valeur, donnons par exemple :

$$\Bigg|\sum_{\mu=1}^{p}(\mu,i_1,i_2)(\breve{i}_3,\mu,\breve{i}_4)(i_5,i_6,\mu)\Bigg|_p = \mathrm{PD}_1\mathrm{D}_3 +$$

$$+\,\mathrm{C}\sum_{\mu=1}^{p}\pi_{2,\mu}\delta_{1,\mu}\delta_{3,\mu}.$$

Pour les matrices de catégorie 2, les 3 déterminants anormaux d'espèce 2, qui se réduisent à 2 distincts, donnent 2 valeurs ; de même pour l'espèce 4.

12. Dans chaque matrice (α, α, α), les 10 déterminants distincts sont tous inégaux ; pour chacune des espèces 2 et 4, il y a 3 valeurs normales et 1 anormale. Pour chaque matrice (α, α, β), les 20 déterminants distincts ne donnent que 18 valeurs, dont 12 normales ; de l'espèce 2, il y en a 5 normales et 2 anormales ; de l'espèce 4, respectivement 7 et 2. Enfin, les 32 déterminants de la matrice (α, β, γ) fournissent 24 valeurs, dont 16 normales ; de l'espèce 2, il y en a 6 normales et 3 anormales ; de l'espèce 4, respectivement 10 et 3.

Au total, les 182 déterminants distincts donnent 72 valeurs, dont 16 normales ($D_1D_2D_3$, $D_\alpha D_\beta^2$, D_α^3, $PD_\alpha D_\beta$, PD_α^2, pour $\alpha, \beta = 1, 2, 3$) et 56 autres ($3.4 + 6.6 + 1.8$).

Ces résultats peuvent être généralisés à divers points de vue, comme nous le montrons ailleurs (1).

Dans la prochaine communication nous étudierons les *bicayléens*, qui sont normaux, quasi-normaux ou anormaux, et les *biscottiens*, qui sont tous normaux, mais qui se divisent en deux genres bien différents.

La Section décide l'insertion de ce travail parmi les mémoires de la Société.

M. Neuberg communique les *Notes mathématiques* suivantes :

I. — SUR LES TÉTRAÈDRES PODAIRES

1. *Lemme*. Étant donnés deux tétraèdres quelconques, $P_1P_2P_3P_4$ et $P'_1P'_2P'_3P'_4$, il existe généralement quatre masses μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 qui, appliquées respectivement soit en P_1, P_2, P_3, P_4, soit en P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, ont le même centre de gravité N.

En effet, si x_r, y_r, z_r et x'_r, y'_r, z'_r sont les coordonnées des points P_r et P'_r par rapport à trois axes Ox, Oy, Oz, on doit avoir :

$$\Sigma\mu_1 x'_1 = \Sigma\mu_1 x_1, \quad \Sigma\mu_1 y'_1 = \Sigma\mu_1 y_1, \quad \Sigma\mu_1 z'_1 = \Sigma\mu_1 z_1,$$

équations que l'on peut écrire ainsi :

$$(1) \quad \Sigma\mu_1(x'_1 - x_1) = 0, \quad \Sigma\mu_1(y'_1 - y_1) = 0, \quad \Sigma\mu_1(z'_1 - z_1) = 0.$$

Or, si l'on mène les droites ON_1, ON_2, ON_3, ON_4 équipollentes aux droites $P_1P'_1$, $P_2P'_2$, $P_3P'_3$, $P_4P'_4$, les coordonnées de N_r sont égales à $x'_r - x_r$, $y'_r - y_r$, $z'_r - z_r$, et les équations (1) expriment que l'origine des coordonnées est le centre de gravité des points N_1, N_2, N_3, N_4 chargés respectivement des masses μ_1, μ_2, μ_3, μ_4. En d'autres termes, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 sont les coordonnées barycentriques du point O par rapport au tétraèdre $N_1N_2N_3N_4$.

Le point N peut être appelé *équicentre* des deux tétraèdres

---

(1) Rendiconti Circolo mat. Palermo, t. XLVI, 1922 ; Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto, t.   , 1922 ; Comptes rendus Acad. Sciences Paris, t. CLXXIV, 1922.

$P_1P_2P_3P_4$ et $P'_1P'_2P'_3P'_4$ (Neuberg, *Sur les équicentres de deux systèmes de* n *points*. — Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége, 1913).

Si les points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 divisent les droites $P_1P'_1$, $P_2P'_2$, $P_3P'_3$, $P_4P'_4$ dans un même rapport, le point N est aussi équicentre des tétraèdres $P_1P_2P_3P_4$ (ou $P'_1P'_2P'_3P'_4$) et $Q_1Q_2Q_3Q_4$ pour les masses μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 ; car le tétraèdre $N_1N_2N_3N_4$ est toujours homothétique à lui-même par rapport au point O.

2. Soient P_1, P_2, P_3, P_4 les projections orthogonales d'un point P sur les faces d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$; ces points sont les sommets du *tétraèdre podaire* de P et la sphère passant par ces points est la *sphère podaire* de P par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

Lorsque P décrit une droite g, les points P_1, P_2, P_3, P_4 se correspondent dans des ponctuelles semblables. On en conclut que les tétraèdres podaires des points de g ont un équicentre commun.

3. Il y a lieu de rapprocher ce résultat de la proposition suivante :

Les triangles podaires des points d'une droite g par rapport à un même triangle $A_1A_2A_3$ ont un équicentre commun, qui est l'orthopôle de g par rapport au triangle $A_1A_2A_3$ (Neuberg, *Sur les Projections et Contreprojections*... — Mémoires in-8° de l'Académie Royale de Belgique, 1890, § 25).

Cet orthopôle est de puissance constante par rapport aux cercles circonscrits aux triangles podaires (Lemoyne, Nouvelles Annales, 1904, p. 400).

II. — PROBLÈME SUR LE PARABOLOÏDE RÉGLÉ

Un paraboloïde hyperbolique est déterminé par quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 *et par deux plans* λ *et* μ *auxquels les génératrices rectilignes des deux modes sont respectivement parallèles.*

Construire les génératrices qui passent par A_1, A_2, A_3, A_4. *Trouver l'équation du paraboloïde.*

Cette question que j'ai proposée dans l'Educational Times, 1895, p. 258, est restée sans réponse. En voici deux solutions :

1. Prenons les plans λ et μ pour plans xz et yz ; le plan des xy est quelconque. Le paraboloïde peut être représenté par une équation de la forme

$$xy = u,$$

où $u = Ex + Fy + Gz + H$. On reconnaît immédiatement les deux systèmes de génératrices définis par les équations

$$\begin{cases} x = m, \\ u = my\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = n, \\ u = nx, \end{cases}$$

m et n étant des paramètres variables ; en particulier, à $m = o$ et $n = o$ correspondent des génératrices m_o et l_o situées dans le plan u.

Soient x_r, y_r, z_r les coordonnées de A_r. Les quantités E, F, G, H résultent des équations de condition

$$x_1y_1 = u_1, \quad x_2y_2 = u_2, \quad x_3y_3 = u_3, \quad x_4y_4 = u_4.$$

La relation $x_1y_1 : x_2y_2 = u_1 : u_2$ détermine le point A' où la droite A_1A_2 rencontre le plan u ; car on en conclut $A'A_1 : A'A_2 = x_1y_1 : x_2y_2$. Les points A'', A''' où le plan u coupe les droites A_1A_3, A_1A_4 s'obtiennent d'une manière analogue.

Soient l_1 et m_1 les génératrices qui passent par A_1. Elles sont situées dans les plans par A_1 parallèles à λ et μ et respectivement aussi dans les plans A_1m_o et A_1l_o. Les génératrices par A_2, A_3, A_4 se construisent par des procédés semblables.

2. La solution suivante m'a été communiquée par M. Servais, professeur à l'Université de Gand.

Le paraboloïde a deux génératrices l, m, à l'infini situées respectivement dans les plans λ, μ. Les plans α_1, α_2, α_3, α_4 parallèles au plan λ et passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4 contiennent les génératrices l_1, l_2, l_3, l_4 que l'on doit construire. Dans le plan μ il y a la génératrice m' et on a :

$$m\,(l_1l_2l_3l_4l) \;\overline{\wedge}\; m'\,(l_1l_2l_3l_4l) \;\overline{\wedge}\; (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\infty).$$

Le plan μ coupe le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ suivant un quadrilatère $a_1a_2a_3a_4$. On inscrit dans ce quadrilatère une conique Σ telle que

$$(a_1a_2a_3a_4) \;\overline{\wedge}\; (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$$

et dans le triangle $a_1a_2a_3$ une parabole U telle que

$$(a_1a_2a_3\infty) \;\overline{\wedge}\; (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4).$$

La génératrice m' est la tangente commune à ces deux coniques et peut être linéairement construite.

Les génératrices l_1, l_2, l_3, l_4 joignent respectivement les couples de points

$$(A_1, m'\alpha_1),\ (A_2, m'\alpha_2),\ (A_3, m'\alpha_3),\ (A_4, m'\alpha_4).$$

On déterminera de même les génératrices m_1, m_2, m_3, m_4 issues des points A_1 A_2 A_3 A_4.

III. — UN THÉORÈME DE STEINER

Dans une lettre du 22 avril 1856, Steiner communique, sans démonstration, à Schläfli « un beau théorème » qui paraît être peu connu. Cette proposition a été établie, avec des développements intéressants sur les tétraèdres de Möbius, par le professeur E. Müller (Archiv der Mathematik und Physik, (III) 1, pp. 129-136). J'en vais donner une démonstration analytique en adoptant l'énoncé suivant :

Soient : u *et* u' *deux droites non coplanaires ;* A, B, C *trois points quelconques de* u *;* A', B', C' *trois points quelconques de* u' *;* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *des couples de points qui divisent harmoniquement les droites* AA', BB', CC'.

Les plans $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $B_1C_2A_2$, $C_1A_2B_2$ *passent par un même point* D_1 *; les plans* $A_2B_2C_2$, $A_2B_1C_1$, $B_2C_1A_1$, $C_2A_1B_1$ *passent par un même point* D_2 *; la droite* D_1D_2 *est divisée harmoniquement par les droites* u *et* u'.

Désignons par (x_1, x_2, x_3, x_4) des coordonnées tétraédriques courantes, par $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $(\beta_1, \ldots)$, $(\gamma_1, \ldots)$ les coordonnées des points A, B, C, et par $(\alpha'_1, \ldots)$, $(\beta'_1, \ldots)$, $(\gamma'_1, \ldots)$ celles des points A', B', C'. Pour celles des points A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 nous adoptons :

$$(\alpha_1 + \lambda\alpha'_1, \ldots)\quad,\quad(\beta_1 + \mu\beta'_1, \ldots)\quad,\quad(\gamma_1 + \nu\gamma'_1, \ldots),$$
$$(\alpha_1 - \lambda\alpha'_1, \ldots)\quad,\quad(\beta_1 - \mu\beta'_1, \ldots)\quad,\quad(\gamma_1 - \nu\gamma'_1, \ldots).$$

Les points A, B, C étant collinéaires, ainsi que les points A', B', C', on a des égalités de condition de la forme

$$(1)\qquad p\alpha_n + q\beta_n + r\gamma_n = 0\quad,\quad p'\alpha'_n + q'\beta'_n + r'\gamma'_n = 0,$$

où $n = 1, 2, 3, 4$.

Convenons de n'écrire que la première ligne d'un déterminant dont les autres lignes n'en diffèrent que par l'indice des éléments.

L'équation du plan $A_1B_1C_1$ est :

$$(2) \qquad | x_1 \quad \alpha_1 + \lambda\alpha'_1 \quad \beta_1 + \mu\beta'_1 \quad \gamma_1 + \nu\gamma'_1 | = 0.$$

Le déterminant (2) peut se décomposer en huit autres, ce qui nous conduit à adopter les notations suivantes :

$$\begin{array}{ll} | x_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 | = K \ , & | x_1 \quad \alpha'_1 \quad \beta'_1 \quad \gamma_1 | = K', \\ | x_1 \quad \alpha_1 \quad \beta'_1 \quad \gamma'_1 | = L \ , & | x_1 \quad \alpha'_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 | = L', \\ | x_1 \quad \alpha'_1 \quad \beta_1 \quad \gamma'_1 | = M \ , & | x_1 \quad \alpha_1 \quad \beta'_1 \quad \gamma_1 | = M', \\ | x_1 \quad \alpha'_1 \quad \beta'_1 \quad \gamma_1 | = N \ , & | x_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma'_1 | = N'. \end{array}$$

A cause des identités (1) on a $K = 0$, $K' = 0$, et l'équation (2) se réduit à

$$(3) \qquad \mu\nu L + \nu\lambda M + \lambda\mu N + \lambda L' + \mu M' + \nu N' = 0.$$

On en déduit les équations des plans $A_1B_2C_3$, $B_1C_2A_2$, $C_1A_2B_2$ en remplaçant respectivement μ et ν par $-\mu$ et $-\nu$, ν et λ par $-\nu$ et $-\lambda$, λ et μ par $-\lambda$ et $-\mu$, ce qui donne :

$$(4) \qquad \mu\nu L - \nu\lambda M - \lambda\mu N + \lambda L' - \mu M' - \nu N' = 0,$$

$$(5) \qquad -\mu\nu L + \nu\lambda M - \lambda\mu N - \lambda L' + \mu M' - \nu N' = 0,$$

$$(6) \qquad -\mu\nu L - \nu\lambda M + \lambda\mu N - \lambda L' - \mu M' + \nu N' = 0.$$

En additionnant les équations (3), (4), (5) et (6) on obtient $0 = 0$; donc les quatre plans $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $B_1C_2A_2$, $C_1A_2B_2$ passent par un même point D_1.

On voit immédiatement que ce point satisfait aux équations suivantes qui sont distinctes :

$$(7) \quad \mu\nu L + \lambda L' = 0 \quad , \quad \nu\lambda M + \mu M' = 0 \quad , \quad \lambda\mu M + \nu N' = 0.$$

Par analogie, les quatre plans $A_2B_2C_2$, $A_2B_1C_1$, $B_2C_1A_1$, $C_2A_1B_1$ passent par un même point D_2 qui vérifie les équations :

$$(8) \quad \mu\nu L - \lambda L' = 0 \quad , \quad \nu\lambda M - \mu M' = 0 \quad , \quad \lambda\mu N - \nu N' = 0.$$

La composition des déterminants L et L' indique immédiatement que les équations $L = 0$, $L' = 0$ représentent les plans Au', $A'u$; de plus, on voit que les plans $\mu\nu L - \lambda L' = 0$, $\mu\nu L - \lambda L'$ qui passent par les points D_1, D_2 sont conjugués harmoniques par rapport aux plans Au', $A'u$. On verrait de même que la droite D_1D_2 est divisée harmoniquement par les plans Bu', $B'u$ et par les plans Cu', $C'u$.

Le R. P. Bosmans fait à la Section une communication sur *un exemplaire du Cosmographicus Liber* de Pierre Apian, édition d'Anvers 1533, donné à la Bibliothèque de l'Université de Louvain.

Le volume que j'ai l'honneur de présenter à la première Section de la Société scientifique m'a été obligeamment prêté par la Bibliothèque de l'Université de Louvain, pour me permettre d'étudier un manuscrit du XVI^e^ siècle qui y est contenu. Après examen, le manuscrit lui-même, que je vous décrirai sommairement tantôt, m'a paru d'un intérêt assez médiocre, mais l'ouvrage imprimé à la suite duquel le manuscrit est relié doit être regardé par l'Université comme un joyau de famille. Ce n'est, en effet, rien moins qu'un exemplaire de l'édition du *Cosmographicus Liber* (1) de Pierre Apian, qui parut à Anvers, en 1533. Or, on sait que c'est en annexe à cette édition dont il s'était chargé, que Gemma Frisius publia, pour la première fois, son célèbre *Libellus*

---

(1) Coté 3 A 563. L' « Ex libris » de l'Université rappelle que le volume est un don de M. van Rhijn de la Haye.

Titre complet de l'ouvrage imprimé : *Cosmographicus Liber Petri Apiani, Mathematici, iam denuo integritati restitutus per Gemmam Phrysium.*

Item eiusdem Gemmae Phrysii Libellus de Locorum describendorum ratione, et de eorum distantiis inueniendis nunq(uam) ante hac visus.

(En dessous, une grande vignette représentant un globe terrestre sur pied.)

Vaeneunt in pingui Gallina per Arnoldum Birckman.

Colophon : *Ioan. Grappheus typis cudebat Antuerpiae, Anno M. D. XXXIII. mense Febr.*

Certains exemplaires ont pour adresse d'imprimeur au titre : *Vaeneu(n)t Antuerpiae sub scuto Basilie(n)si per Georgiu(m) Bontiu(m).* La Bibliothèque Royale de Belgique possède un exemplaire de chacune des deux variantes de l'édition. Cotés, V. B. 7559^a^, éd. Birckmann ; V. H. 29680, éd. De Boute.

L'ouvrage avait été décrit une première fois déjà, avec grand soin, dans la *Bibliographie de l'Œuvre de Pierre Apian*, publiée en mars-octobre 1901 dans le BIBLIOGRAPHE MODERNE, Besançon, Paul Jacquin, par F. Van Ortroy (pp. 119-121, ou 31-33 du tiré à part). Depuis lors, le professeur de l'Université de Gand a repris sa description, en la complétant par de nouveaux détails, qui y ajoutent beaucoup de renseignements utiles, dans sa *Bio-bibliographie de Gemma Frisius, fondateur de l'École belge de Géographie.* Bruxelles, Hayez, 1920. Extrait des MÉMOIRES PUBLIÉS PAR L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques, Collection in-8°, 2^e^ série, t. XI (pp. 167-170). C'est un travail achevé qui, joint au précédent, ne laisse rien à souhaiter.

de Locorum describendorum ratione. Voici en quels termes élogieux Philippe Gilbert jugea autrefois cet opuscule. Je ne dois pas rappeler l'autorité de Gilbert en tout ce qui concerne l'histoire de ses prédécesseurs dans la chaire de mathématiques de l'Université.

« Gemma Frisius, dit-il, n'avait que vingt-cinq ans lorsqu'il mit au jour un opuscule intitulé : *Libellus de Locorum describendorum ratione*... On trouve dans cet ouvrage des principes très nets, absolument conformes à ceux de la topographie moderne, sur l'art de dresser la carte d'un pays d'étendue modérée.

» L'auteur suppose que l'on se rende sur un point élevé tel que la cathédrale d'Anvers ; que là à l'aide d'un instrument, dont il donne la description, on mesure les angles que forment avec la méridienne du lieu les directions des villes accessibles à la vue, Bruxelles, Louvain, Malines, Lierre, etc. Qu'ensuite on se transporte à Bruxelles sur une tour élancée, et qu'on y fasse la même opération pour les droites visant les mêmes points que de la première station. Cela fait, on prendra sur une feuille de papier deux points représentant Anvers et Bruxelles, leur distance étant reproduite à une échelle convenue. On tracera les méridiens de ces deux points et l'on y reportera les angles de direction des villes de Louvain, Lierre, etc. On aura de cette manière deux droites, l'une partant d'Anvers, l'autre de Bruxelles, toutes deux passant par Louvain, et dont l'intersection donnera sur le papier la position de cette ville. Il en sera de même pour Malines et les autres points dont on aura mesuré les angles de direction. Une figure éclaircit considérablement les explications que je viens de résumer. De plus, fait remarquer Frisius, lorsque les villes et les points importants auront été ainsi reportés sur la carte, leurs distances respectives se déduiront par une simple proportion, de la distance entre Anvers et Bruxelles. »

La loi des sinus de la trigonométrie plane, encore en usage aujourd'hui pour résoudre ce problème, était, en effet, connue depuis longtemps (²). Je dirai aussi, en passant, que le moyen de

---

(¹) *Les sciences exactes dans l'ancienne Université de Louvain.* Rev. des Quest. scient., t. XVI, 1884, pp. 440 et 441.

(²) Notamment depuis Regiomontan. Voir : von Braunmühl, *Vorlesungen ueber Geschichte der Trigonometrie*, t. I, Leipzig, Teubner, 1900 ; tab. des Mat. au mot : Sinussatz, ebener.

tracer une méridienne indiqué par Gemma Frisius est l'emploi du compas, c'est-à-dire, de la boussole.

En reproduisant ce passage de Gilbert dans la *Bio-bibliographie de Gemma Frisius,* M. Van Ortroy observe très justement, que le professeur de l'Université de Louvain décrit la méthode de son prédécesseur avec une fidélité si grande que « c'est presque une traduction » (¹). De plus, M. Van Ortroy a l'idée heureuse d'ajouter à l'extrait de Gilbert la figure à laquelle celui-ci fait allusion (²). Nous y remarquons les triangles Anvers-Bruxelles-Middelbourg, Anvers-Bruxelles-Gand, Anvers-Bruxelles-Malines, Anvers-Bruxelles-Lierre, Anvers-Bruxelles-Louvain, Anvers-Bruxelles-Bergen-op-Zoom. Cette figure est d'ailleurs purement schématique, et l'auteur du *Libellus* prend soin de nous le dire lui-même, car, remarque-t-il, Louvain n'est pas visible de Bruxelles (³).

L'intérêt de l'édition de 1533 provient surtout de l'importance documentaire que lui donne cette date. Et à ce propos, il n'est pas inutile de transcrire quelques lignes de la *Geschichte der Astronomie* de R. Wolf traduites par Gilbert dans une note du bas de la page (⁴).

« Il est à remarquer, dit Wolf, que déjà Gemma Frisius dans son *Libellus de Locorum* etc., paru à Anvers, en 1533 (donc avant Münster dans la *Cosmographie* duquel j'avais cru trouver la première indication d'une triangulation) a proposé une opération semblable et même dans de meilleurs termes. »

En résumé, l'idée de couvrir un pays par un réseau de grands triangles pour lever la carte de la contrée est l'un des beaux titres de gloire de Gemma Frisius, et il faut féliciter l'Université de Louvain d'être rentrée en possession d'un exemplaire du volume dans lequel son illustre professeur émit pour la première fois cette conception géniale. Il faut l'en féliciter d'autant plus que l'édition d'Anvers 1533 du *De Locorum describendorum ratione*

(¹) P. 59.

(²) P. 60.

(³) *Libellus de Locorum* etc. Cap. I. Dans l'édition de 1533, f° LIX r°.

(⁴) P. 411. Le passage traduit se trouve dans la *Geschichte der Astronomie* von Rudolf Wolf. München, Druck und Verlag von R. Oldenbourg, 1877, p. 377 et 378.

est devenue rare. Van Hulthem en possédait jadis un exemplaire qui appartient aujourd'hui à la Bibliothèque Royale de Belgique. Fidèle à son habitude d'annoter les pages de garde et les couvertures de ses livres, qu'il a enrichis ainsi de si précieuses notes bibliographiques, le savant érudit écrivit de sa main, il y a près d'un siècle, sur le revers du plat antérieur de la reliure de cet exemplaire, la remarque suivante :

« Haec prima editio est Gemmae Phrysii Libelli de Locorum in cartis planis describendorum per angulos ratione, *raro obvia* et sua inventione plurimum aestimanda ».

Un mot, pour terminer, relatif au manuscrit relié à la suite du *Cosmographicus Liber*.

Ce manuscrit n'est pas folioté. Il a été écrit au moins par trois mains différentes, et, comme je l'ai dit, ne semble pas présenter un intérêt très considérable. La première partie cause même quelque déception, car le titre promettait mieux : « Sequuntur annotationes in totam mathematicam, et primo in geometriam a d(omi)no ill(ustrissimo) Oswaldo Schreckenfussio quam diligentissime perlectam ».

Erasme Oswald Schreckenfuchs naquit, en 1511, à Merckenstein en Autriche, et mourut, en 1579, à Fribourg en Brisgau. On sait peu de chose de sa vie, mais les ouvrages qu'il nous a laissés, nous apprennent qu'il était hébraïsant et astronome distingué. Le manuscrit que nous avons sous les yeux n'est qu'un cahier d'étudiant, couvert de ratures et qui ne nous apprend rien de saillant sur le cours du professeur (¹).

Le manuscrit qui lui fait suite, et qui est d'une main, ou peut-être même de plusieurs mains, en tous cas très différentes de la première, est beaucoup mieux soigné que le précédent. Il renferme quelques vignettes assez gracieuses. Malheureusement le sujet traité ne pique plus la curiosité de personne : « Astrolo-

---

(¹) Voir sur Schreckenfuchs : Cantor, *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, 2ᵉ éd. t. II, Leipzig, Teubner, 1900, pp. 413-415 ; Kaestner, *Geschichte der Mathematik*, t. II, Göttingen, Rosenbusch, 1797, pp. 495-497 ; *Allgemeine Deutsche Biographie*, t. XXXII, Leipzig, 1891, pp. 467 et 468. La notice est signée : Günther.

giam non esse explodendam ob multitudinem insectatorum, et quousque sese extendat in humanis actionibus ».

Enfin, un manuscrit d'une nouvelle main, dont il ne reste plus que les deux premiers feuillets et dont les feuillets suivants ont été arrachés, a pour titre : « Annotata in phijsicam ».

M. Simonart fait une communication *sur une transformation homographique.*

M. de la Vallée Poussin présente quelques considérations *sur les fonctions semi-analytiques et l'ordre d'approximation qui les caractérise.*

Deuxième Section

M. E. Lenoble présente un mémoire sur *un nouveau procédé de fabrication de la céruse, en écailles dures* (brevet belge, n° 282.879).

En voici les conclusions :

La céruse *en écailles dures* prend naissance lorsqu'on fait agir, à la température de 30°-31°, un mélange d'air et d'anhydride carbonique imprégné d'acide acétique, sur du plomb placé dans une atmosphère humide.

Pendant les 24 premières heures, je faisais passer de l'air seul, pour amorcer l'attaque du plomb, puis j'amenais régulièrement un mélange d'air et d'anhydride carbonique tel qu'à la sortie des appareils, le gaz contient encore 20 % de CO^2.

Dans ces conditions, il se forme toujours des écailles dures et le rendement est augmenté ; il peut être facilement doublé.

La Section vote l'impression de ce travail dans la seconde partie des ANNALES (¹).

M. A. Biot expose à la Section une *Note sur le réglage des goniomètres.*

1. Les goniomètres, dont le plus simple et le premier en date est celui de Babinet, comprennent généralement, montés sur un

---

(¹) Cfr. 2ᵉ partie, pp. 135 et suiv.

pied commun : 1° une lunette d'observation pouvant tourner autour d'un axe et dont on peut mesurer les déplacements à l'aide d'un vernier solidaire de la lunette et mobile le long d'un cercle gradué ; 2° une plate-forme sur laquelle on dépose les objets étudiés et qui peut tourner autour d'un axe qui doit coïncider avec l'axe de rotation de la lunette d'observation ; cette dernière condition est réalisée par le constructeur, mais on doit vérifier son existence ; le procédé de vérification est d'ailleurs classique ; nous appellerons l'axe géométrique de rotation en question l'*axe de rotation* de l'instrument ; 3° un collimateur au foyer duquel se trouve, ou bien une fente réglable traversée par un fil, ou plus simplement une croisée de fils.

2. On sait que pour faire des mesures, l'axe optique du collimateur et celui de la lunette doivent être perpendiculaires à l'axe de rotation de l'instrument. Parmi tous les procédés proposés pour réaliser cette condition, le plus exact et le plus simple à notre connaissance, comme aussi le plus universellement employé, est basé sur l'emploi d'un oculaire de Gauss et d'une lame plan-parallèle. Il est décrit dans tous les traités classiques de manipulations physiques. Le procédé que nous proposons ci-dessous et que nous croyons inédit, a l'avantage de nécessiter seulement la possession d'une surface plane polie optiquement. (On prendra par exemple une des faces du prisme qui, le plus souvent, est livré par le constructeur en même temps que l'instrument.)

Nous supposons dans ce qui suit que la plate-forme du goniomètre est munie d'un système de réglage à trois vis. La chose n'est pas nécessaire pour l'application de notre procédé : elle rend les explications plus faciles.

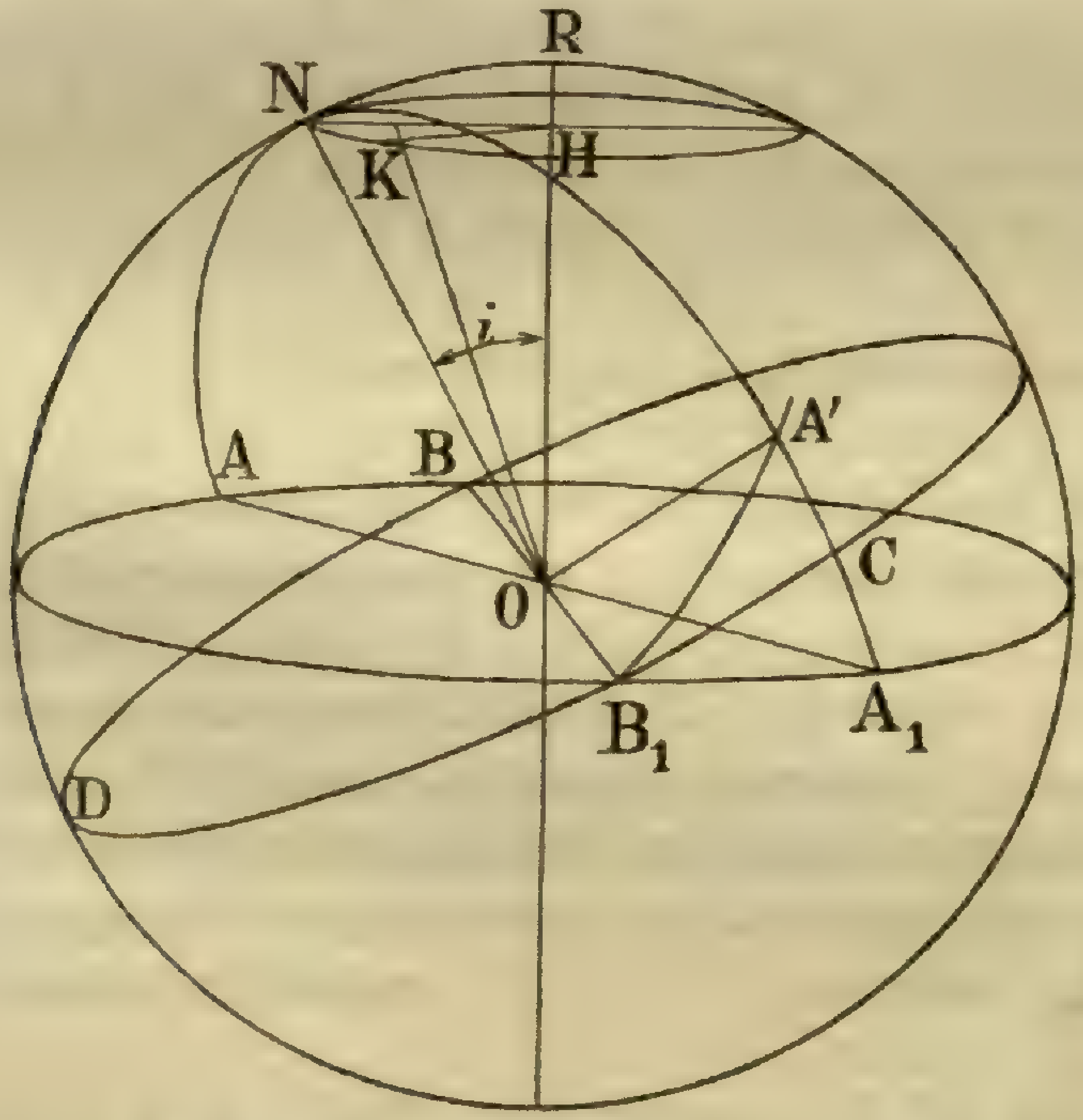
3. *Rendre un miroir perpendiculaire à un axe de rotation.* — Le miroir est posé sur une plate-forme réglable entre un collimateur et une lunette d'observation opposés. La fente est amenée à être sensiblement horizontale. On se sert exclusivement de l'image de la fente par réflexion. On peut donc, éventuellement, incliner autant qu'on veut les axes optiques du collimateur et de la lunette vers la lame (§ 5).

Supposons d'abord la lame non perpendiculaire sur l'axe de rotation. Faisons tourner la plate-forme. L'image de la fente se déplace dans la lunette. Ce mouvement consiste principalement dans une élévation et un abaissement périodiques.

On amène l'image de la fente dans sa position *la plus élevée* ou une position approchée.

A l'aide des vis de réglage de la plate-forme on ramène l'image de la fente — en diminuant en même temps, si c'est nécessaire, l'inclinaison de la lunette d'observation ou du collimateur — dans une position *moyenne*. On recommence l'opération jusqu'à ce que l'image de la fente ne bouge plus. Le plan réfléchissant est alors perpendiculaire à l'axe de rotation.

Afin de justifier le procédé, examinons de plus près et dans le cas le plus simple, celui où les lunettes sont rigoureusement opposées, le déplacement dans le plan focal de la lunette d'observation de l'image par réflexion d'un point choisi du plan focal du collimateur.



Comme le problème consiste dans l'étude de directions, nous pouvons supposer réunis au centre O d'une sphère de rayon égal à l'unité les points nodaux arrière des objectifs du collimateur et de la lunette (Fig.), ces objectifs étant supposés dans un même plan.

Tant que le miroir n'est pas placé, les points correspondants des plans focaux du collimateur et de la lunette sont représentés sur la sphère par des points situés aux extrémités d'un même diamètre. Les premiers sont marqués d'une majuscule, tel A. Les seconds, de la même majuscule avec l'indice 1, tel A_1 correspondant à A. Remarquons que, en raison de la petitesse du champ de la lunette d'observation, les parties utilisées des plans focaux sont suffisamment petites, en pratique, pour que les portions correspondantes de la sphère puissent être considérées, en première approximation, comme deux portions de plan perpendiculaires aux extrémités du diamètre normal aux deux portions « focales » de la sphère.

L'axe de rotation OR de l'instrument est parallèle aux plans focaux. Menons par le centre de la sphère un plan normal à OR. Il occupe la sphère suivant un grand cercle ABA_1B_1.

Posons le miroir sur la plate-forme. Il est représenté sur la sphère par un grand cercle BCB_1D dont le pôle décrit, pendant la rotation du miroir, un petit cercle autour du point R.

Appelons i l'angle que font la normale au miroir et l'axe de rotation de l'instrument, et marquons d'un accent les images réfléchies.

Considérons le point A, choisi, dans le plan focal du collimateur, sur le cercle fixe ABA_1B_1. Nous allons étudier le mouvement de A′ dans le plan focal de la lunette d'observation quand le miroir tourne. Les points voisins de A′ ont un mouvement très analogue à celui de A′.

L'image par réflexion A′ du point A reste constamment dans le plan mobile AA_1N perpendiculaire au plan BCB_1D, et l'angle AON reste égal à l'angle NOA′. Il est facile de voir que le point A′ reste constamment sur un grand cercle passant par BB_1 et incliné sur le plan B_1CBD comme le plan B_1A_1BA est incliné sur le premier, c'est-à-dire de l'angle i.

Soit en effet OK la normale à A_1, située dans le plan mobile ANA_1. On a évidemment : angle NOA = angle COA_1, de sorte que $AOA' = 2dr - 2NOK = 2dr - 2COA_1$. L'angle A′OC est toujours égal à AOC. Le grand cercle BA′ est donc, sur la sphère, symétrique du grand cercle B_1A_1 par rapport au grand cercle BC.

C. Q. F. D.

Évaluons A_1A', puis la projection de A_1A' sur le grand cercle de pôle R.

L'angle i étant petit, les déplacements de A' seront petits et l'on pourra prendre $\sin i = i$ et $\sin A_1A' = A_1A'$.

Posons $B_1A_1 = \alpha$.

On a, à cause du triangle sphérique rectangle A_1B_1C,

$$A_1A' = 2A_1C = 2i \sin \alpha. \qquad (1)$$

Évaluons maintenant l'angle du plan A_1NA et du plan A_1RA, c'est-à-dire l'angle ROK. L'angle NHK est évidemment égal à α.

D'où $KH = NH \cos \alpha$ (angle KOR $<$ angle i). (2)

Il suit, de (1) et de (2), que la position de A' dans le plan focal de la lunette d'observation est repérée par rapport à des axes, l'un horizontal Qy, l'autre vertical Qx, par les relations

$$x = 2i \sin \alpha \qquad (3)$$

$$y = 2i^2 \cos \alpha \sin \alpha \qquad \text{ou}$$

$$\frac{x}{2} = i \sin \alpha$$

$$\frac{y}{x} = i \cos \alpha \qquad \text{c'est-à-dire}$$

$$x^4 + 4y^2 - i^2x^2 = 0 \qquad (4)$$

Les équations (3) montrent que les déplacements de A' sont du premier ordre suivant Qx, du second suivant Qy, et qu'ils ne sont nuls quel que soit α que si $i = 0$.

En d'autres termes, quand l'image par réflexion du plan focal du collimateur dans le plan focal de la lunette d'observation reste immobile pendant la rotation du miroir, celui-ci est perpendiculaire à son axe de rotation.

4. *Exposé de la méthode.*

On amène d'abord l'axe optique de la lunette à être perpendiculaire à l'axe de rotation de l'instrument. L'axe optique du collimateur est ensuite rendu parallèle à l'axe optique de la lunette.

La suite des opérations est la suivante.

On place sur la plate-forme du goniomètre, surface utile au-dessus et passant à peu près par le centre des objectifs, la lame dont il a été parlé. On agit sur les vis de la plate-forme jusqu'à ce que la surface réfléchissante soit perpendiculaire à l'axe de rotation de l'instrument (§ 3).

On amène, s'ils ne le sont pas, la lunette et le collimateur dans le prolongement l'un de l'autre. Quelle que soit la direction de la fente dans son plan, on en voit deux images dans la lunette d'observation, l'une produite par les rayons directs, l'autre par les rayons réfléchis sur le miroir.

Comme tout miroir plan renverse d'une certaine façon les images qu'il produit, on peut faire en sorte, en dirigeant convenablement la fente du collimateur, que les images vues dans la lunette se rencontrent sous tout angle désiré (§ 5).

Le point de rencontre de ces images correspond évidemment aux rayons parallèles au miroir de la plate-forme, c'est-à-dire aux rayons perpendiculaires à l'axe de rotation de l'instrument.

On amène le point de croisement des fils du réticule de la lunette d'observation à coïncider avec le point commun aux deux images. Puis le fil qui traverse la fente du collimateur est amené à passer par le croisement des fils du réticule de la lunette.

L'instrument est réglé.

5. *Remarques.*

1° L'incidence de réflexion étant rasante, l'image par réflexion est très lumineuse.

2° Pour le même motif, quand la fente est horizontale, l'image par réflexion — supposée suffisamment éloignée de l'autre — est bordée de franges de diffraction : le miroir joue le rôle d'une fente placée devant l'objectif de la lunette. Quand les images de la fente du collimateur dans la lunette d'observation se rapprochent, les franges — naturellement — s'élargissent. Pour un rapprochement suffisant, les franges intérieures aux deux images s'élargissent plus que les autres et l'image par réflexion devient indistincte, ce qui provient de la suppression dans cette région d'une partie des ondes diffractées par le plan réfléchissant. C'est pour ce motif qu'il convient, pour le réglage du § 3, d'éloigner suffisamment les deux images et, pour le réglage du § 4, d'incliner la fente sur l'horizontale.

Le réglage du § 3 se fait avec la fente horizontale, parce qu'on apprécie plus facilement, dans cette position, sur quelle vis de la plate-forme il faut agir.

3° Au fur et à mesure que la fente se rapproche de la position verticale, les franges se rétrécissent sauf immédiatement près du point de concours des deux images. On choisira, pour déterminer ce point de concours comme il a été expliqué au § 4, l'inclinaison de la fente la plus convenable dans l'instrument employé.

4° Les expériences de vérification de la méthode que nous venons d'exposer ont été faites au laboratoire de physique de la Société Belge d'Optique et d'Instruments de Précision.

M. de Hemptinne expose qu'au cours de ses recherches sur la réduction des oxydes métalliques, des circonstances fortuites l'ont amené à constater que le bioxyde de manganèse est réduit à la température ordinaire par de l'hydrogène à une pression de 1^{mm} ; l'expérience a prouvé que la réduction s'effectue aussi à la pression atmosphérique. En présence d'un mélange d'hydrogène et d'hydrogène sulfuré, le bioxyde de manganèse fixer apidement ce gaz. La présence d'hydrogène est nécessaire ; ce gaz agit en formant de l'eau aux dépens du bioxyde de manganèse. Il a été constaté en effet que le bioxyde de manganèse humide fixe l'hydrogène sulfuré; il n'en est pas de même lorsqu'on opère dans une atmosphère sèche.

Il est donné lecture de deux communications du R. P. V. Schaffers, S. J.

L'action, sur la plaque photographique, d'un conducteur médiocre sous courant, par le P. V. Schaffers, S. J.

L'expérience suivante a été publiée dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris (t. 171, 29 novemb. 1920) par M. G. Reboul. Deux électrodes présentant une différence de potentiel de 1000 volts environ sont appliquées, à 4 cm. l'une de l'autre, sur le papier noir qui enveloppe une plaque photographique, du côté sensibilisé. On maintient le contact de 24 à 48 h. dans l'obscurité. Au développement, on trouve alors sur la plaque une image des fibres du papier et des lignes équipotentielles du champ.

L'effet se produit, en général, avec les corps qui sont du même ordre de conductivité que le papier, mais à condition qu'ils présentent des hétérogénéités de structure, soit naturelles soit artificielles. Ainsi le papier glacé, le bois, le celluloïd à l'état naturel ne donnent pas d'image, sauf dans le voisinage immédiat des électrodes ; mais ils la donnent très bien si on fait de petites incisions à leur surface.

Cherchant alors à rendre compte de ces résultats, l'auteur (*ibid.* t. 172, 24 janvier 1921) examine trois hypothèses : électrolyse de la feuille semi-conductrice, qui impressionnerait la plaque par les gaz libérés ; ou bien aigrettes ; ou enfin, rayonnement spécial. Il rejette les deux premières et adopte la troisième.

Mais il y a un autre élément d'explication qui, à mon sens, fournit une interprétation meilleure, et dont, en tout cas, il n'est pas permis de faire abstraction. C'est l'action directe du courant lui-même sur la plaque. M. Reboul y fait une rapide allusion, mais passe outre parce que, en l'absence du papier, l'action reste localisée au voisinage des électrodes. Ne serait-il pas plus logique de conclure ainsi : cet effet montre qu'il y a une action directe du courant sur la plaque photographique, et il s'agit de montrer comment la présence du papier en modifie les manifestations ? A la question ainsi posée les lois des courants dérivés semblent offrir une réponse satisfaisante.

D'après le Recueil de constantes physiques de la Société française de Physique et Landolt et Bœrnstein, la résistivité moyenne du papier à la température ambiante est comprise entre 1 et 1000×10^9 ohms/cm suivant le degré de siccité, celle du chlorure et du bromure d'Argent est de 5×10^4 ohms/cm à 20°, soit 2×10^4 à 2×10^7 fois plus petite. Mais ces corps se trouvent dans la couche sensible sous forme de petits granules enrobés dans la masse de la gélatine. Celle-ci doit avoir une résistivité du même ordre que le papier, bien que les données précises fassent défaut. Au total, le milieu présentera donc une conductibilité meilleure que le papier, ou tout au moins du même ordre. Le courant des électrodes doit se répartir entre la feuille de papier et la couche sensible en raison inverse de leurs résistances, sauf, bien entendu, l'effet des altérations produites par le courant lui-même. Si maintenant les deux chemins qui lui sont offerts sont homogènes, la chute de potentiel s'y fera identiquement de la même manière, si bien que, en tout point de contact, le potentiel sera le même de part et d'autre. Il n'y aura donc aucun passage d'électricité de la plaque à la feuille ni de la feuille à la plaque (pont de Wheatstone).

Si, au contraire, un des deux chemins présente des irrégularités — fibre du papier, cassures ou incisions, etc. — la variation du potentiel ne se fera plus de la même manière dans l'un et l'autre, et aux points de contact, qui seront justement les fibres, grains, bavures des incisions, etc., il y aura des courants d'intercommunication. Donc il y aura aussi des lignes de flux convergentes vers ces points, comme il y en a normalement autour des électrodes, et à partir d'un minimum de concentration de ces lignes l'action que nous avons constatée autour des électrodes pourra s'y manifester également. La couche photographique sera donc impressionnée de la même manière qu'autour des électrodes, mais naturellement avec plus de lenteur.

J'ai étudié, il y a longtemps déjà (ANNALES DE LA SOC. SCIENT., BRUX., t. XXIV, 1900 ; REVUE DES QUESTIONS SCIENT., 1900), des actions du même genre, mais dans lesquelles les différences de potentiel employées étaient toujours de plusieurs milliers de volts (machine à influence). Dans ces conditions, j'admettais que le courant passait sous forme d'aigrettes ou de minuscules étincelles entre les grains du sel sensible. Je ne dispose malheureusement pas d'une batterie pour reprendre les expériences de M. Reboul et établir sans conteste leur identité de nature avec mes anciens résultats. Mais les précisions déjà apportées me donnent l'occasion d'améliorer ma première explication.

M. Reboul a pu abaisser jusqu'à 160 volts la différence de potentiel des électrodes. A 240 volts l'effet était tout à fait net. Ces valeurs excluent la possibilité, dans le cas présent, des aigrettes ou des étincelles ordinaires auxquelles j'attribuais le courant dans mon travail de 1900. Bien entendu, ces aigrettes, je ne les avais pas observées : j'y avais fait appel uniquement parce que c'était tout ce que les théories de l'époque mettaient à ma disposition. Mais nous avons mieux aujourd'hui. L'idée s'est imposée petit à petit que les effets de la lumière sur la plaque photographique ne différaient pas, dans leur phase initiale, de *l'effet photo-élec-*

trique, c'est-à-dire de la mise en liberté d'électrons négatifs, à la surface de certains métaux, sous l'action des rayons ultra-violets. L'altération des sels d'argent qui constitue l'image latente aurait donc pour cause première la rupture d'équilibre due au départ de ces électrons. Une action plus intense irait jusqu'à la mise en liberté d'atomes d'argent métallique qui colorent le sel.

Il semblerait donc que le mécanisme essentiel de la production des marques violettes qui dessinent soit les lignes de force ou les surfaces de niveau dans mes anciennes expériences, soit les fibres du papier et les bords des incisions dans celles de M. Reboul, se ramène à ceci. Un certain champ minimum — qui ne paraît pas être très élevé — peut, tout comme une vibration lumineuse, mettre en liberté les électrons du bromure d'argent. Ces électrons laissent derrière eux des sels en partie décomposés et colorés par quelques atomes d'argent métallique. Ces effets ayant lieu avec une intensité en rapport avec celle du champ, l'ensemble des taches colorées donne une image de ce champ.

Si l'on croyait devoir admettre que les électrons sont, pour la plupart, arrêtés dans la gélatine après un faible parcours, on aurait affaire, non pas à un courant fermé ordinaire, mais à une espèce de courant de déplacement. Il n'en serait que plus aisé d'expliquer la persistance de ces effets, bien qu'affaiblis, quand on interpose, entre les électrodes et la plaque, des lames isolantes de peu d'épaisseur. Mais cette circonspection, à notre avis, serait exagérée, et nous ne voyons aucune difficulté à traiter les courants des plaques sensibles, dans tous les cas, comme des courants ordinaires fermés. La résistivité de la couche sensible est, en effet, nous l'avons vu, inférieure à celle du papier, et celle des lames isolantes qu'on interposerait n'est pas tellement supérieure (Quartz, 10^{14} ; verre, 10^{11} à 10^{15} c^{ms}) qu'elle ne s'accommode du très faible courant qui suffit pour rendre compte des résultats obtenus — impression faible après 24 ou 48 heures. Nous admettrons donc que les électrons libérés par le champ sont entraînés comme dans un courant ordinaire.

Quand ce courant prend une intensité croissante, l'échauffement du sel d'argent produit une chute très rapide de sa résistivité. A 400° le bromure est 100.000 fois plus conducteur qu'à 20°, d'après Kohlrausch. En même temps, la gélatine fond et même se charbonne, puis le bromure fond à son tour, etc. On obtient alors des effets du même genre beaucoup plus marqués, et même des sillons fortement conducteurs (globules ambulants, etc.). Ce sont les phénomènes spécialement étudiés par moi en 1900.

Quant à la troisième hypothèse de M. Reboul, celle qu'il adopte définitivement (COMPTES RENDUS, 5 décembre 1921), savoir : rayonnement spécial qui partirait de la feuille de papier pour aller impressionner la plaque photographique, elle semble perdre toute raison d'être après ce qui vient d'être exposé. Les indications pratiques contenues dans la note sont d'ailleurs insuffisantes pour apprécier la portée des expériences instituées en vue d'appuyer cette hypothèse et pour permettre de les refaire.

A propos d'un appareil pour illustrer la théorie cinétique, par le P. V. Schaffers, S. J.

Le P. Wulf, de Fauquemont, a fait connaître récemment (1) un dispositif aussi simple qu'ingénieux pour faire, sur les lois fondamentales de la théorie cinétique des gaz, de très intéressantes vérifications, même numériques. C'est un cadre de bois d'une quarantaine de cms. de côté, portant deux bras fixes articulés respectivement, à la même distance de l'axe, sur deux poulies entraînées à la même vitesse par un moteur électrique. Contre la face intérieure du cadre est fixée une grande feuille de verre sur laquelle on dépose un certain nombre de billes élastiques égales. Par leurs chocs contre les bords du cadre en mouvement, ces billes acquièrent de l'énergie cinétique, qu'elles échangent dans leurs chocs mutuels suivant les mêmes règles que les molécules des gaz, en première approximation du moins. Avec quelques douzaines de billes, les lois des grands nombres, qui sont à la base de ces règles, reçoivent déjà des vérifications étonnamment exactes.

Je n'ai pas l'intention de décrire les expériences variées auxquelles le petit appareil se prête avec succès. Mais il m'est venu quelques réflexions qui me semblent de nature à en accroître l'utilité.

---

(1) ZEITSCHRIFT FÜR DEN PHYSIKALISCHEN UND CHEMISCHEN UNTERRICHT, t. 34, Januar 1921.

Premièrement. Le verre n'est pas nécessaire. On peut faire glisser le cadre sur une plaque de marbre fixe, sur une table ordinaire, pourvu qu'elle soit bien lisse. Les billes se meuvent alors sur un fond immobile, ce qui offre des avantages dans certains cas.

Deuxièmement. Le P. Wulf se sert de billes de nature identique mais de dimensions différentes pour montrer la loi d'égale répartition de l'énergie cinétique, d'où résultent des vitesses inversement proportionnelles aux racines carrées des masses. Dans ces conditions, il n'obtient pas les bonnes vérifications numériques auxquelles il arrive pour les autres lois. Or, j'ai l'impression qu'on réussit mieux avec des billes de dimensions identiques, mais de substances diverses, du moins pour une expérience de cours rapide et intuitive. Ainsi une bille d'acier (facile à suivre des yeux) au milieu de billes de même grandeur en pierre ou en verre, se meut manifestement avec une vitesse très inférieure à celle des autres.

Troisièmement. Il est un groupe de propriétés importantes qui se laisse très bien représenter aussi, grâce à un artifice auquel le P. Wulf ne semble pas avoir songé. Je veux parler des propriétés des vapeurs saturantes, de la dissolution des gaz dans les liquides, etc. Si l'on tend, au-dessus d'une moitié ou d'un tiers du cadre, une toile ou un filet souple suspendu assez bas pour poser sur le sommet des billes, on détermine dans ce compartiment un freinage des mouvements analogue à celui que la théorie suppose dans les liquides. On verra donc dans le compartiment libre (celui de l'état gazeux) quelques billes seulement animées de leurs translations rapides ordinaires ; elles y séjournent d'ailleurs très peu de temps et ne tardent pas à s'engluer de nouveau dans le compartiment à mouvements ralentis (compartiment du liquide) ; mais elles sont remplacées par d'autres qui s'en échappent à leur tour. C'est une expérience très instructive.

Troisième Section

M. le curé Claerhout entretient les membres de la Section, de l'*Ethnogénie de l'Europe*.

Jules César distingue deux classes dans les peuplades celtiques de nos régions (¹) : la classe des nobles et la classe populaire.

Cela paraît concorder admirablement avec les idées courantes sur les migrations celtiques et indo-européennes.

La classe des nobles, c'est la classe des conquérants celtiques du type nordique que la plupart des auteurs identifient avec le type indo-européen, caractérisé par les yeux bleus, les cheveux blonds, la peau blanche, la taille élevée, la leptoprosopie et la leptorrhinie.

La classe populaire, c'est la couche de la population autochtone, la race brachycéphale et brune de l'époque néolithique que l'extension indo-européenne était venue recouvrir.

Cependant il y a aussi des auteurs, comme M. Taylor (²) en 1890, et récemment M. Carnoy (³), qui attribuent, dans les groupements indo-européens, un rôle prépondérant aux brachycéphales.

Ni l'anthropologie, ni la préhistoire ne peuvent résoudre le problème indo-européen, c'est incontestable ; mais ces sciences ont en quelque sorte fait revivre l'ancien monde et les résultats merveilleux auxquels on est arrivé peuvent suggérer des hypothèses nouvelles. En tenant compte de tous les faits, on peut s'efforcer de les concilier entre eux, pour en faire découler une solution satisfaisante.

Voici comment à présent nous concevons l'ethnogénie de l'Europe.

Il y a eu un double courant de migrations dès les temps néolithiques.

Les deux courants ont pu se côtoyer, se pénétrer et se recouvrir en maints endroits.

(¹) C. J. Caes., *De Bello gallico*, VI, 13.

(²) J. Taylor, *The Origin of the Aryans*. London, 1890.

(³) A. Carnoy, *Les Indo-Européens*. Bruxelles, 1921, p. 69.

Le premier courant a eu son point de départ dans le monde méditerranéen, qui d'après les dernières découvertes de l'archéologie et de l'ethnographie présente un ensemble assez homogène.

Ce courant a suivi la grande route commerciale que les découvertes archéologiques ont mise en lumière, la grande voie maritime qui conduit de l'Espagne aux Iles Britanniques, aux côtes de la France et de l'Allemagne et jusqu'en Scandinavie.

Ce courant nous a amené les dolichocéphales de couleur foncée qui peuplent les pays méditerranéens et les dolichocéphales de l'Ouest et du Nord de l'Europe qui sont devenus blonds sous l'influence du climat.

C'est la théorie énoncée par M. Ripley (¹) dans son remarquable ouvrage sur les races de l'Europe, que nous essayons de concilier ici avec le problème de l'expansion des Indo-Européens.

M. Déchelette (²) nous fait connaître cette grande voie de migrations dans les termes suivants :

« Avec M. Montelius nous admettons une influence continue et progressive exercée par l'Orient sur l'Occident depuis une période très reculée des temps préhistoriques... On peut reconnaître qu'à partir du néolithique, des relations commerciales s'étendant de proche en proche, ont uni l'Europe occidentale et septentrionale aux régions de la Méditerranée. Une voie maritime suit les côtes africaines, traverse Gibraltar et longe les côtes de l'Atlantique pour gagner les Iles Britanniques et la Scandinavie. Cette voie fut à coup sûr la plus importante de toutes les routes commerciales de la haute antiquité. Elle fut connue par des navigateurs innommés bien avant que les Phéniciens de Gadès l'eussent fréquentée... Les périodes immédiatement postérieures aux temps néolithiques se dégagent peu à peu de leur obscurité primitive, tant en Orient qu'en Occident. A l'aide des découvertes récentes, nous savons que la fabrication des instruments de cuivre et de bronze présente dans le nord et dans le sud un développement sensiblement parallèle et qu'à cette phase initiale de l'époque du bronze, les prototypes sont venus du sud-est... »

(¹) W. Ripley, *The Races of Europe*. London, 1900.

(²) J. Déchelette, *Archéologie préhistorique*. Paris, 1908, p. 425.

La traînée des dolmens a suivi cette même voie. C'est un fait excessivement remarquable, qu'on ne constate l'existence de ces monuments mégalithiques que dans les régions situées à proximité de cette voie antique, depuis la Syrie et le nord de l'Afrique, jusqu'en Scandinavie. Serait-il si téméraire de supposer que des légions de colons aient suivi la même voie ?

On connaît les Pictes préaryens des Iles Britanniques. Ils vivaient sous le régime du matriarcat pratiqué par les Basques, descendants des Ibères, et par les Berbères. Les restes de leur langue présentent des affinités avec le basque. De ces observations M. Hirt (¹) conclut qu'on trouvera peut-être un jour le pont qui mène de l'Angleterre à l'Espagne et au nord de l'Afrique. Ce pont n'est-ce pas la grande voie maritime qui a amené les Pictes dans les Iles Britanniques ?

Tout le monde paraît admettre que les dolichocéphales européens sont d'origine africaine : n'est-il pas étonnant qu'on rencontre surtout les dolichocéphales aux confins de cette même voie commerciale ? Considérez un type méditerranéen, par exemple des types égyptiens que l'on figure souvent avec leur visage projeté en avant et leur front oblique : les crânes les plus anciens, découverts en Scandinavie, se réfèrent au même type dolichocéphale et chamœprosope (²).

En fait de gravures rupestres importantes, postérieures à l'époque quaternaire, on ne connaît en Europe que celles des vallées qui avoisinent le Monte Bego, au nord de Vintimille, dans l'ancien pays des Ligures et celles du Bohuslän en Suède. Toutes ces gravures datent de l'âge du bronze et représentent des charrues traînées par des bœufs. Cette similitude des deux groupes si éloignés l'un de l'autre atteste des relations entre les peuplades des deux régions et dénote peut-être une communauté d'origine (³).

Un second courant parti des régions situées au nord de la Mer Noire a amené les indo-européens brachycéphales de la race

---

(¹) H. Hirt, *Die Indogermanen*. Erster Band. Strassburg, 1905, p. 43.

(²) C. Arbo, *Hat in dem skandinavischen Norden keine neue Einwanderung stattgefunden ?* Dans CENTRALBLATT FUR ANTHROPOLOGIE, T. VII, 1902, p. 193.

(³) J. Déchelette, *Age du Bronze*. Paris, 1910, pp. 492 et suiv.

alpine. Il a suivi la vallée du Danube. Il était contemporain du premier courant et les peuplades indo-européennes ont coudoyé en maints endroits les clans dolichocéphales, ont fini par se fondre avec eux, par les couvrir et par les absorber. Les Indo-Européens ont rayonné aussi par étapes dans les pays du midi de l'Europe, en Grèce, en Italie, dans le sud de la France et la péninsule Ibérique.

On pourrait objecter que les groupements indo-européens n'apparaissent qu'assez tard dans l'histoire de la civilisation.

Rien d'étonnant. Ils n'apparaissent ainsi que faute de documents, mais nous observons que quand M. Carnoy et les auteurs qui l'ont précédé, nous retracent avec une finesse remarquable le tableau de la civilisation des Indo-Européens, les traits les plus intéressants en sont empruntés à la civilisation de l'époque néolithique et de l'âge du bronze. Les faits archéologiques confirment d'une manière frappante les données de la paléontologie linguistique.

Il s'agit non seulement de chercher le pays d'origine des Indo-Européens, mais aussi de déterminer leur origine ethnique.

Feu M. Hörnes, un savant d'une grande autorité, nous apprend que les Hellènes étaient connus en Égypte comme les descendants de *Javan* et de *Dadan* (1). Dans l'Ancien Testament, les Grecs sont toujours appelés *Cethim :* on les considérait donc comme des Japhétides.

Les Indo-Européens ne constituent pas seulement un groupement linguistique, mais aussi un groupement ethnique ; il y a eu un peuple primitif indo-européen, dont sont issus les Germains et les Slaves, les Iraniens et les Hindous, les Celtes et les Italiotes, etc., qui comprennent les Indo-Européens proprement dits et de nombreux éléments que les Indo-Européens ont aryanisés. Ils ont aryanisé par l'exemple les Arméniens, les Hittites qui sont des Chamites, d'autres peuplades du nord, de l'ouest et du midi de l'Europe qu'ils ont rencontrées et dominées dans leur extension graduelle. Ces éléments que les Indo-Européens se sont assimilés, n'empêchent pas que les noyaux principaux des divers groupements indo-européens ne soient issus de la même souche ethnique et ne constituent une famille ethnique.

---

(1) M. Hörnes, *Urgeschichte der Menschheit.* Leipzig, 1912, p. 239.

Voici comment nous raisonnons :

Si les Grecs sont des Japhétides, les autres peuples indo-européens qui leur sont intimement apparentés doivent avoir la même origine et doivent scientifiquement être considérés comme des Japhétides.

Les savants de toutes les opinions parlent des Sémites et des Chamites : pourquoi serait-il interdit de parler de Japhétides pour ce seul motif que faute de documents on n'a pu identifier jusqu'ici que les Grecs et les Mèdes ? Que ne pousse-t-on les recherches en ce sens ? On dirait qu'on a peur de découvrir la vérité et d'augmenter la valeur de la table ethnographique de Moïse.

Les peuples méditerranéens préaryens sont probablement des Chamites.

D'après notre hypothèse, admise d'ailleurs depuis longtemps pour ce qui concerne les Ligures, ces peuples ont rayonné à l'ouest et jusqu'au nord de l'Europe et y ont donné naissance à ce type blond, dolichocéphale que l'on a envisagé longtemps comme le type indo-européen.

Tous les savants admettent que les Crétois devenus célèbres en ces derniers temps, sont les *Caphtorim* de la Bible.

Les Égyptiens sont également des Chamites.

Nous lisons dans le dernier numéro paru de l'ANTHROPOLOGIE :

« Mizraïm, fils de Cham, frère de Kouch et de Canaan se serait, d'après l'Écriture Sainte, fixé sur les bords du Nil avec ses enfants. Cette tradition est soutenue par Tr. Hommel dans son ouvrage *Der Babilonische Ursprung der aegyptischen Kultur* (1892) et, pour cet auteur, la civilisation égyptienne découle entièrement de celle de la Babylonie » (¹).

M. Hirt nous apprend que chez les Étrusques on retrouve beaucoup de coutumes babyloniennes qui les rattachent par conséquent aux Chamites de Babylone (²). D'autre part le régime du matriar-

---

(¹) J. de Morgan, *De l'influence asiatique sur l'Afrique à l'origine de la civilisation égyptienne*. Dans l'ANTHROPOLOGIE, t. XXXI. Paris, 1921, p. 197.

(²) H. Hirt, *op. citat.*, p. 54.

cat dénote pour les Étrusques, comme pour les Ibères et les Ligures, la même souche ethnique (¹).

Des *Notes sur la Flore du Katanga*, rectifiant ou complétant un précédent travail, sont présentées par M. É. De Wildeman.

Dans VII fascicules de *Notes sur la Flore du Katanga* publiés dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles depuis 1910 jusqu'en 1921, nous avons essayé de condenser les renseignements épars dans diverses publications ou repris d'après les documents que nous avons reçus de cette partie de la Colonie.

Malheureusement certains travaux renfermant des données sur cette Flore ne purent être consultés en temps utile ; récemment, grâce à l'intervention de M. le Dr Rendle, M. Spencer le Merchant Moore a bien voulu nous faire parvenir les tirés à part de ses *Alabastra diversa* qu'il publia dans le Journal of Botany.

Cet envoi nous amène à donner ici un petit supplément et quelques corrections.

M. Spencer le M. Moore a décrit en effet dans ses *Alabastra* plusieurs espèces qui n'avaient pas été relevées ni dans nos *Notes,* ni dans notre *Contribution à l'étude de la Flore du Katanga ;* il a également considéré comme constituant des types nouveaux certaines plantes que nous avions rapportées à des types anciens; enfin dans la famille des Composées il est amené à modifier certaines déterminations faites en particulier à Berlin avec le Dr Muschler.

Nous ne pouvons malheureusement vérifier ces assertions, car les documents ayant servi aux déterminations nous avaient été obligeamment communiqués par M. le Dr H. Schinz, directeur du Jardin botanique de Zurich, auquel nous adressons encore nos remerciements.

Les divergences d'opinion relatives à la valeur des espèces ne sont guère étonnantes, car l'espèce dépend d'appréciations personnelles. Les erreurs de détermination sont, et seront encore pendant longtemps, fréquentes, car malheureusement les définitions varient fort suivant les herbiers, et en l'absence de spécimens indiscutablement authentiques il est fréquemment très difficile, pour certaines espèces rares, de certifier une définition.

(¹) A. Carnoy, *Les Indo-Européens*. Bruxelles, 1912, p. 67.

Ne nous le dissimulons pas d'ailleurs, tous nos travaux relatifs aux flores tropicales sont encore provisoires, et il faudra pas mal de recherches pour leur donner un caractère définitif.

Les statistiques provisoires que nous avons données dans *Contribution à l'Étude de la Flore du Katanga*, éditée par le Comité spécial du Katanga, sont, par suite de ces petites additions, légèrement incomplètes ; le chiffre de 1910 espèces se répartissant en 113 familles, 582 genres, est légèrement augmenté, comme celui des genres et des familles.

Nous arrêterons la publication de nos *Notes*, étant forcé de consacrer tout notre temps disponible à l'étude de la Flore du massif du Ruwenzori.

THYMELEACEAE

ARTHROSOLEN *C. A. Meyer*

A. paludosa *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1919), p. 115.
Gnidia Buchananii *De Wild.* non *Gilg* sec. *Sp. Moore* loc. cit.
Luente (Kässner, n. 2485).
A. Poggei Pearson ; *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1919), p. 115.
Lukifwa River (Kässner, n. 2858).

Obs. — Cette plante aurait été signalée antérieurement sous le nom de *Gnidia katangensis* Gilg et Dewèvre.

GNIDIA *L.*

G. kundelungensis *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1919), p. 114.
Kundelungu (Kässner, n. 2793).

RHIZOPHORACEAE

DACTYLOPETALUM *Benth.*

D. Rogersii *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1919), p. 228.
Élisabethville (Rogers, n. 26209).

ANISOPHYLLEA *R. Br.*

A. tomentosa *Rolfe; Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1919), p. 228.
Élisabethville (Rogers, n. 26300).

ERICACEAE

PHILIPPIA *Kl.*

P. kundelungensis *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT., t. 57, p. 212 (1919).

Kundelungu (Kässner, n. 2769).

P. congoensis *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT., t. 57, p. 213 (1919).

Katanga (Kässner, n. 3352).

ASCLEPIADACEAE

ASCLEPIAS *L.*

A. Browniana *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1909), p. 217.

Kitimbo et Lac Moero (Kässner, n. 2307, 2806).

A. reflexa *Britten* et *Rendle* var. **longicauda** *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1909), p. 219.

Katenina Hills et Luenda River (Kässner, n. 2183, 2417).

A. Moorei *De Wild.* nom. nov.

Asclepias katangensis *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. 50 (1912), p. 340 non *De Wild.*

Lofoi river (Kässner, n. 3353).

A. uvirensis *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1910), p. 256.

Uvira (Kässner, n. 3162).

CEROPEGIA *L.*

C. Kaessneri *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1910), p. 256.

Kitunbo (Kässner, n. 2349).

VERBENACEAE

CLERODENDRON *L.*

C. lupakense *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT., t. 57, p. 247 (1919).

Rivière Lupaka (Kässner, n. 2456 p. p.).

C. consors *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT., t. 57, p. 248 (1919).

Rivière Lupaka (Kässner, n. 2458 p. p.).

C. bingaense *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT., t. 57, p. 248 (1919).

Binga (Kässner, n. 2627).

C. frutectorum *Sp. Moore* in Journ. of Bot., t. 57, p. 249 (1919).
Shiwele (Kässner, n. 2473).

LABIATACEAE

AEOLANTHUS *Mart.*

A. purpureo-pilosus *Wernh.* in Journ. of Bot. (1911), p. 323.
Luisi (Kässner, n. 2677).

SCROPHULARIACEAE

CRATEROSTIGMA *Hochst.*

C. chironioides *Sp. Moore* in Journ. of Bot., t. 57, p. 215 (1919).
Kundelungu (Kässner, n. 2594).

STEMODIOPSIS *Engler*

S. linearis *Sp. Moore* in Journ. of Bot. (1911), p. 157.
Mt. Penga (Kässner, n. 2964).

SOPUBIA *Buch.-Ham.*

S. congoensis *Sp. Moore* in Journ. of Bot. (1911), p. 188.
Kundelungu (Kässner, n. 2767).

BUECHNERA *L.*

B. convallicola *Sp. Moore* in Journ. of Bot., t. 57, p. 217 (1919).
Mont Senge (Kässner, n. 2984).
B. congoensis *Sp. Moore* in Journ. of Bot., t. 57, p. 219 (1919).
Kundelungu (Kässner, n. 2767).
B. Kaessneri *Sp. Moore* in Journ. of Bot., t. 57, p. 242 (1919).
Kundelungu (Kässner, n. 2788).

ACANTHACEAE

MIMULOPSIS *Schweinf.*

M. runssorica *Lindau ; Sp. Moore* in Journ. of Bot. (1901), p. 300.
Tanganika (Scott Elliot, n. 8354).

DYSCHORISTE *Nees*.

D. decora *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1913), p. 212.
Kasomena (Kässner, n. 2563).

Obs. — Nous avons considéré cette plante comme appartenant au *D. trichocalyx* Lindau dont elle semble voisine.

LEPIDAGATHIS *Willd.*

L. nemorosa *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1919), p. 253.
Lofoi river (Kässner, n. 2655).

CRABBEA *Harv.*

C. Kaessneri *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1910), p. 252.
Tonkoshi (Kässner, n. 2337).

BARLERIA *L.*

B. paludosa *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1910), p. 521.
Kundelungu (Kässner, n. 2337).

RUBIACEAE

PENTAS *Benth.*

P. decorus *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1910), p. 219.
Luende (Kässner, n. 2419).

VIRECTA *Afzel.*

V. Kaessneri *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1910), p. 220.
Kitanda (Tanganyka) (Kässner, n. 3052).

VANGUERIA *Juss.*

V. Kaessneri *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1910), p. 221.
Katenina Hills ; Kundelungu et Kibanda (Tanganyka) (Kässner, n. 2189, 2723, 3052).

CANTHIUM *Lam.*

C. dictyophlebum *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1919), p. 87.
Élisabethville (Rogers, n. 10085).

FADOGIA *Schweinf.*

F. salictaria *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1911), p. 153.
Kipaila (Kässner, n. 2536).

COMPOSITACEAE

GUTENBERGIA *Sch.-Bip.*

G. Kaessneri *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT., t. 56 (1918), p. 205.
Kundelungu (Kässner, n. 2711).
— — var. **angustifolia** *Sp. Moore,* loc. cit.
Lubembe vallée (Kässner, n. 2386)

Obs. — Le *G. Kaessneri* aurait, d'après son numéro, et d'après M. Spencer Moore, été publié dans ANN. MUS. CONGO, sér. IV, 2 p. 164, sous le nom de *Vernonia Smithiana* Less.

ERLANGEA *Sch.-Bip.*

E. concinna *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1918), p. 205.
Kundelungu (Kässner, n. 2728).
E. Rogersii *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1914), p. 333.
Élisabethville (Rogers, n. 10918).

VERNONIA *Schreb.*

V. adenocephala *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1918), p. 207.
Senga (Kässner, n. 2896).
V. assimilis *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1918), p. 211.
Lafubsu river ? (Kässner, n. 2875).
V. campicola *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1914), pp. 9, 97 et (1918), p. 210.
Kipaila (Kässner, n. 2546, 2548) ; Lubembe-Luapula (Kässner, n. 2426) ; Lufongo (Kässner, n. 2845 *a*).

Obs. — Un de ces échantillons aurait été rapporté antérieurement au *V. Calvoana* Hook f.

V. lafukensis *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1914), p. 6.
Lufongo (Kässner, n. 2846 *a*, 2863 *a*).
V. musofensis *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1918), p. 206.
Musofi (Kässner, n. 2683).

Obs. — Aurait été signalé sous le nom de *V. lappoides* O. Hoffm. dans une note antérieure.

V. oocephala *Baker* var. **angustifolia** *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1914), p. 334.

Kundelungu (Kässner, n. 2777).

V. sengana *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1918), p. 207.

Senga (Kässner, n. 2901).

FELICIA *Cass.*

F. homochroma *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1921), p. 229.

Élisabethville (Rogers, n. 26220).

CRASSOCEPHALUM *Moench.*

C. radiatum *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1918), p. 227.

Pueto (Moero) (Kässner, n. 2825).

Obs. — Aurait été publié antérieurement sous le nom de *Senecio purpureus* L.

PSEUDACTIS *Sp. Moore*

P. emilioides *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1919), p. 119.

Monts Mugila (Kässner, n. 2994).

CENTAUREA *L.*

C. Goetziana *O. Hoffm.; Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1921), p. 231.

Sakania (Rogers, n. 26400).

ERYTHROCEPHALUM *Benth.*

E. caudatum *Sp. Moore* in JOURN. OF BOT. (1918), p. 232.

Erythrocephalum nutans *De Wild.* et *Muchler* non *Benth.*

Lusaka (Kässner, n. 2890).

Nouveaux Chironomides piqueurs habitant le Sleswig-Holstein, par J. J. Kieffer (Bitche).

Forcipomyia aquatica n. sp. ♀. Brun, Tête jaune. Yeux presque confluents, séparés par une ligne très fine. Articles 1, 3 et 4 des palpes de moitié plus longs que gros, 2^e bien plus long que les deux suivants réunis, sa moitié basale grossie et portant au côté médian un orifice circulaire entouré de 10-12 poils terminés en globule. Antennes d'un jaune brunâtre ; articles 2-9 réunis à peine plus longs (1/8) que 10-14 ensemble, 3-9 graduellement un peu plus longs, au moins deux fois aussi longs que gros, s'amincissant graduellement dans leur moitié distale, verticille avec 10-12 poils plus longs que les deux soies sensorielles ; 10-14 conformés à peu près comme les précédents et à peine plus longs, à poils épars et sans soies sensorielles, 14^e^ avec un mince stylet terminal. Mesonotum à poils jaunes et assez denses. Pleures jaunâtres. Balanciers blancs. Aile sans tache, paraissant grise à cause de ses poils longs et denses, cubitus soudé au radius, formant une petite cellule dans un peu plus du tiers distal, n'atteignant pas le milieu de l'aile, bifurcation de la posticale à peine proximale de l'extrémité du cubitus. Pattes jaunes, assez grosses, à longs poils dorsaux, tarses faiblement brunâtres, tibia antérieur **sans peigne et sans éperon**, les **quatre** tibias postérieurs à peigne double et à éperon unique, aussi long que la grosseur du tibia ; métatarse antérieur ayant à peine la demi-longueur du 2^e^ article, celui du tarse postérieur atteignant les deux tiers du 2^e^, l'intermédiaire presque égal au 2^e^, 4^e^ article plus long que le 5^e^ à tous les tarses, 1-4 du tarse antérieur avec deux spinules ventrales à l'extrémité, 1-3 des quatre tarses postérieurs à rangées de soies ventrales bulbeuses, crochets courbés en faucille, empodium aussi long que les crochets, ayant de chaque côté 10-12 longs poils. Les exemplaires fraîchement éclos sont entièrement jaunâtres. L. 2,5 mm. — Obtenu d'éclosion, comme les suivants, par le D^r^ Thienemann.

Forcipomyia bifilis n. sp. ♂. Noir, très brillant. Yeux confluents. Articulations des palpes blanchâtres ; 1^er^ article deux fois aussi long que gros, égal au 3^e^, 4^e^ plus court, ovoïdal, 2^e^ deux fois et demie le 3^e^, grossi au tiers basal. Antennes et panache noir mat, article 2^e^ plus long que 3 et 4 réunis, graduellement aminci basalement, 3-7 transversaux, presque sans col, 8-10 aussi longs que gros, col transversal ; 11-14 longs, le 11^e^ égalant 12 et 13 réunis et, comme eux, renflé à la base, muni d'un verticille du panache, 12^e^ et 13^e^ à verticille de poils moins denses et moins longs, le 12^e^ de moitié plus long que le 13^e^, 14^e^ aussi long que le 12^e^.

à stylet terminal. Mesonotum glabre. Aile très poilue, subhyaline, sous-costale, radius et cubitus noirs, autres nervures pâles, cubitus atteignant les 2/5 de l'aile, soudé au radius dans un peu plus de la moitié proximale, l'unique cellule radiale petite, en ellipse, bifurcation de la discoïdale à peine distale de la transversale, celle de la posticale peu distale de l'extrémité du cubitus, pas de fourche intercalée. Pattes d'un noir mat, au moins les quatre tibias postérieurs à écailles lancéolées, dressées et noires, métatarse antérieur d'un tiers plus long que le 2ᵉ article, l'intermédiaire égal au 2ᵉ, le 3ᵉ un peu plus long, crochets tarsaux en faucille, plus minces et pas plus longs que l'empodium, celui-ci à 12 longs poils de chaque côté. Pince noir mat, articles terminaux faiblement arqués, graduellement amincis, moitié basale pubescente ; lamelle supérieure large, arrondie, ne dépassant pas le milieu des articles basaux ; lamelle intermédiaire blanchâtre, large et un peu plus longue que la supérieure, tronquée, les deux angles arrondis, un peu ressortant, portant chacun quatre longs poils et précédés d'un poil encore plus long ; sa moitié basale est recouverte par une autre lamelle d'un brun noir, à trois lobes arrondis, dont les latéraux sont petits ; vers son milieu, la lamelle intermédiaire a, sur le dessous, deux longs filaments, également distants de la ligne médiane, courbés en arc vers le dehors, graduellement élargis au tiers basal. L. 2,8 mm. — Larves dans un lac. Voisin de **lateralis**, Meig., dont il diffère par le 14ᵉ article plus long que le 13ᵉ, le 1ᵉʳ article du tarse antérieur plus long que le 2ᵉ, les tarses et le panache entièrement noirs.

Atrichopogon atribarba n. sp. ♂. Noir. Yeux confluents. Bouche un peu plus longue que la demi-hauteur de la tête. Article 1ᵉʳ des palpes un peu plus court que le 3ᵉ, celui-ci deux fois aussi long que gros, égalant le 4ᵉ, 2ᵉ un peu plus court que les deux suivants réunis, grossi dans sa moitié basale, où se trouve l'orifice sensoriel. Panache et antenne noirs, articles 2-10 ensemble aussi longs que 11-14 réunis, 3-10 subglobuleux, à col très transversal en anneau blanc, poils du panache très serrés, en ligne transversale occupant les 2/3 du pourtour, l'autre tiers porte seulement deux poils peu longs ; 11ᵉ article aussi long que les trois précédents réunis, renflé sur les deux tiers du pourtour qui portent les poils du panache, les suivants cylindriques, sans panache, mais à poils épars, médiocres, 12e et 13e avec un long poil brun à leur base, le 12e de moitié plus long que le 11e, un peu plus long que le 13e, un peu plus court que le 14e, celui-ci à stylet terminal. Thorax brillant. Balanciers blancs. Aile hyaline, à soies microscopiques, quart distal à soies dressées plus longues et éparses ; cubitus dépassant beaucoup le milieu de l'aile, distant de la pointe alaire d'un peu plus de sa longueur, triple du radius, 2e cellule radiale linéaire, longue, deux fois plus large que la 1e, tige de la discoïdale égalant la transversale, bifurcation de la posticale sous l'extrémité du radius. Pattes brun roux, métatarse antérieur aussi long que le reste du tarse, crochets moins longs que chez le précédent, bidentés à l'extrémité, ne dépassant pas l'empodium. Articles terminaux de la pince un peu arqués, graduellement amincis, pubescents sur toute leur longueur, avec un stylet noir sous leur extrémité ; lamelle supérieure atteignant presque l'extrémité des articles basaux, arrondie au bout, à poils denses et aussi longs que la pince ; lamelles intermédiaire et inférieure larges, courtes, arrondies, blanchâtres. L. 1,8 mm. — Larves dans un lac.

Atrichopogon putredinis n. sp. Noir mat. Yeux confluents (♂ ♀). Bouche égalant presque la hauteur de la tête. Article 1er des palpes plus de trois fois aussi long que gros, 2e presque de moitié plus long que le 1er, renflé au-dessus du milieu, avec l'orifice sensoriel à cet endroit, aussi long que 3 et 4 réunis, ceux-ci au moins deux fois aussi longs que gros (♂ ♀). Antenne du ♂ brun noir, panache brun, dense, atteignant presque l'extrémité du 14e article, 2e article à long pédicelle, 3-10 globuleux, à panache disposé comme chez l'espèce précédente ; 11e de moitié plus long que le 10e, sa partie basale renflée sur les 2/3 du pourtour qui portent les poils du panache, 12e deux fois et demie le 11e, cylindrique et sans panache, comme le 13e et le 14e, d'un tiers plus long que le 13e, 14e à peine plus court que le 12e, à stylet terminal. Articles 10-14 de la ♀ réunis presque deux fois aussi longs que 2-9 ensemble, 3-9 globuleux ou à peine transversaux, verticilles à 8 poils pas plus longs que les soies sensorielles, 10-14 cylindriques, à peu près égaux, à poils épars, 10e à peine plus long que les trois précédents réunis, 14e à peine plus long que le 13e, à stylet terminal. Mesonotum à pubescence grise, et très courte, scutellum jaune brun, avec quelques longs poils noirs, balanciers blanc brunâtre, extrémité de la massue blanc pur. Aile du ♂ seulement à soies microscopiques, toutes les nervures dépourvues de soies, fourche intercalée bien distincte, cubitus deux fois aussi long que le radius, 1e cellule radiale très étroite, 2e linéaire et plus large, tige de la discoïdale égalant la transversale, bifurcation de la posticale proximale du milieu de la 1e cellule radiale ; l'aile de la ♀ a encore des soies plus longues et nombreuses au tiers distal, dans la cellule cubitale à partir de l'extrémité du cubitus, dans la moitié distale des deux cellules discoïdales et l'extrémité de la cellule posticale ; en outre le radius, le cubitus, la sous-costale, la discoïdale sauf la tige et le bas des rameaux, la posticale et l'anale sauf leur base, ont de longues soies alignées ; cubitus distal de la pointe alaire de sa longueur, deux fois et demie aussi long que le radius. Pattes roussâtres, l'antérieure sans longs poils, son tibia à peigne simple et éperon aussi long que sa grosseur, métatarse égalant 2-5 réunis, empodium au moins aussi long que les crochets. Pince et lamelles comme chez le précédent, extrémité des articles terminaux tridentée, la dent médiane la plus longue. L. ♂ 2,5 mm., ♀ 3 mm. — Larves entre les feuilles décomposées, dans un fossé.

Atrichopogon fossicola n. sp. ♀. Noir. Yeux confluents. Articles 1er, 3e et 4e du palpe deux fois aussi longs que gros, 2e au moins aussi long que 3 et 4 réunis, faiblement grossi au-dessus du milieu, où se trouve l'orifice sensoriel. Articles 10-14 des antennes ensemble presque deux fois aussi longs que 3-9 réunis ; 3-9 globuleux, verticilles à 5 ou 6 poils bruns, plus minces et un peu plus courts que les soies hyalines sensorielles ; 10-13 graduellement un peu amincis depuis leur base, le 10e un peu plus long que les deux précédents réunis, à peine plus court que le 11e, 12e égal au 11e, guère plus court que le 13e, 14e le plus long, à stylet terminal. Balanciers blancs. Aile non lobée, à soies microscopiques, à soies plus longues dans la fourche intercalée, puis, sur un espace aussi long et distal de la cellule discoïdale antérieure, un espace plus court et distal de la cellule discoïdale postérieure, au milieu de la cellule posticale près du bord postérieur, enfin tout le long de la cellule anale, proche du bord postérieur ; toutes les nervures, y compris la fourche intercalée, ont des soies longues alignées ; cubitus triple du radius, aussi distant de la pointe alaire que la posticale, tige de la discoïdale un peu plus courte que la transversale, bifurcation de la posticale sous l'extrémité de la 1e cellule radiale. Pattes jaune brunâtre, sans longs poils, 4e article plus court que le 5e, empodium égalant les crochets. L. 1,8 mm. — Larves dans un fossé.

Gymnohelea haesitans n. sp. ♂. Noir mat. Bouche atteignant les 2/3 de la hauteur de la tête. Yeux confluents, à pubescence non dense, comme d'ordinaire dans ce genre, mais éparse et courte. Articles 1, 3 et 4 du palpe environ deux fois aussi longs que gros, 2e de moitié plus long que le 3e, orifice sensoriel au milieu. Panache brun noir, atteignant le tiers distal du 14e article; celui-ci cylindrique et sans panache, comme les deux précédents, d'un tiers plus long que le 13e, à stylet terminal, 12e un peu plus court que le 14e, 11e un peu plus court que le 13e, sa base renflée sur le côté qui porte les poils du panache ; 3-10 paraissant globuleux vus de côté, transversaux et à col excentrique court, vus de dessus. Balanciers blanc pur. Aile n'ayant que des soies microscopiques, cubitus un peu plus de deux fois le radius, la 1e cellule radiale très étroite, tige de la discoïdale un peu plus courte que la transversale, bifurcation de la posticale sous le milieu de la 1e cellule radiale, fourche intercalée bien marquée. Pattes brunâtres, sans longs poils, métatarse égalant le reste du tarse, empodium aussi long que les crochets. Pince comme chez **A. atribarba**. L. 1,8 mm. — Larves parmi le détritus dans un lac.

Culicoïdes pegobius n. sp. ♂. Brun. Front avec une petite proéminence conique située entre les scapes et le sommet des yeux. Ceux-ci séparés presque de la grosseur du 2e article antennaire. Occiput brun. Article 1er du palpe à peine plus long que le 4e, celui-ci deux fois aussi long que gros, plus long que le 3e, 2e d'un tiers plus long que le 1er. Antenne et panache pâles, articles 2-11 ensemble deux fois aussi longs que 12-14 réunis, scape brun noir, trois fois aussi gros que le flagellum, 2e article à verticille court, 12-14 égaux, cylindriques, 12e presque aussi long que 10 et 11 réunis, 14e sans stylet, col des articles 3-10 d'abord transversal, puis aussi long que gros. Mesonotum sans pubescence, avec quelques longs poils. Balanciers blancs. Aile hyaline ou blanchâtre, avec une petite tache brun noir sur la base de la 2^e cellule radiale ; outre les soies microscopiques, quelques soies plus longues le long du bord antérieur, au 1/5 distal et une rangée le long du tiers distal de la discoïdale ; cubitus dépassant le milieu, uni au radius en son milieu, sur un espace égalant la demi-longueur d'une des deux cellules radiales, celles-ci également longues, tige de la discoïdale de moitié plus longue que la transversale, bifurcation de la posticale sous le milieu du cubitus. Pattes blanchâtres, genoux brun noir, tibia antérieur à peigne simple, éperon aussi long que la grosseur du tibia, empodium subnul, crochets non échancrés au bout, tibia intermédiaire sans peigne et sans éperon, tibia postérieur avec peigne double et sans éperon, métatarse antérieur égalant les trois articles suivants réunis, 4^e plus court que le 5^e. Lamelle de l'hypopygium en trapèze, atteignant presque l'extrémité des articles basaux, à huit longs poils dans sa moitié distale, ayant, de chaque côté de la ligne médiane, un lobe allongé, pubescent et presque linéaire ; articles terminaux de la pince arqués à leur base, qui est grossie, pubescente et avec quelques soies plus longues, reste de l'article glabre, droit, mince, sauf l'extrémité qui est en massue. L. 1,5. — Larve dans une source.

Culicoïdes fossicola n. sp. ♀. Jaune. Bouche égalant la hauteur de la tête. Article 2^e du palpe aussi long que 3 et 4 réunis, renflé fortement médialement, sauf à la base, orifice sensoriel vers le milieu, 4^e article aussi long que le 1er, à peine plus long que le 3^e, celui-ci deux fois aussi long que gros. Articles antennaires 10-14 ensemble de moitié plus longs que 2-9 réunis, 3-6 globuleux, 7-9 un peu plus longs que gros, verticilles à 6-8 poils, deux fois aussi longs que les soies sensorielles, 10-13 amincis dans leur moitié distale, chacun deux fois le 9^e, 14^e plus long que le 13^e, sans stylet. Dessus du thorax gris ou brun. Aile large, grise, à soies microscopiques et à soies éparses plus longues ; une tache jaunâtre sur la 2^e cellule radiale et sur la partie correspondante de la nervure costale ; une bande blanche, transversale et percurrente en arrière de l'extrémité du cubitus et une autre en avant de la bifurcation de la discoïdale, traversant la base de la cellule posticale et l'extrémité de la cellule anale ; quatre taches blanches situées l'une à l'extrémité de la cellule cubitale, la 2^e et la 3^e à l'extrémité de chacune des cellules discoïdales, la 4^e à l'extrémité de la cellule posticale ; enfin une grande couvrant la base alaire ; cubitus atteignant le dernier tiers de l'aile, 2^e cellule radiale un peu plus courte que la 1^e. Pattes jaunâtres, sans longs poils, genoux sombres, 4^e article tarsal cylindrique, plus court que le 5^e, empodium n'atteignant pas le milieu des crochets. Abdomen brun. L. 1,3 mm. — Larve dans un fossé.

Bezzia trilobata. n. sp. Noir mat. Yeux séparés par une fine ligne. Article 1er du palpe de la ♀ un peu plus long que gros, plus court que le 4^e, 3^e de la longueur du 1er, 2^e un peu plus court que les deux suivants réunis, non grossi. Antenne du ♂ graduellement amincie, panache brun noir, atteignant presque le 13^e article, ses poils denses, implantés sans ordre sur toute la surface des articles, 2^e article à long pédicelle, 3-10 cylindriques, articulés les uns aux autres sur toute leur largeur, 3-6 aussi longs que gros, 7 et 8 à peine plus longs, 9^e de deux tiers plus long que gros, 10^e de moitié plus long que le 9^e, 11-14 sans poils du panache, le 11^e égalant le 12^e et le 13^e réunis, un peu plus long que le 9^e et le 10^e réunis, cylindrique comme les suivants, 13^e de moitié plus long que le 12^e, égal au 14^e, celui-ci sans stylet. Antenne de la ♀ à articulations de 2-9 blanchâtres, articles 10-14 ensemble un peu plus longs que 2-9 réunis, 2^e rétréci avant le milieu, 3-9 graduellement un peu plus longs, 3^e un peu allongé, 9^e plus de deux fois aussi long que gros, verticilles à 4 ou 5 poils ; 10-14 cylindriques, graduellement un peu plus longs, sauf le 14^e qui est à peine égal au 13^e, 10^e de deux tiers plus long que le 9^e. Scutellum et angles postérieurs du mesonotum à longs poils noirs. Thorax du ♂ brillant. Mesonotum de la ♀ avec deux lignes parallèles, grises, assez rapprochées, situées dans la moitié antérieure. Balanciers brun noir. Aile blanchâtre, à soies microscopiques, cubitus de moitié plus long (♂) ou un peu plus de deux fois plus long (♀) que le radius, séparé de la pointe alaire de 1 1/2 fois sa longueur, un peu plus que la posticale, bifurcation de la discoïdale sous la transversale, celle de la posticale vers le milieu du radius. Pattes brun noir, tarses blancs, articles 4 et 5 et extrémité de 1-3 bruns, fémur antérieur à deux dents noires, les autres inermes, 4ᵉ article tarsal cordiforme, 5ᵉ inerme, plus long que le 3ᵉ, crochets courts, ceux de la ♀ à minime dent médiane ; tibia postérieur du ♂ à quelques spinules dorsales, noires, plus longues que sa grosseur ; aux quatre tarses postérieurs les articles 1-3 ont une spinule ventrale à l'extrémité (♂ ♀), le tibia postérieur a, outre le double peigne, une grosse spinule au bout, le tibia intermédiaire trois grandes spinules à l'extrémité et pas de peigne. Pince brun noir, articles terminaux noirs, très gros, avec quelques grosses soies, divisés au côté médian, par une incision arquée, en un lobe basal pointu, et en un lobe distal bilobé lui-même ; lamelle arrondie en arrière, atteignant l'extrémité des articles basaux, à poils courts et denses. L. ♂ 2,5 mm., ♀ 2 mm. — Parmi les Algues en décomposition. — Une variété a le thorax roux brun, les pattes pâles, le fémur antérieur avec trois ou quatre spinules. L. 3 mm.

Contribution à la Faune Dipterologique (Dolichopodidae) de Belgique, par l'abbé O. Parent.

DESCRIPTION D'ESPÈCES NOUVELLES

Diaphorus Jacobsi sp. nov.

♂. Yeux séparés sur le front, qui est réduit à une bande étroite, linéaire, égale en largeur à l'écartement des deux chètes interocellaires. Tubercule ocellaire noir, terne, à léger givré gris blanc ; 2 paires de soies postocellaires. Front et face, noirs au fond, à satiné gris blanc. Palpes noirs, hérissés de poils noirs chétiformes, robustes. Trompe noire. Occiput noir, à teinte verdâtre, légèrement givré de gris. Soies postoculaires toutes noires. Yeux à pubescence blanche, à facettes nettement élargies dans la région qui touche le front, mais sans ligne de démarcation. Antennes entièrement noires ; chète antennaire pubescent.

Thorax vert cuivreux sombre, à reflets rougeâtres, terni par un léger givré gris. Chètes acrosticaux remarquablement robustes, au moins quatre fois aussi longs que l'intervalle des deux rangées. Écusson de même teinte que le thorax ; 4 chètes marginaux. Flancs du thorax noir verdâtre, à givré gris ; au prothorax, deux touffes de soies robustes, noires, les inférieures plus longues.

Abdomen vert métallique, cuivreux, assez brillant. Sur les flancs, un léger givré blanc, visible d'arrière en avant. Pilosité et chètes marginaux noirs. Segment anal orné de chètes très robustes en 2 rangées transversales, 4 à chaque rangée.

Lamelles hypopygiales externes brunes, en lame élargie au milieu et coudée vers l'arrière, du type *Winthemi Meig.* — Vues de côté, en perspective, elles ont l'aspect d'une pelle ovale, emmanchée ; c'est seulement d'arrière qu'elles montrent leur vraie forme. Elles sont longuement ciliées, moins densément et moins longuement au bord antérieur. Au bord postérieur, les soies sont surtout serrées sur la saillie interne du genou et, à cet endroit, elles atteignent presque la longueur de la lamelle.

Pattes noires, seuls les genoux antérieurs et moyens étroitement jaunes. Pilosité et chétosité noires.

Hanches à givré gris. H. ant. face antérieure : une pilosité longue, devenant chétiforme sur la ligne antéro-externe. H. moy. face antérieure, une pilosité longue et un chète robuste. H. post. un chète externe robuste.

Pattes antérieures. Fémur : face postérieure, sur les 2/3 apicaux et face ventrale sur toute la longueur, densément hérissé de soies chétiformes, un peu plus longues à la base, où elles atteignent en longueur 1 1/2 fois le plus fort diamètre du fémur. Tibia : face postérieure sur toute la longueur, une ciliation dense, rigide, égale, aussi longue qu'au fémur ou presque, égalant 2 1/2 fois le diamètre du tibia dans leur direction. Face dorsale, une ciliation plus courte, moins égale, d'où émergent trois soies doubles des autres, aussi longues que celles de la face postérieure. Protarse, face postérieure : une ciliation continuant celle du tibia, mais plus courte, et s'étendant en décroissant, aux autres articles du tarse. A la semelle de tous les articles une peluche blanche. Cinquième article légèrement, mais visiblement aplati, élargi. Pelotes extraordinairement développées ; pas de griffes.

Pattes moyennes. Fémur sur toute sa longueur, face ventrale et ligne ventro-antérieure, longuement cilié, moins longuement pourtant que l'antérieur. Tibia sans ciliation remarquable ; 1 chète dorsal antérieur robuste, au cinquième basilaire ; face ventrale, 3 chètes robustes. Pelotes normales ; des griffes.

Pattes postérieures. Fémur, sur les 2/3 basilaires, face antérieure avec une ciliation assez remarquable, atteignant en longueur le diamètre même du fémur. Au tiers apical, face ventrale, une simple herse de soies chétiformes, courtes, sans pilosité remarquable. Tibia : ligne postero-ventrale, une ciliation digne de remarque dont les éléments mesurent à la base 1 1/2 fois le diamètre du tibia et vont en décroissant jusqu'à disparaître à l'apex. Face dorsale : une seule série de chètes, 6, 7, assez robustes. Protarse légèrement plus long que l'article suivant. Pelotes normales ; des griffes.

Ailes grisâtres, à nervures brunes. Quatrième longitudinale droite jusqu'à la transverse postérieure. Segment basilaire de la coudée (¹) égal aux 4/5 du segment apical, légèrement arqué vers l'avant ; l'apical en arc de cercle peu accentué, convexe vers l'avant, aboutissant sensiblement à l'apex de l'aile. Troisième longitudinale droite dans ses 2/3 basilaires, puis arquée vers la 4ᵉ. Cinquième section costale égale aux 2/3 de la 4ᵉ. Deuxième longitudinale droite, son extrémité assez fortement arquée vers la 3ᵉ. Transverse postérieure sensiblement au milieu de l'aile, plutôt en deçà, droite, normale à la 4ᵉ, mais oblique sur l'axe divisant la 4ᵉ en deux tronçons, dont le basilaire compté à partir de la petite transverse égale au plus les 2/3 de l'apical. Transverse postérieure égale à la moitié du segment apical de la 5ᵉ, lequel est droit, son extrémité légèrement coudée vers l'apex, dans son ensemble dévié vers la base de l'aile, égalant environ les 4/5 du segment basilaire. Aile large. Angle basilaire postérieur droit, mais arrondi au sommet. Pas de lobe axillaire.

Balanciers jaune clair, à pédoncule brun.

Cuillerons jaune sale, à longs cils noirs.

Longueur : 5 — 5,5 m/m.

Enghien, mai 1862. Un seul exemplaire. Collection Jacobs.

♀ inconnue.

Par les yeux séparés, cette espèce se range dans le groupe *disjunctus Winthemi Meig.* Elle se sépare des deux à la fois par

---

(¹) J'entends par là, la section apicale de la 4ᵉ longitudinale, régulièrement coudée chez les Dolichopus. Simple abréviation.

la taille plus considérable, la ciliation des pattes antérieures et postérieures ; en particulier, de *disjunctus* par le front moins large, la forme et l'ornementation des lamelles hypopygiales externes ; de *Winthemi* par la couleur des tibias antérieurs et moyens.

Si l'on considère comme variation individuelle la séparation des yeux, *D. Jacobsi* dont les pattes sont noires à part les genoux, ne peut venir en comparaison qu'avec *D. Gredleri Mik.* et *D. Merlimontensis* mihi. Or, il se distingue des deux à la fois par le développement des pelotes et l'absence de griffes aux seuls tarses antérieurs, par l'ornementation des pattes, la longueur des lamelles hypopygiales externes, etc.

Si l'on fait abstraction de la couleur des pattes, on se trouve en face de *D. Winthemi Meig* (à yeux contigus) et *deliquescens Lw* dont mon espèce diffère au moins par la ciliation des fémurs postérieurs ; de *lautus Lw* et *varifrons* Beck, avec lesquels elle ne peut se confondre.

Serait-ce une variété à abdomen entièrement vert, de *D. Hoffmannseggi Meig* ou *oculatus Fall ?* La ciliation des tibias antérieurs tout au moins, défend de s'arrêter à cette hypothèse.

Diaphorus Merlimontensis nov. spec.

J'ai fait allusion plus haut à *D. Merlimontensis* mihi, espèce encore inédite que j'ai opposée à la précédente. Pour l'intelligence de cette remarque, je suis amené à décrire ici cette nouvelle espèce. D'ailleurs, comme elle a été trouvée sur le littoral du Pas-de-Calais, il y a chance de la rencontrer également en Belgique.

♂. Yeux étroitement, mais distinctement séparés sur le front dont la plus faible largeur égale l'intervalle entre les deux chètes ocellaires. Tubercule ocellaire noir; le front et la face noirs au fond, à givré gris blanchâtre. Palpes noires à chètes noirs. Trompe noire, Occiput noir, bleuâtre, terne. Cils postoculaires supérieurs noirs, remplacés, vers le bas, par d'épais favoris noir profond. Yeux à facettes élargies dans la région contiguë au front, sans ligne de démarcation. Antennes entièrement noires ; le chète antennaire à pubescence microscopique.

Thorax vert métallique clair, légèrement doré ; brillant dans la région postérieure, mais terni à l'avant par un givré brun jaunâtre assez épais. Flancs noirs, légèrement cuivreux à l'avant, à léger givré grisâtre. Deux chètes prothoraciques noirs, l'inférieur plus développé. Écusson vert métallique assez brillant.

Abdomen vert bleuâtre, sombre, assez brillant. Pubescence noire plus longue que chez *D. Gredleri Mik.* Des chètes marginaux, plus développés au premier segment. Segment anal orné de 4 chètes robustes. Ventre noir à pilosité noire, longue. Lamelles hypopygiales externes extrêmement courtes, à peine observables.

Pattes entièrement d'un noir profond, sans trace de couleur plus claire, même aux extrêmes genoux.

Hanches légèrement givrées de grisâtre. Les antérieures, face antérieure, ornées de longues soies noires. Sur la ligne antéro-externe, jusqu'à l'apex, une série de soies chétiformes plus robustes et plus longues, les moyennes les plus remarquables. Hanches moyennes ornées de même à la face antérieure ; les postérieures, face externe, avec une ligne de 3-4 chètes dressés, de longueur décroissante.

Pattes antérieures : Fémur, ligne ventro-postérieure, sur toute la longueur, orné d'une frange de soies chétiformes, de longueur uniforme, au moins égale au plus fort travers du fémur. Une autre soie ventrale plus courte. Tibia : deux séries des chètes dorsaux courts et faibles, mal distincts des chétules, l'un dorso-postérieur, avant le milieu, plus en évidence. Face ventrale, une série complète et régulière de chétules fins. Une courte et délicate peluche blanche sur la semelle des articles du tarse. Cinquième article légèrement aplati, élargi, triangulaire. Pelotes très développées ; pas de griffes.

Pattes moyennes. Fémur, ligne ventro-postérieure avec une série complète de soies chétiformes, formant frange, celles du milieu atteignant en longueur le plus fort travers du fémur. Une autre série ventro-antérieure, moins longue et moins régulière. Tibia : 2 séries de chètes dorsaux, se détachant très bien sur la pilosité courte, savoir : 3 postérieurs dépassant légèrement en longueur le travers du tibia ; 2-3 antérieurs, dont le premier au tiers basilaire, robuste et plus long. Face ventrale, pas trace de chètes. Pelotes très développées ; pas de griffes.

Pattes postérieures : Fémur, ligne ventro-antérieure, sur toute la longueur, une série de soies dressées, chétiformes et plus longues dans le tiers apical où elles atteignent en longueur les 2/3 du diamètre le plus fort du fémur ; une série semblable et plus longue sur la ligne ventro-postérieure. Tibia : 2 séries de chètes dorsaux ; quelques chètes ventraux. Protarse un peu plus long que l'article suivant. Pelotes normales ; des griffes.

Ailes, noircies légèrement ; plus fortement dans la moitié antérieure. Nervures noires. Costa, dans sa section basilaire, avant l'embouchure de la 1re longitudinale, nettement arquée convexe, noir profond, épaissie. Quatrième longitudinale droite jusqu'à la transverse. Segment basilaire de la coudée droit, légèrement dévié vers l'avant, égal aux 3/5 du segment apical ; celui-ci assez fortement arqué, concave vers l'arrière et paraissant aboutir rigoureusement à l'apex. Troisième longitudinale dans son ensemble arquée concave vers l'arrière, parallèle au segment apical de la coudée sur toute sa longueur. Cinquième section costale égale au plus aux 3/4 de la 4^{e}. Deuxième longitudinale, à l'apex, très légèrement arquée vers la 3^{e}. Transverse postérieure droite, assez oblique sur l'axe, divisant la 4^{e} longitudinale en deux sections, dont l'apicale est 2 1/2 fois plus longue que la basilaire, si l'on compte celle-ci à partir de la petite transverse basilaire. Transverse postérieure au moins 1 1/2 fois plus courte que le segment basilaire de la coudée, presque trois fois plus courte que le segment apical de la 5^{e}, lequel est droit, à peine dévié vers le bas et plus long que le segment basilaire de la 5^{e}. — La plus grande largeur de l'aile vers le tiers basilaire. Angle basilaire externe droit, mais arrondi au sommet.

Balanciers jaunes.

Cuillerons noirs, blanc sale à l'extrême base, avec cils noirs.

Longueur 3,5 $^{m}/_{m}$.

Un seul ♂ trouvé à Merlimont (d'où le nom) près de Paris-Plage, sur le littoral de la Manche. J'en ai vu un autre exemplaire du Dauphiné (Collection Hesse).

♀. inconnu.

Par les yeux nettement séparés sur le front, cette espèce pourrait venir en comparaison avec *D. disjunctus Lw, D. Winthemi Meig* et *D. Jacobsi* mihi. Mais elle s'écarte immédiatement de ces trois espèces à la fois, par un caractère plastique important : le développement extraordinaire des pelotes et l'absence de griffes, à la fois aux pattes antérieures et moyennes.

Ce dernier caractère et la couleur des pattes, l'apparentent étroitement à *D. Gredleri Mik.* dont il a la taille. Il se sépare pourtant de ce dernier par l'écartement des yeux sur le front.

Ce caractère, il est vrai, n'est pas péremptoire. *D. Winthemi*, par exemple, a les yeux tantôt contigus, tantôt séparés. *D. Merlimontensis* pourrait par suite être une simple variété de *Gredleri*. Ceci ne peut se soutenir, car l'écartement des yeux n'est pas le seul caractère qui sépare ces deux espèces.

Il y a des différences de couleur. *D. Merlimontensis* a les pattes entièrement noires, y compris les genoux ; l'abdomen vert sombre métallique, à reflets bleuâtres. *D. Gredleri* a les genoux antérieurs et moyens jaune rougeâtre, l'abdomen noir à léger reflet bleuâtre.

Il y a des différences de pilosité et de chétosité.

D. Merlimontensis ne présente aucune trace de chète ventral au tibia moyen, et montre au fémur postérieur, ligne antéro-ventrale, une série complète de soies chétiformes, très robustes, atteignant en longueur au moins les 2/3 du plus fort travers du fémur. Chez *D. Gredleri,* il y a au tibia moyen un chète ventral après le milieu, et au fémur postérieur, ligne antéro-ventrale, une série de soies très fines, délicates atteignant au plus en longueur le demi-diamètre du fémur.

Il y a enfin des différences de nervation. Chez *D. Merlimontensis* la costa est noir profond, convexe, remarquablement épaissie dans sa section basilaire, avant l'embouchure de la 1^re^ longitudinale ; la 2^e^ longitudinale est droite dans sa partie terminale ; le segment apical de la 5^e^ longitudinale est nettement plus long que le segment basilaire. Chez *D. Gredleri* la section basilaire de la costa est jaune, droite, nullement épaissie ; la 2^e^ longitudinale dans sa partie terminale est fortement arquée vers la 3^e^, de sorte que la cellule marginale est fortement étirée à l'apex, en forme d'alêne courbe ; la 5^e^ longitudinale a son segment apical plus court ou tout au plus aussi long que le basilaire.

Sciapus Villeneuvei nov. spec.

Front large, graduellement rétréci vers l'avant, vert bleuâtre métallique, très brillant, complètement poli, et sans aucune trace de pollinosité. Face large, égalant le demi-travers de l'œil, vert bleuâtre, polie, très brillante dans sa moitié supérieure, couverte dans sa moitié inférieure, d'un épais satiné blanc argent qui remonte sur les côtés en deux cornes très étroites presque jusqu'au niveau des antennes. Palpes et trompe noir brun. Occiput à satiné blanc argent, laissant libre une large orbite vert doré, très brillante. Cils postoculaires supérieurs noirs, les inférieurs pâles. Antennes entièrement noires, un peu plus courtes que la tête ; 3^{e} article triangulaire un peu plus long que large, assez longuement pubescent. Chète antennaire presque deux fois aussi long que l'antenne, à pubescence rigoureusement microscopique, inséré peu après le milieu du bord dorsal du 3^{e} article, droit, dans l'axe de l'antenne.

Thorax vert bleu métallique, à reflets dorés, extrêmement brillant, sans aucune trace de pollinosité. Flancs vert métallique au fond, mais densément poudrés-satinés de gris. Deux soies prothoraciques jaunes ; métaépimère entièrement jaune. Écusson vert bleu métallique, brillant.

Abdomen comprimé latéralement, très brillant, vert métallique varié de violet et de doré purpurescent. Bord postérieur des segments étroitement noir. Pilosité pâle, très longue et jaune sur le 1er segment. Chètes marginaux peu développés, très longs et jaunes au 1er segment. Ventre jaune, à pilosité pâle. 6^{e} segment plus large que les autres, faisant saillie ventralement. 8^{e} segment réduit, brun, à satiné gris.

Hypopyge réduit, brun noirâtre. Lamelles externes aussi longues que la longueur dorsale du 7^{e} segment. Triangulaires dans leur moitié basilaire, elles sont ensuite étirées en ruban étroit, mousse à l'apex ; revêtues d'une pilosité courte, hérissée ; elles portent à la base, face externe, une soie noire, aussi longue qu'elles. Les deux lobes ventraux postérieurs étroits, presque styliformes, aussi longs que les lamelles externes, à pubescence courte, hérissée. A leur base, appartenant peut-être aux lamelles externes, un petit stylet portant à l'apex deux longues soies noires très rapprochées l'une de l'autre. Pénis fin, jaune.

Hanches entièrement jaunes, à part les intermédiaires qui ont une tache brune dans leur moitié basilaire, face dorsale. Pubescence et chètes jaunes. Hanches antérieures, arête externe, dans la moitié basilaire, une série de trois épines jaunes.

Pattes antérieures, jaunes, noires à partir de l'apex du protarse. Fémur au 1/6 basilaire, face ventrale, muni d'un chète jaune rigide (à part ce chète, chétosité et pilosité entièrement noires à toutes les pattes) presque égal en longueur au diamètre du fémur à son niveau et dans la même direction. Tibia un peu plus long que le fémur. Protarse égal aux 3/4 du tibia et au moins double de l'article suivant.

Pattes moyennes jaunes, noires à partir de l'apex du protarse. Celui-ci égal aux 4/5 du tibia, plus que double du 2^e article, égal aux trois suivants réunis. Fémur : 1 chète préapical face postérieure. Tibia portant plusieurs séries régulières de chétules noirs. La plus remarquable est ventro-postérieure à éléments dressés, rigides dépassant en longueur le diamètre du tibia. Ce peigne, qui prend naissance au tiers basilaire du tibia, se continue sur le protarse et l'article suivant en conservant la même longueur. Au tibia, vers la base, deux chètes dorso-antérieurs, plus longs, et deux dorso-postérieurs. Au protarse, faisant pendant au peigne ventro-postérieur, un peigne semblable sur l'arête antérieure ; un chète apical postérieur plus long.

Pattes postérieures jaunes ; les quatre derniers articles du tarse noirs. Fémur : 1 chète préapical. Tibia de 1/5 plus long que le fémur, égal au tarse. Protarse nettement plus court que l'article suivant.

Ailes hyalines, en coin à la racine, la costa légèrement arquée concave au tiers basilaire. Quatrième longitudinale droite dans son ensemble, aboutissant en « spuria » après le sommet de l'aile à une distance égale aux sections costales 4 et 5 réunies. Son rameau antérieur naît à angle droit peu après le milieu de la section apicale, dessinant ensuite un angle obtus curviligne et se dirigeant presque en ligne droite vers le sommet de l'aile. Troisième longitudinale droite jusqu'au niveau de la racine du rameau antérieur de la 4^e, à partir de là arquée vers celle-ci. Cinquième section costale 4-5 fois plus courte que la 4^e. Deuxième longitudinale droite sur les 4/5 basilaires, puis fortement infléchie vers l'arrière, de sorte que la cellule marginale est étirée effilée à l'apex. — Transverse postérieure au milieu de l'aile, droite, fortement oblique sur l'axe, faisant avec la 4^e un angle inférieur aigu et avec la 5^e un angle obtus. Elle divise la 4^e en deux sections dont l'apicale est légèrement plus courte que la basilaire. Elle est nettement plus courte que le manche de la furca et sensiblement égale au segment apical de la 5^e, lequel est droit et fortement incliné sur la base. Nervure anale imperceptible.

Balanciers jaunes.

Cuillerons jaunes, étroitement bordés de noir, et à cils jaunes.

Longueur : 3-3,5 mm.

♀ semblable au ♂ dans l'ensemble. Comme chez lui, toutes les hanches à pilosité et chétosité jaunes. Hanches antérieures, outre la pilosité à la face antérieure et les chètes apicaux, une série de trois chètes rigides sur la moitié basilaire de la ligne antéro-externe. Pattes antérieures : Fémur, face ventrale, moitié basilaire, une série de 3 chètes rigides jaunes, divergents, de longueur décroissante, le basilaire presque égal au double du travers du fémur. Tibia : un chète dorso-antérieur au quart basilaire, 1 chète dorso-postérieur un peu avant, beaucoup plus réduit. Protarse égal aux 4/5 du tibia, égal au moins aux trois articles suivants réunis. — Pattes moyennes. Tibia : 2 chètes dorso-postérieurs ; 1 chète dorso-antérieur plus robuste, au cinquième basilaire. Protarse égal aux 3/4 du tibia, presque égal aux trois articles suivants réunis. Pattes postérieures. Tibia : 2 chètes dorso-postérieurs courts ; 1 chète dorso-antérieur plus long, vers la racine. Tibia sensiblement égal au tarse. Protarse légèrement, mais nettement plus court que l'article suivant.

En abondance dans la zone des dunes, sur les feuilles de ronces en juillet-août 1917 et 1918 à Paris-Plage, littoral de la Manche, près de l'embouchure de la Canche.

Cette espèce, la plus petite, mais aussi la plus brillante parmi celles que je connais est signalée d'Angleterre par Verrall, dès 1876. Nul doute qu'elle ne se retrouve sur la côte belge.

Avec Verrall, je l'ai d'abord étiquetée *Sc. lœtus Meig.* Mais au témoignage de Becker (*Dipterologische Studien. Dolichopodidæ. Paläarkt.* P. III, p. 126), qui a vu le type à Paris, l'espèce de

Meigen n'est pas un *Sciapus*, mais bien un *Chrysotimus* se rapportant à l'espèce *molliculus Fall.* Une enquête faite sur ma demande au Muséum de Paris, confirme au moins dans sa partie négative l'avis précédent : l'espèce de Meigen n'est pas un *Sciapus*.

Je suis fortement tenté de rapporter mon espèce à *Sc. fulgens v. Ros.* d'après la description succincte qu'en donne Becker lui-même, *loc. cit.* P. III, p. 189. Nervation, taille, couleur, paraissent concorder parfaitement. Il est regrettable que l'auteur n'ait pas signalé la couleur des antennes, et la ciliation rigide si caractéristique au tibia moyen (¹). M. Becker qui a vu le type de v. Roser et mes propres spécimens, m'écrit que ceux-ci représentent une espèce nouvelle. C'est avec une conviction chancelante que je m'incline devant son autorité, je tiens à le déclarer ici, et que j'ai décrit la présente espèce.

Je la dédie au savant diptériste de Rambouillet, M. le Dr Villeneuve qui a guidé mes premiers pas dans l'étude des mouches et qui veut bien m'honorer de son amitié.

Sciapus Villeneuvei mihi (Sc. fulgens v. Ros. ?) par l'absence d'ornements aux tarses du ♂, par la couleur entièrement noire des antennes ne peut venir en comparaison qu'avec *Sc. nigricornis Lw.* et *Sc. sylvaticus Beck.* Il s'en distinguera à première vue par le vif éclat du front et de la face, qui sont au contraire ternis par un poudré gris blanc chez les deux espèces précédentes et par d'autres caractères dont la description ci-dessus fournit le détail.

M. A. Renier développe sur *le rôle de l'anticlinal de Fraipont* quelques considérations, qui se résument ainsi :

Ce trait tectonique est l'un des plus remarquables du socle paléozoïque de la Belgique.

Il se manifeste tout d'abord de façon très nette dans l'allure cartographique des bandes du Dévonien inférieur qui enserrent le massif de Theux ; celles-ci présentent un rebroussement des

---

(¹) Une description complète et détaillée, comme celles qu'on me reprochera peut-être de donner, permettrait de solutionner la question présente, et en général de distinguer l'espèce non seulement de celles qui sont décrites, mais encore de celles qu'on découvrira dans la suite.

plus accentués suivant l'alignement Fraipont — les Forges Thiry (Pepinster).

Un anticlinal transversal affecte, de façon non moins évidente, les bandes dévoniennes du massif (fenêtre) de Theux. Son axe se trouve prolonger vers le S.-E. celui de l'anticlinal de Fraipont.

Non moins manifestes sont les effets de ce pli transversal dans l'allure planimétrique de la faille de Theux. Le plissement de cette faille est d'ailleurs plus directement frappant pour qui considère soit le prolongement oriental de l'axe du synclinal de Dinant, au delà de Louveigné, soit le prolongement occidental de l'axe du synclinal de Forstbach, digitation principale du synclinal d'Eschweiler. Ces deux axes se terminent en des points de rebroussement de la faille de Theux qui au surplus se font vis-à-vis, si bien qu'un arc de raccord, formant prolongement aérien, recoupe tout naturellement à angle droit la trace de l'anticlinal transversal.

L'influence du pli en question se remarque encore dans la disposition de la bordure méridionale du massif de Theux. Sa considération pourrait, sans doute, faciliter les recherches qu'il conviendrait de poursuivre pour aboutir à un tracé certain de la faille de Theux entre le Marteau (Spa) et Tiége, où, de part et d'autre, le Dévonien inférieur enserre le Cambrien.

Il n'est pas improbable que l'anticlinal de Fraipont se poursuive au travers du massif cambrien dit de Stavelot suivant l'alignement Spa-Vielsalm. Le dôme devillien de Hourt (Grand-Halleux) jalonnerait la trace de son passage. Il en résulterait que l'interruption des dépôts connus sous le nom de *poudingue de Malmedy*, entre Parfondruy (Stavelot) et Henri-Moulin (Basse-Bodeux), pourrait être envisagée comme provenant d'une accentuation posthume de l'anticlinal de Fraipont. L'aire ébranlée par le tremblement de terre du 20 février 1921 a pour axe principal la trajectoire de l'anticlinal de Fraipont telle qu'elle se trouve définie ci-dessus, y compris son prolongement vers le Nord, encore que l'anticlinal transversal de Moresnet ait joué un rôle accessoire.

Ce qui est en effet plus certain et en tout cas plus important, c'est que, à l'endroit que Gosselet considéra comme formant l'extrémité occidentale du « seuil » de Fraipont, c'est-à-dire à la Rochette (Chaudfontaine), l'allure planimétrique de la faille eifelienne, prolongée vers l'Est par les failles de Magnée et de St. Hadelin, apparaît affectée par un anticlinal transversal. Cet anticlinal est bien le prolongement de celui de Fraipont, car l'allure de la faille est symétrique de celle de la faille de Theux considérée sur les bords Ouest et Nord-Est du massif de Theux.

En poursuivant, au Nord-Ouest de la Rochette, la trace de l'anticlinal de Fraipont, on aboutit aux environs d'Angleur, région des plus compliquées, traversée par des failles dont le plissement est certain en d'autres points de leur parcours. La connaissance de l'influence possible de l'anticlinal de Fraipont permettra, peut-être, de déchiffrer la tectonique encore énigmatique de ce coin de pays, car ce trait semble être de tout premier ordre.

Névroptères nouveaux ou critiques, par le R. P. Longin Navas, S. J. Cinquième série.

Famille Myrméléonides

1. **Morter insertus** Hag.

Myrmeleon argentinus (corrigé pour *argentina*) Banks.

J'ai vu un échantillon de cette espèce de Haïti « Port-au-Prince, G. Lion, 1911 », Mus. de Paris. Son aire d'existence est donc du moins de l'Argentine aux Antilles. Il n'est pas rare aux environs de la Havane.

2. **Neuroleon Regnieri** spec. nov.

Fuscus.

Caput facie fulva, ante antennas, fusca ; vertice ferrugineo, linea transversa anteriore continua, alia posteriore ex punctis fuscis ; oculis ferrugineis ; palpis totis pulvo-pallidis.

Thorax subtotus fusco-ferrugineus. Prothorax manifeste latior quam longior, sulco in tertio anteriore sito, disco vage ferrugineo notato.

Abdomen fuscum, albido pilosum, plerisque tergitis macula testacea grandi insignitis.

Pedes fulvi, albido, pilosi, fusco punctati et setosi ; calcaribus testaceis, parum arcuatis, duos primos tarsorum articulos æquantibus.

Alæ angustæ, hyalinæ, irideæ, acutæ ; margine externo sub

apicem leviter concavo ; stigmate albido, interne ad subcostam fusco limitato, angustius in ala posteriore ; reticulatione plerumque fusca, subcosta et radio fulvo striatis.

Ala anterior 7 venulis radialibus internis, ultima areola divisa ; sectore radii 11 ramis ; aliquot venulis gradatis externis et aliis prope marginem posteriorem tenuissime, vix sensibiliter fuscescente limbatis.

Ala posterior area apicali angusta, nullis venulis gradatis instructa ; nullis venulis limbatis, paucis fulvis ; sectore radii 10 ramis ; area cubitali externa subtota biareolata.

Long. corp.	18	mm.
— al. ant.	22'5	»
— — post.	21'4	»

Patrie. Afrique. Sénégal ? « Bassin de la Sangha, E. Regnier, 1899 » (Mus. de Paris).

3. **Neuroleon Clignyi** sp. nov.

Fuscus, gracilis.

Caput fulvo-ferrugineum, macula grandi fusca ante et inter antennas ; punctis nigris in series transversas dispositis in vertice et occipite ; oculis fuscis ; palpis fulvis.

Thorax subtotus fuscus. Prothorax paulo longior quam latior, antrorsum leviter angustatus, superne striis ferrugineis parum definitis.

Abdomen fuscum, fulvo breviter pilosum ; gracile ; tergitis 3 et 5 macula testacea posteriore notatis (apex deest).

Pedes fulvo-albi ; apice tibiarum et tarsorum fusco ; albido pilosi, fusco longiter setosi ; calcaribus subrectis, testaceis, duos primos tarsorum articulos æquantibus ; unguibus testaceis.

Alæ angustæ, hyalinæ, acutæ ; margine externo leviter sub apicem concavo ; reticulatione fulva, fusco varia ; stigmate albido.

Ala anterior stigmate interne late fusco limitato ; venis fuscis, pallido striatis ; venulis ad anastomosim rami obliqui cubiti et gradatis discalibus externis angustissime fusco limbatis ; 8 venulis radialibus internis ; 10-11 ramis sectoris radii ; area apicali venulis gradatis fuscis ; areis cubitali interna et postcubitali longis, angustis, simplicibus.

Ala posterior pallidior ; reticulatione plerumque fulvo-ferruginea ; nullis venulis limbatis ; subcosta et radio fuscis, pallido striatis ; sectore radii 10-11 ramis.

Long. corp.	29	mm. ? (1)
— al. ant.	28'5	»
— — post.	27	»

Patrie. Sénégal : « Casamance, Cligny, 2500 » (Mus. de Paris).

4. **Nelees muzanus** sp. nov.

Caput vertice et occipite ferrugineis ; punctis nigris in series transversas dispositis, ad occiput striolis longitudinalibus nigris ; facie flava, stria fusca transversa in fronte, retrorsum inter antennas angulosa in /\ ; oculis fuscis ; palpis flavis, ultimo articulo fusco, labialium fusiformi, acuto, nitido ; antennis longis, thorace longioribus, clava parum dilatata, fulvis, ferrugineo annulatis.

Thorax ferrugineo-fuscus. Prothorax latior quam longior, pilis lateralibus albis, nigris mistis ; disco ferrugineo-fusco, ad latera pallidiore.

Abdomen ferrugineo-fuscum, albido breviter pilosum.

Pedes pallidi, albido pilosi, fusco setosi ; femoribus fuscescentibus ; calcaribus testaceis, subrectis, primo tarsorum articulo longioribus ; articulo ultimo tarsorum fusco ; unguibus testaceis.

Alæ longæ, apice acutæ ; stigmate pallido ; reticulatione pallida, fusco varia, per plagas albida ; pilis fimbriisque fuscis.

Ala anterior margine externo sub apicem leviter concavo ; stigmate interne fusco limitato ; area radiali 7 venulis internis ; sectore radii 12 ramis ; area cubitali et postcubitali angustis, simplicibus ; aliquot venulis gradatis in sexto alæ apicali tenuissime fusco limbatis ; venis plerisque fulvo-albis, fusco striatis.

Ala posterior pallidior, sectore radii cum ramis et procubito subtotis pallidis ; nullis venulis limbatis ; una venula radiali interna ; sectore radii 10 ramis.

Long. corp. ♀	27'5	mm.
— al. ant.	28'8	»
— al. post.	26	»

---

(1) Le bout de l'abdomen manque.

Patrie. Afrique. « Bassin inf. du Zambèze, Vallée du Muza, 32° long. E. 18° lat. S. (De 1000 à 1120 m. d'altit.), G. Vasse, 1905 » (Mus. de Paris).

5. **Graonus** gen. nov.

Similis *Nelei* Nov.

Prothorax longior quam latior.

Alæ area apicali lata, serie venularum gradatarum distincta ; area postcubitali angusta, simplici.

Ala anterior area costali prope basim biareolata ; item una vel altera cellula radiali divisa ; linea plicata posteriore sive cubitali indicata, anteriore obsoleta vel vix sensibili.

Cetera ut in *Nelees* Nav.

Le type de ce nouveau genre est *Nelees Mesopotamiæ* Mort. (Entom. Mo. Magazine, 1921, p. 215), que je ne puis rapporter à mon genre *Nelees*.

Il se distingue de *Nelees* Nav., surtout dans la structure des ailes.

A l'aile antérieure le champ costal est plus large et en partie divisé en deux régions ou deux rangées d'aréoles par le moyen d'une série de veinules en gradins, ce qui n'arrive jamais dans le *Nelees*, mais il est toujours étroit et simple.

A l'aile postérieure le champ apical est également large et semblable à celui de l'aile antérieure, bien garni d'une série de veinules en gradins ; au contraire il est étroit au *Nelees*, avec très peu de veinules en gradins ou aucune.

Famille Chrysopides

6. **Leucochrysa Lestagei** sp. nov.

Flava, fusco picta.

Caput parte superiore frontis et lateralibus rubro-sanguineis ; vertice stria laterali fusca ; oculis in sicco nigris ; antennis ala anteriore sesquilongioribus vel amplius, flavis, primis articulis seu in sexto basali nigris, sequentibus fuscis, sensim pallidioribus ; pilis omnibus nigris ; articulo primo grandi, longiore quam latiore, flavo, macula fusca interna prope apicem notato.

Pronotum paulo longius quam latius, antrorsum leviter angu-

statum, marginibus lateralibus fuscis. Meso- et metanotum stria fusco-violacea longitudinali laterali insignitum. Mesonotum in medio anteriore rubidum. Metanotum lineis lateralibus latioribus, striam mediam flavam liberantibus.

Abdomen superne viridescens, fusco tinctum, inferne flavo-albidum.

Pedes viridi-flavi, pilis fulvis ; tibiis calcari apicali fulvo, brevi ; tarsis flavescentibus ; unguibus in medio basali fortiter dilatatis, fuscis.

Alæ longæ, hyalinæ, fortiter irideæ ; reticulatione viridi-flava ; pilis fimbriisque fuscis ; stigmate flavido, interne fuscescente, 4-5 venulis in area costali et duabus primis in subcostali fuscis ; venulis gradatis internis introrsum in seriem longitudinalem continuatis.

Ala anterior apice subacuta ; venulis costalibus in medio interno ad costam fuscis ; sectore radii initio, prima venula radiali subtota, sequentibus 3-5 initio seu ad radium, duabus primis intermediis subtotis, duabus ultimis procubitalibus et gradatis externis fusco-nigris ; item aliquot ramis sectoris radii ultra medium tractu brevi ad sectorem ; umbra fuscescente obliqua præter venulas gradatas externas fere ab apice alæ ad marginem posteriorem, ad primam furculam marginalem ; venulis gradatis 13/11, intermediis 7.

Ala posterior apice acuta ; venulis gradatis 12/9 ; umbra fuscescente in fasciam obliquam a margine posteriore ultra angulum posteriorem per axillas furcularum marginalium nigratas percurrente, longe ante apicem alæ evanescente.

Long. corp.	15 mm.
— al. ant.	27 »
— — post.	24'7 »
— antenn.	43 » ? (1)

Patrie. Brésil : Muriguy, État du Rio, 24 octobre 1920. Un échantillon dans ma collection, don de M. J. A. Lestage, à qui je dédie cette belle espèce.

---

(1) Le bout manque.

7. **Nodita Anchietai** sp. nov.

Caput viride ; fronte macula sanguinea ad latera et alia centrali arcuata ; vertice stria sanguinea utrimque pone antennas in ∧ ; oculis in sicco nigris ; antennis flavis, articulis primo et secundo ad latera rubro signatis, tertio toto nigro.

Thorax viridis. Pronotum ad latera striola anteriore et macula posteriore elliptica, fuscis. Mesonotum ad humeros macula rubra notatum.

Abdomen viride, inferne pallidius, flavescens ; secundo tergito stria longitudinali, quarto et duobus ultimis subtotis fusco-sanguineis.

Pedes virides, tarsis flavescentibus.

Alæ hyalinæ, irideæ ; reticulatione viridi ; stigmate viridi-flavo, in medio vel tertio interno fusco, venulis distinctis in utraque area, costali et subcostali.

Ala anterior apice elliptice rotundata ; venulis costalibus primis et mediis subtotis, aliis fere ad costam fuscis ; sectore radii initio late, venulis ultimis radialibus, omnibus procubitalibus, gradatis ultimis internis et primis externis anguste fusco limbatis ; axillis furcularum marginalium etiam anguste fusco limbatis ; venulis gradatis 5/7 ; intermediis 6, prima prope apicem cellulæ divisoriæ inserta.

Ala posterior apice subacuta ; nullis venulis fuscatis, neve limbatis ; gradatis fere 4/5.

Long. corp.	8'2 mm.	
—	al. ant.	13'2 »
—	— post.	12 »

Patrie. Brésil : Tres Rios, Jacarépagúa, 3 octobre 1920. Un échantillon dans ma collection, hommage de mon ami M. J. A. Lestage.

J'appelle *Anchietai* cette jolie espèce en hommage du R. P. Joseph de Anchieta, S. J., célèbre dans la culture du Brésil.

Famille HÉMÉROBIDES

8. **Nusalala Escomeli** sp. nov.

Fulva, fusco varia, pilis longiusculis.

Caput flavum, flavo pilosum ; occipite subtoto fusco ; oculis nigris ; antennis flavis ? (maxima pars deest) ; articulo primo latiore apice quam basi.

Thorax fulvus, fusco maculatus, fulvo pilosus.

Abdomen fulvum, fulvo pilosum (male conservatum).

Pedes fulvo-pallidi, pallido pilosi ; tibiis ante medium et apice fusco annulatis.

Alæ membrana hyalina ; reticulatione fulvo-pallida, fusco varia.

Ala anterior tota marmorata, umbris penniformibus fusco-griseis ad venas ramosque, cum proximis alterius venæ ramive subcontiguis ; venis atomis fuscis minutissimis respersis ; venulis plerumque fuscis ; gradatis fere 4, 5, 8 ; marginibus punctis fuscis cum fulvis longioribus alternis notatis ; ramo posteriore procubiti brevissimo, cum cubito confluente ; duabus venulis cubitalibus.

Ala posterior penitus hyalina, marginibus atomis fuscis minutissimis densissimis ornatis ; venulis gradatis 2/5, externis fuscis.

Long. corp.	4	mm.
— al. ant.	7'6	»
— — post.	6'1	»

Patrie. « Pérou, Env. d'Arequipa, Dr. Escomel 1912 » (Mus. de Paris).

(Saragosse, 22 janvier 1922.)

Quatrième Section

La Section s'est réunie à l'issue de l'assemblée générale, sous la présidence de M. le Dr Goris.

Le mémoire de M. le Dr Vervaeck traitant de *la Détermination de la Robusticité constitutionnelle* (Ann. de la Soc. scientif. 1920-1921, 2e fasc., 2e part., p. 141) est soumis à la discussion. M. le Dr Goris insiste pour qu'il soit davantage tenu compte, pour cette évaluation, des données fournies par la spirométrie, celle-ci étant certainement en relation directe avec le diamètre de la cage thoracique. M. le Dr Vervaeck répond que la spirométrie est un procédé infidèle, trop dépendant de la bonne volonté du sujet qui ne sait pas, souvent, donner tout le rendement pulmonaire ; il en est de cette méthode comme de la dynamométrie et de l'esthésiométrie, qui ne peuvent être utilisées que dans des cas particuliers et à titre de contrôle. Existe-t-il, au surplus, une relation certaine et constante entre le développement du thorax et la qualité du fonctionnement respiratoire ? Ce qu'il nous faut, ajoute M. Vervaeck, c'est une formule obtenue par des éléments comparables et sûrs, tels que ceux fournis par l'indice de robusticité de Pignet (taille, poids, périmètre thoracique) dont j'ai donné une appréciation basée sur des recherches personnelles, dans mon mémoire. M. Vervaeck a lui-même, on le sait, déterminé un coefficient constitutionnel (constitué par la somme des quotients obtenus, en divisant les chiffres respectifs du poids et du périmètre thoracique par celui de la taille), qu'il utilise fréquemmant pour apprécier la robusticité dans un cas individuel (Mémoire, p. 214). D'après ses recherches (p. 222), le chiffre 35 paraît pouvoir être accepté comme limite extrême de l'aptitude militaire en Belgique. S'il eût été accepté comme critérium pour l'examen des miliciens de la levée de 1918, le déchet eût été de 2 p. 100 à peine du contingent. Le quotient de robusticité varie, d'ailleurs, dans les différentes armes. Il est désirable aussi — et depuis la guerre on est entré dans cette voie — que les sujets atteints de certaines infirmités compatibles avec des services auxiliaires (hernies, cicatrices vicieuses, etc.), puissent être versés dans ceux-ci.

MM. les Drs Houdmont et Warlomont présentent également quelques observations. M. Houdmont voudrait que l'on attribuât plus de valeur à l'aptitude fonctionnelle et à la mesure du débit respiratoire.

M. le Dr Matagne (Bruxelles) présente « *Quelques considérations sur le cancer de la langue et son traitement* » :

Avant d'aborder la question du traitement du cancer de la langue, je désire vous dire quelques mots au sujet de l'étiologie de cette affection. Ici, plus que dans toute autre localisation cancéreuse, les causes directes d'irritation jouent un grand rôle. Ce sont d'abord les lésions provoquées sur la langue par des chicots dentaires piquants qui entretiennent pendant longtemps une plaie localisée à la même place. La peur de l'intervention du dentiste fait courir les plus grands dangers, et peut conduire à une mort atroce. Les pièces dentaires défectueuses peuvent aboutir au même résultat. Le rôle du tabac est trop connu pour qu'il faille insister beaucoup sur ce sujet, et cependant, le plus souvent, on ne se rend pas bien compte de la façon dont il exerce son action nocive. Le tabac est-il réellement un facteur étiologique du cancer ? Voyons-nous les priseurs être exposés au cancer de leur organe olfactif ? Voyons-nous les ouvriers qui mâchent le tabac contracter le cancer de la langue ? Pour ma part, je ne l'ai jamais observé. Et cependant la chose est évidente, le cancer de la langue est bien le cancer des fumeurs, à tel point que cette localisation est presque exclusive à l'homme, et que dans les pays où les femmes du peuple fument la pipe, comme dans le Tyrol, par exemple, la proportion des femmes atteintes est aussi forte que celle des hommes. La contradiction est plus apparente que réelle. La vérité, c'est que le cancer est engendré par l'action irritante de la fumée brûlante sur la muqueuse linguale ou labiale, et non pas directement par la feuille de tabac que l'on fume. Le marronnier ou toute autre herbe donnerait le même résultat. Nous assistons ici à une étiologie analogue à celle du cancer de la peau de l'abdomen chez les porteurs de brasier de l'Inde, ou à un résultat comparable à celui de la formation des épithéliomas de la peau à la suite des irradiations par les Rayons X.

Lorsqu'on interroge les malades atteints, on constate que la lésion siège du côté où ils tiennent la pipe à la bouche, et correspond à l'endroit de contact de l'orifice du tuyau ; le côté le plus généralement atteint est le côté gauche. Si l'orifice de sortie de la fumée détermine une action irritante par brûlure longtemps entretenue, le tuyau de pipe, surtout si la pipe est de terre, exerce une irritation par contact, par frottement rugueux toujours répété au même endroit de la lèvre, et constitue ainsi une cause étiologique différente dans la genèse du cancer des lèvres ; la brûlure du cigare ou de la cigarette aurait le même effet sur la lèvre que la pipe sur la langue.

La place la plus importante dans l'étiologie du cancer de la langue est occupée par la leucoplasie, ou leucokératose bucco-linguale. Cette affection est encore incomplètement connue dans son essence. Jusque il y a quelques années, on la dénommait couramment le psoriasis lingual, mais cette dénomination était absolument erronée, car cette affection n'a rien de commun avec le psoriasis, qui est une affection cutanée, et qui n'atteint pas les muqueuses. La vérité, c'est qu'il y a différentes affections, les unes bénignes, les autres graves, qui donnent lieu à la formation des plaques blanches sur les muqueuses de la cavité buccale. Les plaques blanches des verriers, qui reçoivent dans la bouche l'air surchauffé par le contact avec le verre en fusion, sont bien connues, et constituent l'une des formes de la leucoplasie. Celle-ci présente, par son origine, une grande analogie avec les plaques leucoplasiques des fumeurs, qui, eux aussi, reçoivent dans la bouche une fumée surchauffée, qui brûle les couches les plus superficielles de leurs muqueuses. Cette leucoplasie se caractérise par des taches fugaces, se déplaçant facilement, à mesure que la muqueuse se desquame, et se reproduisant à d'autres endroits ; ces formes sont bénignes.

Plus graves sont celles qui se présentent chez les syphilitiques et chez les arthritiques ; chez ceux-ci la leucoplasie se fixe sur une plaie déterminée ; la muqueuse, au lieu de rester souple, comme dans les leucoplasies bénignes, devient épaisse et rugueuse. Le diagnostic différentiel entre la leucoplasie syphilitique et la leucoplasie arthritique ne peut se faire à la simple inspection.

L'examen général du malade, les commémoratifs, l'examen du sang, serviront à élucider le diagnostic, et à instituer le traitement, spécifique pour les uns, diététique pour les autres. Je tiens à signaler ici une cure d'eau qui fait merveille dans la leucoplasie arthritique : celle de Saint-Christau, dans les Pyrénées. Le traitement local, aussi urgent que le traitement général, doit se faire au Radium, qui donne les meilleurs résultats, et qui est vraiment ici un préventif du cancer. Je ne veux pas terminer ces quelques considérations sur la leucoplasie linguale sans m'élever énergiquement contre la doctrine enseignée en cette matière par certains maîtres éminents, notamment Gaucher, Poirier et Fournier, qui enseignent que la leucoplasie est de nature syphilitique, et que tout épithélioma lingual est consécutif à une leucoplasie. Il existe un grand nombre de leucoplasies qui n'ont rien de commun avec la syphilis, et s'il est vrai que la leucoplasie est une affection éminemment précancéreuse, il n'en est pas moins vrai que fréquemment l'épithélioma de la langue se développe sans aucune lésion leucoplasique préalable.

Toutes les lésions et ulcérations syphilitiques ou leurs cicatrices peuvent également être le point de départ de cancers, surtout en ce qui concerne la langue, où ces lésions agissent comme processus inflammatoires chroniques.

Le cancer de la langue jouit d'une réputation de gravité toute particulière, et c'est à juste titre. C'est peut-être de toutes les localisations celle dont la marche est le plus rapide et dont l'envahissement ganglionnaire est le plus précoce. Quelle est la raison d'être de cette marche si rapide? Elle résulte tout naturellement de la structure anatomique même de la langue. Cet organe est essentiellement musculaire : 17 muscles entrent dans la constitution de la langue, et ces muscles, assez faciles à disséquer dans leurs insertions extra-linguales, finissent par s'enchevêtrer dans la partie mobile de la langue, où il devient impossible de les séparer. Une coupe de la partie antérieure de la langue montre des fibres musculaires longitudinales, transversales, verticales, au milieu desquelles circule un riche réseau lymphatique et sanguin. On comprend dès lors, que le petit nodule épithéliomateux qui se forme dans la langue, organe toujours en mouvement, se trouve malaxé par toutes les fibres musculaires de cet organe, comprimé, dissocié et les cellules cancéreuses poussées dans les vaisseaux lymphatiques, où elles ne trouvent de repos que dans les relais ganglionnaires de la loge sous-maxillaire et de la région carotidienne. On peut dire que dans la majorité des cas, un mois après le début de la lésion cancéreuse, l'adénopathie est déjà constituée. Combien lourde est la responsabilité du médecin qui est consulté pour une lésion douteuse ou débutante de la langue, et combien il devra être attentif à poser le diagnostic dans la première période du mal, alors qu'il est encore purement local, c'est-à-dire guérissable ! Lorsque l'infection ganglionnaire est établie, presque toujours la partie est perdue. En présence d'une affection aussi grave, il n'y a pas de temps à perdre, et c'est tout de suite qu'il faut agir. En cas de doute, on s'abstiendra de tout traitement antisyphilitique, ce traitement étant particulièrement nuisible dans les néoplasmes pour lesquels il est un véritable stimulant : pas d'iode ni d'iodure, pas de mercure, pas d'arsenic ni de salvarsan, pas de nitrate d'argent. Seule une biopsie faite d'urgence peut être autorisée lorsqu'il existe des raisons plausibles qui militent en faveur d'une gomme syphilitique ou d'une lésion tuberculeuse. Le diagnostic de l'épithélioma lingual est d'ailleurs facile ; lorsque l'on sent un bord d'ulcération induré, ou un petit noyau dur, on peut être affirmatif.

Quant au traitement, trois méthodes différentes sont actuellement utilisées pour combattre le cancer de la langue : l'amputation sanglante, la Radiumthérapie et enfin l'électro-coagulation et le cautère froid.

Je ne m'arrêterai guère à la chirurgie du cancer de la langue. Il y a une vingtaine d'années, Trélat, rapportant une statistique de 12 cas, avec 4 morts opératoires et 8 repullulations endéans les 6 mois, constatait que ses résultats étaient « lugubres » ; c'est l'expression dont il se servait. Mais depuis, grâce au perfectionnement des techniques opératoires, les résultats sont devenus plus encourageants, et parfois le succès a répondu aux efforts du chirurgien. Mais le corps médical appelait de tous ses vœux des méthodes plus favorables.

Toutefois la chirurgie ne perdra pas ses droits, car, si les méthodes nouvelles s'attaquent supérieurement à la localisation linguale initiale du cancer, elles doivent céder le pas à l'exérèse chirurgicale, et s'associer à elle pour déloger les métastases ganglionnaires du cou ; et ici, il vaut la peine de faire un effort énergique et d'associer les diverses méthodes antinéoplasiques, Rayons X, Radium, électro-coagulation, aéro-cautérisation, fulguration, car les métastases cervicales du cancer de la langue ne dépassent que très exceptionnellement la barrière ganglionnaire du cou, pour produire la généralisation.

Parmi tous ces moyens, c'est aux Rayons X que je donne la préférence : une séance intensive la veille de l'opération, et une séance au moment de l'intervention chirurgicale sur la plaie largement ouverte : voilà le moyen le plus rationnel de détruire les cellules épithéliomateuses que l'ouverture des vaisseaux lymphatiques et la lésion fréquente des ganglions ont disséminé dans la plaie opératoire. Si dans un coin ou l'autre de la plaie l'exérèse a été incomplète ou douteuse, c'est au Radium à intervenir pour y stériliser les débris cancéreux restés à demeure.

La découverte du Radium et de son étonnante propriété antinéoplasique a livré aux radiumthérapeutes, durant ces quinze dernières années, un terrain nouveau et bien ardu pour leurs recherches, car l'épithélioma de la langue fut peut-être la localisation la plus rebelle à l'action du rayonnement du Radium.

Il importe de savoir, en effet, que les divers épithéliomas réagissent de façon très différente à la radioactivité, selon leur texture histologique.

L'épithélioma baso-cellulaire est très radiosensible, tandis que l'épithélioma spino-cellulaire, dit aussi épithélioma épidermoïde ou à globes perlés, offre une très grande résistance à l'action du Radium. Au point de vue clinique, la langue présente deux variétés d'épithéliomas : l'épithélioma papillaire et l'épithélioma infiltrant.

Le premier forme sur la muqueuse de la langue une petite tumeur en chou-fleur ou en crête de coq ; il met quelques semaines avant d'infiltrer les mailles des fibres musculaires de la langue, et à partir de ce moment, il participe de toute l'extrême gravité de l'épithélioma infiltrant. Celui-ci, lorsqu'il débute d'emblée, se manifeste au fond d'une petite crevasse ou d'une petite ulcération parfois bien minuscule, mais qui se laisse facilement déceler par le toucher digital. Au point de vue histologique, l'épithélioma papillaire est toujours épidermoïde ; l'épithélioma infiltrant, le plus souvent. On ne s'étonnera pas, dès lors, que les efforts des radiumthérapeutes aient été si peu couronnés de succès.

Cependant, dans l'épithélioma papillaire, malgré sa texture radio-résistante, des succès ont été obtenus ; cela tient à la facilité relative avec laquelle il était possible de les irradier au moyen des doses considérables de Radium contenues dans les tubes de Dominici. Je donne à la fin de ma communication la relation de quelques cas cliniques de cette forme d'épithélioma traités avec succès par le Radium. Le traitement de l'épithélioma infiltrant a donné tant de déboires aux radiumthérapeutes qu'ils avaient fini par abandonner la partie, lorsque Janeway en Amérique, et Regaud à Paris mirent en pratique une nouvelle méthode d'application du Radium par la radiumpuncture, le premier au moyen de minuscules tubes en verre contenant de l'Émanation, le second au moyen de fines aiguilles en platine iridié, contenant du sel de Radium pur. C'est cette dernière méthode, plus pratique que la précédente, qui tend à se généraliser.

La partie de la langue infiltrée par le cancer, et une large zone périphérique apparemment saine sont farcies de ces petites aiguilles implantées dans les tissus parallèlement l'une à l'autre, fixées à la muqueuse au moyen d'un fil, et laissées en place pendant plusieurs jours, une dizaine souvent. Cette méthode a donné des résultats curatifs, mais ces résultats sont trop incertains, et pour ma part, j'ai depuis plusieurs années abandonné l'emploi du Radium dans le traitement du cancer de la langue. Il ne faut pas perdre de vue que le cancer doit être traité par une application unique de Radium ; que si cette application échoue, le néoplasme se reforme dans toute la périphérie de la zone irradiée, avec une vigueur nouvelle, comme s'il avait reçu un coup de fouet ; une attaque nouvelle par le Radium ne réussit plus, parce que la cellule néoplasique a acquis de l'accoutumance à l'égard du Radium, et est devenue radio-résistante.

Depuis plusieurs années je me suis appliqué à mettre en pratique l'électro-coagulation de Doyen dans le traitement du cancer qui a dépassé les limites de la radiumthérapie. Cette méthode est basée sur la propriété que possèdent les cellules cancéreuses d'être très sensibles à l'action de la chaleur : une température de 50° à 55° suffit à les détruire, tandis que les cellules normales de l'organisme supportent sans péril une température de 60°. Le procédé consiste dans l'emploi des courants de haute fréquence et de basse tension produits par une installation comprenant un transformateur, un condensateur d'Arsonval et un solénoïde. Le malade est placé dans le courant électrique : une grande plaque métallique de 25 centimètres de côté, enveloppée de 20 couches de gaze mouillée, constitue l'un des pôles sur lequel le malade repose par le siège ; l'autre pôle est manié par l'opérateur qui le tient par un manche isolant ; le bout métallique est de formes et de dimensions très variées. Les interventions par l'électro-coagulation nécessitent l'anesthésie chloroformique, et, chose curieuse, le réveil est très rapide ; les malades ne se sentent presque jamais incommodés par le chloroforme ; la plupart quittent l'institut le lendemain de l'opération, quelques-uns le jour même ; beaucoup d'opérés prennent leur repas dans l'après-midi. Les plaies sont indolores, à moins qu'un voisinage musculaire n'occasionne une gêne particulière. Un médecin américain, le D^r de Forest, a fait faire une électrode à lame de platine coupante, électrode à laquelle il a donné le nom de cautère froid, parce que cette électrode ne s'échauffe que lorsqu'elle est mise au contact des tissus. Au moyen du cautère froid, on sectionne des parties plus ou moins importantes de la langue cancéreuse, absolument comme avec le bistouri, mais avec cet avantage que la tranche sectionnée est en même temps électro-coagulée, ce qui supprime l'hémorragie capillaire. Lorsque la section à opérer est considérable, il est nécessaire de procéder au préalable à la ligature de l'artère linguale. L'escarre produite s'élimine dans la quinzaine. A la langue cette élimination doit être surveillée, à cause des hémorragies qui peuvent se produire au moment de la chute de l'escarre lorsque l'artère linguale n'a pas été liée. La cicatrisation se produit alors au bout de quelques jours. Lorsque l'intervention a lieu avant l'infection ganglionnaire, la guérison est la règle. Elle s'est produite dans les quelques cas cliniques que je relate, réserve faite pour ceux qui présentaient déjà de la métastase. J'ai eu l'occasion en 1913 de voir Doyen opérer un cancer de la langue accompagné de métastase unilatérale ; après l'électro-coagulation du cratère cancéreux de la langue, il procéda à l'évidement de la loge sous-maxillaire et à l'ablation des ganglions carotidiens infectés, puis les bords de la plaie étant maintenus par des aides au moyen de fils, la plaie fut remplie d'eau salée portée à une température préalable de 58° ; l'électrode métallique fut ensuite plongée dans le liquide pendant une dizaine de minutes, jusqu'à ce que la température de tous les recoins de la plaie eût atteint 60°.

Dans les cas habituels, lorsqu'il n'y a pas d'intervention chirurgicale simultanée, l'opération est de courte durée, quelques minutes, l'électrode est mise directement en contact avec la lésion, sinon il y aurait projection d'étincelles sur la plaie, avec formation d'une couche carbonisée, qui empêcherait la pénétration du courant électrique thermique. Cette méthode, très en vogue en Amérique et en Allemagne, n'a pas encore suffisamment retenu l'attention du corps médical chez nous ; je la crois cependant appelée à un grand avenir. Que l'on ne s'imagine pas qu'il s'agit ici d'une simple méthode de cautérisation, comme celle du thermo- ou du galvano-cautère ; il s'agit d'une méthode, non pas caustique, mais thermique ; les courants électriques qui passent au travers du corps de l'opéré sont à une température élevée ; c'est pourquoi il faut envelopper de nombreuses couches de gaze mouillée l'électrode sur laquelle le malade repose par le siège, précaution faute de laquelle on lui occasionnerait de graves brûlures. Le courant électrique thermique utilisé forme dans le corps de l'opéré un cône dont la base est à la large électrode du siège, et la pointe à la petite électrode maniée par le chirurgien et tenue au contact du cancer à coaguler ; c'est ici que les courants électriques viennent converger en un point unique qui est porté à une température de 100° ; sur un rayon de un centimètre ou de plusieurs centimètres selon la durée et l'intensité du courant, les tissus sont portés à une température de 70° qui les coagule, et les blanchit comme le blanc d'œuf cuit ; au delà de cette zone électro-coagulée les tissus sont portés à une température de 58° qui ne détruit pas les tissus sains, mais qui enlève toute vitalité aux cellules cancéreuses disséminées dans la zone portée à cette température.

CAS CLINIQUES

Voici d'abord quelques cas de leucoplasie que je choisis parmi les plus intéressants que j'ai eu l'occasion d'observer.

I. — *M^r N. L.*, 40 ans, aucun antécédent spécifique, examen du sang négatif, grand fumeur, est atteint depuis 6 ans d'une leucoplasie étendue sur la face supérieure et les bords de la langue ; sur le dos de la langue, particulièrement dans sa moitié gauche, la plaque est rugueuse et indurée. Deux spécialistes éminents, l'un dermatologue, l'autre chirurgien, furent consultés et conseillèrent une intervention chirurgicale qui fut refusée par le malade. Son médecin traitant, le Docteur Willocx, eut l'heureuse inspiration de lui faire faire une cure à Vichy, d'où il revint complètement transformé ; il ne lui restait plus sur le bord gauche de la langue qu'une place de l'étendue d'une pièce de 50 centimes en argent, et 2 autres petites taches punctiformes près de la pointe de la langue. Ces lésions furent traitées par le Radium en février 1911, 3 applications d'une heure. En mai 1914 une légère reprise me décide à faire encore 2 applications d'une heure. Depuis lors, la santé générale et locale est restée excellente. Voilà bien un cas typique de leucoplasie arthritique.

II. — *M^me^ B. D.*, 47 ans, examen du sang positif, est atteinte depuis 10 ans d'une plaque leucoplasique, qui, au moment du traitement avait 4 1/2 centimètres de long sur 12 millimètres de large ; elle siégeait sur le bord gauche de la langue, était dure, cornée et d'un blanc d'émail. Traitement en octobre 1911, 10 applications d'une heure ; en juillet 1912, encore 6 applications ; la guérison s'est maintenue. Je relate ce cas à cause de la rareté de l'affection chez la femme. Celle-ci ne fumait pas.

III. — *M^r^ A. A.*, 45 ans, aucun antécédent spécifique, mais grand fumeur. Les plaques leucoplasiques se sont fixées sur la partie antérieure de la langue, sur la lèvre inférieure, et sur les muqueuses des deux joues, au niveau des couronnes dentaires. Ce sont bien là les localisations des plaques blanches des fumeurs, fugaces, mais très tenaces, et se reproduisant avec la plus grande facilité. Malgré la suppression radicale du tabac, il fut nécessaire de revenir à la charge à différentes reprises, plusieurs années de suite. Le traitement fut commencé en juillet 1912, et actuellement le malade est encore en observation de loin en loin.

IV. — *M^r^ J. D.*, 65 ans, pas d'antécédent spécifique, mais fumeur, est porteur d'une plaque leucoplasique avec infiltration scléreuse de la langue. Il reçut en janvier 1913, six applications de Radium, d'une heure chacune. Toutes ces applications ont été faites au moyen d'appareils à sels collés, contenant 25 °/₀ de sels de Radium purs, avec filtre d'aluminium d'un demi-millimètre. Mais à partir de mars 1913, j'ai supprimé le filtre de mes appareils dans le traitement de la leucoplasie, et je n'ai eu qu'à m'en féliciter ; 3 applications d'une demi-heure suffisent généralement. C'est ce que je fis dans le cas du malade de l'observation présente en mars 1913 ; les applications ayant duré une heure, elles furent suivies d'une excoriation assez douloureuse de la partie traitée, mais la guérison s'est maintenue.

V. — *M^r^ E. V.*, 42 ans, pas d'antécédents spécifiques, fumeur, est atteint depuis 15 ans d'un eczéma généralisé à tout le corps ; la leucoplasie au moment où je vis le malade en mai 1919, avait débuté depuis 3 ans, et envahi toutes les muqueuses de la cavité buccale, la langue, le palais, le voile, la luette, les amygdales, les joues ; toutes ces plaques leucoplasiques avaient presque simultanément donné naissance à une dizaine de foyers épithéliomateux remplissant toute la cavité buccale ; la moitié gauche du cou était le siège d'une adénopathie volumineuse. Des cas de ce genre dépassent toutes les ressources de la thérapeutique. Je le relate, ainsi que les cas I, III et IV pour bien montrer que la syphilis n'est pas un facteur nécessaire dans l'étiologie de la leucoplasie et du cancer de la langue.

En raison de la rareté de la guérison dans l'épithélioma de la langue par le Radium, je donne ici une relation succincte de 4 cas guéris, au moins quant à leur localisation linguale.

I. — *Mr M. A.*, 50 ans, syphilitique, porte depuis 2 mois un épithélioma papillaire du bord droit de la langue, greffé sur une plaque leucoplasique ; on constate déjà de l'adénopathie de la région sous-maxillaire, et même de la région carotidienne. Six heures d'application de 20 milligrammes de sel de Radium pur en tubes de Dominici amènent la disparition de la manifestation linguale. Ce traitement fut fait en juillet 1910. Peu de temps après, le malade ayant quitté le pays, je n'ai plus pu obtenir de renseignements à son sujet. La métastase ganglionnaire n'a pas été traitée au Radium, et l'intervention opératoire refusée.

II. — *Mr E. D.*, 74 ans, porte au bord gauche de la langue, près de l'amygdale linguale, un épithélioma papillaire de 2 centimètres de diamètre ; sous l'angle du maxillaire, on sent une petite glande du volume d'une fève ; le malade fut traité en octobre 1910 de la même façon que le précédent ; un mois après, un second traitement fut encore appliqué ; la lésion linguale disparut complètement, et même la petite adénite rétrocéda spontanément, sans avoir été irradiée ; peut-être était-elle simplement inflammatoire. Cet homme déjà fort âgé mourut quelques mois après d'apoplexie cérébrale.

III. — *Mr O. C.*, 57 ans, vient me consulter en novembre 1914 ; il porte sur le bord droit de la langue une tache leucoplasique en contact avec un chicot dentaire ; le centre en est ulcéré et induré ; il s'agit cliniquement d'un épithélioma interstitiel au début. Même traitement que pour les cas précédents ; le traitement est renouvelé en février 1915 et en juin 1915, et suivi de la disparition de la lésion. Le malade ne présentait pas d'adénopathie.

IV. — *Mme H. L.*, 39 ans, n'a jamais fumé ; elle porte sur le bord droit de la langue à proximité du pilier antérieur, sur l'étendue d'une pièce d'un franc un épithélioma papillaire, sous forme de végétations rouges, grises et blanches par places, s'infiltrant dans la langue, ne saignant pas ; pas d'adénopathie. A déjà été opérée pour la même affection il y a 5 ans. Elle vient me trouver en mars 1919. En raison de la gravité du cas, je lui applique 25 milligrammes de sels purs en tubes de Dominici pendant 30 heures, et un second traitement de 15 heures en juin 1919. La guérison s'est maintenue.

Malgré ces quelques cas plus ou moins heureux, il en est un trop grand nombre où le Radium se montre impuissant ; c'est pourquoi je lui ai préféré dans le traitement du cancer de la langue l'électro-coagulation, qui donne des résultats plus rapides et plus certains, comme vous allez en juger par les quelques cas suivants :

I. — *M*r *V. P.*, 42 ans, m'est envoyé en septembre 1918 par le Dr Reynders. Il présente depuis 2 mois vers le milieu du bord gauche de la langue une ulcération de un centimètre de diamètre, à base indurée. Épithélioma infiltrant à globes perlés, avec adénopathie à l'angle de la mâchoire. Il fut d'abord traité au Radium, mais sans succès. En novembre 1918 fut faite une première séance d'électro-coagulation, mais celle-ci fut faite trop timidement, et avec une installation défectueuse. En décembre 1918, nouvelle séance d'électro-coagulation, encore insuffisante, faite dans les mêmes conditions que la première. Enfin, en janvier 1919, étant mieux outillé, je procède à l'exérèse au moyen du cautère froid, d'une tranche d'un centimètre de largeur sur 3 de longueur, après quoi la plaie est encore touchée au cautère électro-coagulant. La langue est restée guérie. Peu de temps après, il fut possible de procéder à l'exérèse du paquet ganglionnaire, en faisant suivre cette intervention de l'action de l'eau salée chauffée à 60° en y plongeant l'électrode d'après la méthode de Doyen. La repullulation se fit dans le cou ; le malade vécut encore un an.

II. — *M*r *P. B.*, 60 ans, m'est amené par le Dr Brecx en janvier 1920. Cet homme porte à la base de la langue à la région de l'amygdale linguale gauche une tumeur dure, du volume d'une châtaigne. Le début remonte au mois de juin 1919 ; la tumeur atteint le raphé médian de la langue. Le malade ne présente pas d'adénopathie ; son état général est bon ; mais, eu égard au siège de la tumeur, il éprouve une grande gêne pour parler et pour avaler. Je procédai sans retard à l'exérèse de cette tumeur par le cautère froid ; ce fut extrêmement laborieux, et ici l'opération ne fut pas faite en quelques minutes ; il fallait guider la lame d'après le toucher digital, sans voir, et sectionner millimètre par millimètre, en suivant sur tout son contour le tissu induré, arrêtant à tout moment le courant pour repérer la place et retirer le doigt. Cette opération dura deux heures. Les suites en furent absolument normales, sauf une hémorragie au douzième jour ; un gros caillot remplissait la bouche et un filet de sang s'écoulait de la commissure labiale. Mes dispositions furent prises pour parer à l'hémorragie, mais aussitôt le caillot retiré de la bouche, la plaie qui était maintenue largement ouverte par le caillot, se contracta, et tout saignement cessa immédiatement. Un mois après l'intervention au cautère froid, je constate encore l'existence de deux bourgeons néoplasiques ; s'étaient-ils formés depuis, ou bien avaient-ils échappé à la première intervention ? je l'ignore. Une retouche à l'électro-coagulation fut faite immédiatement, et depuis, la santé du malade ne laisse plus rien à désirer.

III. — *M*r *G. C.*, 33 ans, m'est adressé par le Dr Van Rossum, de Ruysbroeck. Cet homme, atteint de tuberculose pulmonaire à la période caverneuse, présente sur le bord droit de la langue une ulcération de 3 centimètres de long, à bords déchiquetés, et à fond induré. S'agissait-il d'un eulcération tuberculeuse ? c'est possible, mais on ne rencontrait sur la langue aucune autre lésion, en dehors de l'ulcération décrite ; le séro-diagnostic de la syphilis est négatif. Le bord ulcéré de la langue fut amputé au cautère froid en mars 1920 ; la plaie guérit sans incident, mais le malade succomba quelques mois plus tard à sa tuberculose. Je dois faire remarquer ici que les biopsies sont en réalité souvent difficiles à pratiquer dans les épithéliomas de la langue ; avant l'intervention, une section faite dans la tumeur peut compromettre le résultat, car en ouvrant les vaisseaux sanguins et lymphatiques, on facilite la dissémination des cellules néoplasiques vers les ganglions lymphatiques ; après l'intervention, la masse cancéreuse est souvent entièrement coagulée et ne convient plus à l'examen microscopique.

IV. — *M^r F. B.*, 62 ans, médecin, vient me consulter en août 1920. Fumant beaucoup, il est atteint depuis plusieurs années de leucoplasie linguale ; depuis 2 mois s'est formée sur la face inférieure droite de la langue une ulcération à fond induré caractéristique sur une longueur de 4 centimètres ; au haut de la région carotidienne se trouve un ganglion unique du volume d'une amande ; ce ganglion varie sensiblement de volume suivant les jours, et est sensible à la pression. La lésion linguale fut immédiatement traitée par l'électro-coagulation, et la langue resta parfaitement guérie. Quant à la petite adénite, mon confrère en refusa obstinément l'exérèse, et il se représenta quelques mois plus tard avec un sérieux paquet ganglionnaire, où je n'eus d'autre ressource que de pratiquer la radiumpuncture. Le malade succomba un an environ après l'intervention.

V. — *M^r L. C.*, 79 ans, m'est amené en mai 1921 par le D^r Cochaux ; il porte sur la face inférieure de la langue, entre le bord gauche et le frein, une ulcération indurée, ayant débuté il y a 2 mois, de 12 millimètres de long sur 6 de large ; elle fut enlevée au cautère froid, puis le fond de la plaie légèrement électro-coagulé. Une heure et demie après l'intervention, malgré une anesthésie chloroformique profonde, d'une durée d'un quart d'heure, le malade retourna à pied chez lui, à une distance de 1 kilomètre.

VI. — *J. H.*, 67 ans, m'est adressé en mai 1921 par le D^r Henri Huybreghs. Affection datant de trois mois, intéressant tout le bord gauche de la langue, depuis le tiers antérieur, jusqu'à l'amygdale linguale ; épithélioma papillaire en chou-fleur. Grâce à l'étendue de la lésion, une biopsie fut possible : épithélioma à globes perlés ; pas d'adénopathie ; l'état général est bon, quoique le sujet fût un alcoolique de vieille date. Au moment de l'exérèse par le cautère froid, les artères athéromateuses donnent une hémorragie abondante ; il fallut projeter sur la plaie l'étincelle carbonisante de la voltaïsation pour arrêter l'hémorragie ; la ligature de la linguale n'avait pas été faite, ce qui fut une erreur dans le cas présent, car dix jours après, au moment de la chute de l'escarre, l'hémorragie se renouvela ; elle fut traitée à l'hémostyl. La langue est restée parfaitement guérie ; le malade a succombé quelques mois plus tard à une affection pulmonaire.

VII. — *Mr L. V.*, 60 ans, m'est amené en août 1920 par son médecin, le Dr Meganck, le distingué chirurgien de l'hôpital de Ledeberg. Il porte sous le bord droit de la langue un petit épithélioma interstitiel du volume d'un gros pois. Exérèse au cautère froid. Guérison. Examen histologique : Épithélioma perlé.

VIII. = *Mr D. H.*, 74 ans, m'est adressé le 1r février dernier par le Dr Étienne Henrard. Sous le bord gauche de la langue existe une petite ulcération produite par un chicot dentaire et datant de quelques semaines seulement. Le fond en est induré. Traitement par l'électro-coagulation.

Conclusions : 1°) Il importe avant tout que le médecin dépiste le plus tôt possible les épithéliomas de la langue à leur début, et ne perde pas un seul jour à un traitement inutile ou nuisible, tel le traitement antisyphilitique. 2°) L'épithélioma de la langue, à sa première période, c'est-à-dire avant l'entreprise ganglionnaire, est curable. Son traitement de choix est l'électro-coagulation ou l'exérèse au cautère froid. 3°) L'adénopathie doit être opérée chirurgicalement et traitée simultanément par les Rayons X ou par le Radium. 4°) La leucoplasie linguale doit être traitée d'une façon très sérieuse. Son traitement de choix est le Radium.

M. le Dr Goris, président, croit devoir émettre quelques réserves sur certaines applications des méthodes que préconise M. Matagne. Il pense que toute leucoplasie vraie est d'origine spécifique ; les nombreux Bordet-Wasserman qu'il a fait faire dans les cas d'évolution carcinomateuse de leucoplasies linguales l'ont convaincu de cela. Il ne voit pas l'utilité du cautère froid pour l'ablation des tissus cancéreux, parce qu'il est possible, en suivant une bonne technique, d'enlever la moitié de la langue sans hémorragie et sans aucune ligature préalable. Il doute fort que l'action de coagulation thermique que provoque le cautère froid aille, précisément, tuer les cellules cancéreuses qui sont dans le voisinage : ceci est une pure vue de l'esprit, que l'anatomie pathologique n'a pas établie.

Quant aux métastases ganglionnaires, ni le Radium, ni les Rayons X n'ont, jusqu'ici, amené aucune guérison. Leur traitement est et reste purement chirurgical, mais pour être efficace, l'opération doit être extrêmement étendue.

M. le D^r L. Goedseels (Bruxelles) fait ressortir, dans les termes suivants, *l'Importance de l'alimentation aux points de vue hygiénique et thérapeutique.*

L'hygiène alimentaire est un facteur essentiel du développement et du fonctionnement normal de notre organisme.

La diététique alimentaire est un élément souvent capital de prophylaxie et de thérapeutique.

En pratique, l'on n'attache pas toujours à l'alimentation l'importance et l'attention qu'elle mérite. Le public ignore habituellement ce qu'il devrait connaître à ce sujet et, ce qu'il connaît, souvent il veut l'ignorer pour n'avoir pas à se contraindre.

Certaines théories et pratiques médicales, elles aussi, négligent l'hygiène et la diététique alimentaires, les laissent à l'arrière-plan ou les simplifient à l'excès. Les unes donnent aux médicaments un rôle exagéré et parfois exclusif. Les excès de cette méthode conduisent à une thérapeutique empirique et simpliste qui, sans rechercher ni traiter la cause, administre tel médicament pour tel symptôme. C'est ainsi que l'on a préconisé contre les dyspepsies les plus diverses, la chlorhydro-pepsine, le bicarbonate de soude, le bismuth ; les laxatifs et purgatifs dans toutes les constipations ; les opiacés, le bismuth dans les diarrhées d'origine les plus différentes. Presque toutes les spécialités, dont on nous importune, ne relèvent-elles pas de cet ordre d'idées ?

D'autres théories nous poussent d'emblée aux interventions chirurgicales. D'autres enfin, si elles se sont intéressées à l'hygiène et à la diététique alimentaires, se sont inspirées de vues trop théoriques, incomplètes ou erronées. Il y a quelques années, la viande rouge et saignante résumait toute l'hygiène alimentaire et même une partie de la thérapeutique. Depuis, est née la théorie des calories, qui prétendait en quelque sorte réduire le rôle de l'alimentation à une production d'énergie par les graisses, les hydrates de carbone et les albumines. Elle a créé par cette conception l'aliment condensé, et favorisé la production de l'aliment artificiel. Cette théorie a négligé l'action de l'aliment sur le tube digestif lui-même, et son rôle capital dans la fonction digestive. Elle n'a pas prévu l'importance ou l'existence d'éléments, sans valeur énergétique peut-être, mais indispensable à notre organisme. Elle a oublié l'influence toxique produite par l'abus de certains aliments.

Toutes ces théories ont le grand tort de négliger les lois intimes de la nature, parfois bien mystérieuses, il est vrai, et de vouloir guérir sans leur secours. Aussi s'aperçoit-on rapidement, lorsque l'on suit assidûment les résultats de semblables méthodes, que la nature se venge toujours, et parfois bien cruellement, d'être méconnue.

La médecine doit s'étudier à la lumière de la physiologie. C'est elle qui doit nous inspirer une règle normale de vie et, dans les états pathologiques, la thérapeutique tant médicale que chirurgicale à suivre.

Cette filiation de la médecine à la physiologie acquiert une importance primordiale en matière d'hygiène et de thérapeutique alimentaires. En effet, l'individu est appelé par l'alimentation, à une collaboration continue, directe, consciente et indispensable à la fonction digestive et partant au travail intime de la nutrition. Selon qu'il remplit bien ou mal son rôle, il favorise l'équilibre ou le déséquilibre de ces fonctions.

L'observation clinique confirme entièrement cette manière de voir. Elle nous montre de nombreux troubles organiques ou fonctionnels, déterminés par une mauvaise alimentation, ainsi que les heureux résultats de la diététique alimentaire en thérapeutique.

Les désordres provoqués par des fautes contre l'hygiène alimentaire, varient de forme, d'intensité, d'évolution suivant la nature des infractions, leur durée, leur gravité et l'âge du sujet.

Dans la première enfance, une alimentation défectueuse entraîne presque toujours des conséquences sérieuses. A cette période, l'enfant est un être délicat et fragile, sensible à tout écart et trop faible pour résister ou se relever facilement.

Si à l'âge adulte l'aliment est un élément d'entretien, dans la première enfance il est un principe d'édification pour l'organisme qui croît et se développe. De mauvais matériaux ou de bons matériaux mal agencés, ne laisseront qu'une œuvre peu viable qui, si elle résiste néanmoins, restera toujours imparfaite et caduque.

La mortalité infantile n'a pas de cause plus grande que la mauvaise hygiène alimentaire. Citons à ce propos le Pr Marfan qui dit, dans son traité de l'allaitement : « un des principaux moyens de diminuer la mortalité des enfants du premier âge, consiste à propager de saines notions sur l'allaitement ».

Inutile d'insister sur les affections digestives, principalement les entérites, et sur la débilité qui, à elles deux, favorisent les infections générales, si meurtrières à cet âge ; sur le rachitisme, la maladie de Barlow, le scorbut infantile, maladies dont l'origine alimentaire n'est plus discutée.

Dans la seconde enfance, nous connaissons des troubles analogues, des troubles de croissance liés à un sevrage trop précoce, à une alimentation non proportionnée à l'âge de l'enfant.

Nous retrouverons bien souvent au cours de l'adolescence et même à l'âge adulte, des troubles les plus variés, dus à ces erreurs alimentaires des premières années. Il en est ainsi de certains vices de conformation du squelette, et bien souvent aussi du déséquilibre du système nerveux, du système endocrinien et du système digestif.

A l'âge adulte, les manquements à l'hygiène alimentaire ont également leurs répercussions plus ou moins sérieuses, plus ou moins durables. Nous les retrouvons dans l'étiologie de maladies variées.

Parmi les affections aiguës ou suraiguës, signalons certaines dyspepsies, surtout les dyspepsies du type hypertonique, certains ulcères gastriques qui sont dus ou tout au moins favorisés par une alimentation trop copieuse, l'abus de boissons, la mastication insuffisante, l'irrégularité et la rapidité des repas.

Des affections chroniques telles que les gastrites chroniques, les constipations rebelles, la cirrhose de Laënce, la goutte, l'obésité, le diabète, l'artériosclérose, la néphrite chronique atrophique, reconnaissent souvent, comme cause capitale, les excès alimentaires répétés.

Il est toute une catégorie de sujets, à l'opposé de la précédente, qui souffrent d'une insuffisance alimentaire.

Certains malades atteints de troubles nerveux ou dyspeptiques, restreignent leur alimentation soit par crainte, soit par simple anorexie, soit par maintien trop prolongé d'un régime thérapeutique restrictif. Ces sujets présentent bientôt des dyspepsies atoniques et des troubles paradigestifs et nerveux, liés à l'inanition, et qui forment une véritable entité morbide.

Il existe d'autre part toute une série d'affections dues à l'absence dans l'alimentation d'une ou plusieurs substances encore mal définies et nécessaires à l'organisme. Ce sont les maladies par carence que certains auteurs groupent sous le nom d'avitaminoses. Il ressort des études faites à ce sujet, que l'aliment frais nous est nécessaire, parce qu'il contient des éléments non toujours définis en eux-mêmes ni dans leur action, les vitamines dans certains cas, qui sont indispensables à la vie.

Tous les états carencés bien connus, tels le scorbut, la pellagre, le béri-béri, le scorbut infantile, la maladie de Barlow, guérissent par l'administration, souvent en minime quantité, d'aliment frais.

L'étude de ces maladies un peu spéciales doit retenir notre attention, parce qu'elle nous montre l'importance de l'alimentation naturelle et les dangers d'une alimentation artificielle.

Ces théories nouvelles ne permettraient-elles pas de considérer, dans certains cas, les troubles nerveux généraux et sympathiques, les troubles des sécrétions internes, les troubles de la nutrition, comme des manifestations atténuées de carence ?

Cette incursion rapide dans la pathologie montre à l'évidence l'importance primordiale de l'hygiène alimentaire, puisque les erreurs en cette matière déterminent des troubles si nombreux, si variés et parfois si graves.

L'alimentation n'a pas une importance moindre en thérapeutique. Voyons tout d'abord la valeur du régime dans les affections digestives. C'est principalement depuis les admirables travaux de Soupault, d'Albert Mathieu et de ses élèves, que la médecine des voies digestives est devenue physiologique. Une part très grande a été faite à la thérapeutique alimentaire ; aussi pourrait-on redire ici très justement, avec Huchard : « depuis que l'on a fait de la thérapeutique sans médicaments, jamais l'on n'a eu tant de succès en thérapeutique ».

Le régime n'est-il pas le traitement essentiel des dyspepsies hyperchlorhydriques ? Les médicaments ne sont ici que de simples adjuvants, et la succession des régimes lacté, lacto-ovo-farineux, etc.. amène une guérison rapide. Le régime est aussi le principal traitement médical de l'ulcère. S'il ne guérit que dans les cas favorables d'ulcère simple, il reste néanmoins le complément indispensable de l'intervention chirurgicale.

Dans les dyspepsies purement fonctionnelles non hypertoniques, dans les atonies gastriques avec fausse dilatation, le rétablissement ou le maintien d'une alimentation abondante que l'on avait tendance à réduire, rétablit l'équilibre général et, partant, les fonctions digestives qui en sont tributaires.

Si la physiologie normale et pathologique de l'intestin demande des études complémentaires nombreuses, nos connaissances sont cependant suffisantes pour établir des indications thérapeutiques précises. C'est ainsi que la constipation commune obéit, le plus souvent, à un régime à albumines réduites et à corps gras et cellulosiques abondants, alors que les purgatifs entretiennent la constipation par irritation du côlon.

Il est encore plus illusoire de vouloir baser le traitement des diarrhées, dont les causes sont si diverses, sur une thérapeutique médicamenteuse symptomatique. Dans la fausse diarrhée par irritation de l'intestin par constipation, le régime des constipés guérira la diarrhée. Le régime végétarien arrêtera une diarrhée due à la putréfaction des albumines, de même qu'un régime sans hydrates de carbone sera le traitement de choix des diarrhées par fermentation.

Dans les maladies du foie, la nécessité d'une règle alimentaire ressort du rôle même de cet organe. Il reçoit en effet la totalité des produits de la digestion pour les épurer et les façonner avant de les livrer à l'organisme.

Mais ce n'est pas seulement dans le traitement des affections digestives que la diététique alimentaire prend une part si prédominante. L'alimentation ne demande-t-elle pas à être judicieusement réglée dans les maladies de la nutrition telles que la goutte, l'obésité, le diabète ?

Dans les affections rénales les médicaments restent au second plan, ce qui prime c'est le régime. L'alimentation doit réduire le travail du rein au strict minimum, éviter l'accumulation des éléments nocifs dans l'organisme, favoriser l'élimination des toxines. Dans la néphrite aiguë le régime lacté ou lacté mitigé est souvent question immédiate de vie ou de mort. Si la néphrite chronique n'exige pas habituellement une diététique aussi rigoureuse, le régime résume néanmoins presque toute la thérapeutique, et d'une façon impérieuse.

La thérapeutique alimentaire trouve encore des indications bien nettes dans le traitement médical de l'hypertrophie prostatique (n'est-ce pas un bon dîner qui provoque souvent une rétention aiguë ?), dans les cystites et dans les uréthrites.

Terminons cette énumération en signalant la participation du régime dans le traitement de la tuberculose, des maladies infectieuses aiguës, des maladies de cœur, de certaines affections cutanées.

Sans entrer dans le détail des régimes pré- et post- opératoires, qui varient d'après les circonstances, nous savons qu'ils sont parfois une condition indispensable de succès. C'est ainsi que l'acidose est un des grands dangers chez les opérés ; surtout quand leur fonction de désintoxication est déjà déficiente. Le choc opératoire, l'anesthésie suffisent quelquefois à rompre l'équilibre nécessaire. Il en est ainsi dans les affections chirurgicales du foie, où la fonction hépatique est profondément troublée et où un régime de quinze jours à trois semaines permettrait d'éviter des accidents mortels.

D'autre part une réalimentation rapide après une gastro-entérostomie ou une pylorectomie, suffira quelquefois à sauver un sujet qui se mourrait d'inanition par une sténose pylorique serrée, alors qu'un régime trop prudent n'eût pas permis au malade de se ressaisir.

Les faits que nous venons de passer en revue dans une énumération un peu rapide et forcément incomplète, sont bien connus de tous. Nous avons voulu les réunir afin qu'ils forment par leur ensemble une preuve indiscutable de l'importance du facteur alimentaire en médecine.

Durant ces dernières années la chimie médicale, la bactériologie et, dans un autre ordre d'idées, la chirurgie ont fait des progrès si retentissants et si réels, que nous sommes quelque peu éblouis par toutes les théories savantes, les techniques merveilleuses, d'autant plus que nous leur devons une grande part de nos succès thérapeutiques. Mais cette science ne résume pas toute la science médicale et, si nous voulons guérir et mieux encore prévenir, car c'est somme toute le but véritable et consolant de notre profession, nous devons consentir à descendre souvent de ces hauteurs idéales pour nous adonner à des études et à des pratiques plus matérielles, mais non moins scientifiques peut-être.

Si nous voulons faire vraiment œuvre sociale, comme c'est notre devoir, en nous efforçant de prévenir les maladies, si nous désirons réellement par charité, et par amour de la science, soulager et guérir les malades, nous devrons, à l'exemple d'illustres maîtres, faire large part à l'hygiène et à la thérapeutique alimentaires.

M. le Dr Fouarge corrobore les considérations de M. le Dr Goedseels par les observations suivantes :

Ce qui peut servir à illustrer de façon frappante les excellentes considérations de M. le Dr Goedseels, c'est la distribution géographique curieuse des maladies de la digestion, particulièrement des maladies chirurgicales. Chaque peuple a la maladie digestive que lui vaut sa diététique alimentaire ; les Anglo-Saxons sont sujets à l'ulcère du duodénum et du pylore ; c'est chez eux que sévit surtout la stase intestinale chronique, conséquence d'un régime national dont les résidus sont presque absents ; ils ont de la colite et de la péricolite. Les Russes, les habitants des pays baltes et balkaniques, grands consommateurs de cellulose, ont souvent du volvulus iliaque ; le méga-cæcum est fréquent chez eux. Les Normands, grands buveurs d'alcool, paient un lourd tribut au cancer gastrique, affection des civilisés inconnue des sauvages. L'invagination intestinale est l'apanage des peuples Danois mal alimentés. Par contre, chez les peuplades non civilisées où les conventions sociales n'obligent pas les individus à un entraînement intestinal restreint et fautif, la constipation est inconnue. Ces gens — nous ne parlons évidemment que de ceux qui sont indemnes de dysenterie chronique — ont trois à quatre selles par jour, correspondant probablement aux trois ou quatre grands mouvements péristaltiques quotidiens que l'on voit à l'écran radioscopique. Les Indiens, à l'intestin bourré de vers parasites, font des appendicites à oxyures, etc.

M. le Dr Houdmont (Bruxelles), expose *les méthodes d'exploration du système sympathique*.

L'étude anatomique, physiologique et clinique du système sympathique a souvent été envisagée jusqu'ici comme conditionnée par des méthodes d'exploration moins précises que celles qui servent d'exploration courante du système nerveux cérébro-spinal. Il semble cependant que la formule célèbre de Falta : « une conception du système sympathique n'est pas possible sans une note fortement personnelle » perde peu à peu de sa vérité et que l'examen du système nerveux de la vie végétative comprendra bientôt des moyens d'investigation objective précis, différents certes de la simple estimation clinique cherchant à reconnaître les syndromes connus de l'hypervagotonie, de l'hypersympathicotonie, ou de l'hyperneurotonie (Hess et Eppinger).

Un bref aperçu de cette sémiologie à tendances rigoureusement précises est l'objet de cette note. Elle se doit d'être précédée d'un rappel des notions anatomiques.

⁂

Il y a quelques années encore, *l'anatomie* du système sympathique se résumait pour la majorité des anatomistes dans la description confuse d'un amas de ganglions vertébraux ou viscéraux. Les recherches (des auteurs anglais surtout) ont permis de grouper ces amas ganglionnaires en amas distincts et de les rattacher anatomiquement et physiologiquement à des centres cérébro-spinaux. Schématiquement le système de la vie végétative se ramène à :

1°) *des centres encéphaliques* encore peu connus dont quelques-uns sont localisés dans les hémisphères mais dont les plus importants siègent sûrement dans le thalamus et la région sous-jacente aux tubercules quadrijumeaux ;

2°) *des centres bulbo-médullaires*, moteurs, situés dans les cornes antérieures de la moelle ou dans les noyaux homologues d'origine de certains nerfs craniens.

Les fibres émergentes de ces cellules motrices ont anatomiquement la caractéristique de s'être séparées en trois tronçons : *un cranial* ou système vague (système parasympathique) ; *un dorso-lombaire* (D_1 à L_2) ou sympathique vrai ; *un pelvien* enfin émergeant des portions terminales de la moelle.

Histologiquement les fibres émergentes sont des fibres blanches à myéline. Elles constituent les fondements des rameaux communicants blancs ;

3°) *des systèmes ganglionnaires,* à distribution anatomique fort compliquée, mais toujours en relation directe avec les trois segments dorso-lombaires. Ils comprennent les chaînes ganglionnaires paravertébrales, classiquement décrites de tout temps comme système sympathique ; aux mêmes systèmes se rattachent d'ailleurs nombre de ganglions périphériques sis le long des vaisseaux ou sur la paroi même des viscères. Au système cranial ressortissent les ganglions annexés à certains nerfs craniens ; au système pelvien ceux situés le long du nerf pelvien ;

4°) *des systèmes autonomes* cachés dans les tuniques mêmes des viscères. Le plus célèbre est le système autonome intracardiaque (faisceau neuro-musculaire ou f. de Hiss).

On connaît moins le système autonome intestinal : débutant au niveau des tuniques gastriques par un plexus sous-muqueux et un plexus intramusculaire (pl. de Meissner et pl. d'Auerbach) il se poursuit le long du grêle et du côlon affectant une disposition particulière, renforcée par endroits sous forme de véritables nœuds, dont j'ai décrit ailleurs la topographie (¹). Il n'est pas douteux que la mobilité intestinale ne dépende du fonctionnement de ce système autonome : bientôt sans doute pourra-t-on décrire avec précision des arythmies intestinales.

Moins connu encore est le système autonome de la vessie ;

5°) *un système sensitif,* sur lequel nous reviendrons plus loin et dont nous dirons seulement maintenant la caractéristique capitale :

(¹) *La stase intestinale chronique,* par Houdmont et Fouarge. ARCH. MÉD. BELGES, 1921.

c'est qu'il aborde la moelle par les mêmes voies que la sensibilité générale : les racines postérieures. Son relais médullaire siège dans la colonne de Clarke, origine du faisceau cérébelleux direct.

L'exposé de cette systématisation du sympathique serait incomplet sans la caractéristique histologique. A l'inverse du système de la vie de relation où toute fibre blanche issue de la corne antérieure gagne directement et sans relais l'organe périphérique qu'elle doit animer, les fibres blanches du système végétatif *s'articulent toujours dans un ganglion* (vertébral ou viscéral) avec une fibre nouvelle qui, elle, est toujours une fibre sans myéline — une fibre grise ou de Remak. Surtout, l'articulation de la fibre préganglionnaire, grâce aux nombreuses collatérales qu'elle abandonne sur son trajet, s'articule avec un grand nombre de fibres grises périphériques situées à des étages très différents ; *cette particularité anatomique est fondamentale* dans la compréhension des phénomènes sympathiques.

Après les caractéristiques anatomiques et histologiques, le fait fondamental physiologique, les trois segments ne sont pas homologues : l'un, le système thoraco-lombaire ou sympathique vrai est antagoniste fonctionnel des deux autres (cranial et pelvien) que l'on réunit sous la dénomination de système vague, ou encore parasympathique.

La Clinique enfin peut maintenant s'efforcer des grouper ces éléments en syndromes.

Ces syndromes, dans l'enseignement classique actuel sont volontiers réduits à ceux de vagotonie et de sympathicotonie. Nous croyons plus rationnel de les grouper autrement en :

1) syndromes périphériques
2) Syndromes centraux :
    a) cérébro-spinaux
    b) ganglionnaires
    c) segmentaires.

Nous laissons de côté volontairement — et pour cause — les syndromes qui seraient tributaires des systèmes autonomes.

I. *Les syndromes périphériques* sont les plus aisés à étudier et d'ailleurs les plus connus. Ils peuvent être ou moteurs ou sensitifs.

Les syndromes moteurs, consécutifs à des altérations périphériques, sont presque toujours des syndromes périphériques. Le plus connu est celui consécutif à la lésion du sympathique cervical. Qu'il s'agisse d'une section, d'une compression ou d'une altération inflammatoire (pleurite apicale de Sergent, par exemple), c'est le même syndrome de Claude Bernard-Horner qui se manifeste.

Une variété intéressante et non négligeable des syndromes périphériques est constituée par la causalgie de Weir-Mitchell. Son intérêt réside dans le mécanisme différent qui en commande la production : c'est en effet un trouble réflexe, commandé par une altération (presque toujours traumatique) des nerfs ou des os. Il importe cependant de ne pas confondre les causalgies avec les troubles parfois fort semblables, mais d'origine pithiatique, si bien décrits par Babinsky et Froment.

Les syndromes sensitifs consécutifs à la souffrance des fibres de la sensibilité sympathique sont plus curieux. On sait que ces fibres, inexcitables aux agents ordinaires, sensibles seulement à des agents particuliers (acides, bases, protéines anormales et surtout distension) ne donnent que fort rarement des sensations conscientes et se contentent habituellement d'être le point de départ de réflexes organiques. Mais lorsque l'organe où elles prennent origine s'enflamme ou se sclérose, la souffrance de la fibre sympathique est capable de se répercuter sur les fibres de la sensibilité générale. Que cette communication s'effectue au niveau du ganglion spinal, par l'intermédiaire des cellules de Dogiel, ou qu'elle se fasse par action de voisinage au sein même de la substance grise de la moelle et notamment de la colonne de Clarke, peu importe ici. Trois caractères principaux signent la douleur irradiée : a) *elle a les caractères d'une altération objective de la sensibilité profonde ;* elle présente un maximum limité à une faible zone et se soulage assez bien par la pression ; b) *elle a un caractère nettement métamérique,* et c'est ce caractère qui indique bien le fait de la répercussion du système sympathique sur la sensibilité générale, puisque à l'inverse de celle-ci, si nettement métamérique, la sensibilité sympathique a été tellement bouleversée par le développement embryologique qu'aucune métamérie n'y est plus reconnaissable. Ainsi y a-t-il un certain nombre de territoires cutanés, bien décrits par Head et Mackenzie, dont la souffrance éventuelle traduit en réalité, par irradiation, une souffrance viscérale. La douleur irradiée de l'angine de poitrine, la douleur de l'épaule dans les affections du foie, la douleur inguinale dans celles du rein sont les plus connues de ces répercussions. Un tableau très détaillé en a déjà pu être dressé (cf. p. ex. Déjerine : *Sémiologie du Système nerveux*). L'usage que font les cliniciens de la recherche de ces zones douloureuses irradiées est certainement trop réduit de nos jours. c) *elle a des répercussions trophiques* dans le domaine des nerfs moteurs cérébro-spinaux. Ces répercussions ont le même mécanisme et par conséquent le même caractère métamérique que les répercussions sensitives. Elles frappent soit directement les filets moteurs, entraînant de l'atrophie musculaire (p. ex., atrophies musculaires consécutives aux altérations du poumon), soit les fibres vaso-motrices.

Ainsi l'examen des troubles périphériques du système sympathique acquiert déjà quelque clarté, clarté qui s'accroîtra encore par la recherche des réflexes dont nous parlerons tout à l'heure.

II. *Les syndromes centraux,* qu'ils soient cérébro-spinaux, segmentaires ou ganglionnaires, participent du même caractère principal : à cause des collatérales nombreuses abandonnées par les fibres préganglionnaires avant leur articulation avec une fibre de Remak, à cause de la façon dont ces collatérales se dénivellent, il s'ensuit qu'il n'y a pas dans la projection périphérique de ces syndromes de topographie nettement reconnaissable. Toujours le syndrome est plus ou moins généralisé. C'est ce que André Thomas a assez bien exprimé par le mot de répercussivité. La « répercussivité » est, au point de vue topographique, la caractéristique des syndromes centraux.

a) *Les syndromes cérébro-spinaux* sont peu connus. Une observation récente de Dupostié rapporte cependant un cas d'ictus hémorragique auquel a succédé, après une courte période d'hémiplégie vulgaire, un syndrome d'hémiplégie sympathique. De telles observations sont rares. Elles sembleraient indiquer que, dans le cas d'altération cérébrale tout au moins, la répercussivité sympathique respecte la ligne médiane du corps et que les symptômes ne se croisent pas. Il en est certainement de même dans les syndromes d'origine médullaire.

b) *Les syndromes ganglionnaires* sont plus importants à connaître. Leur étiologie doit être ici précisée : il ne s'agit que rarement de troubles ganglionnaires fonctionnels. Presque toujours la maladie est causée par des *altérations anatomiques*, soit autonomes (Syphilis), soit propagées du voisinage (tumeur, foyers de périaortite abdominale englobant les ganglions solaires), soit encore consécutives à des poussées lymphangitiques remontées des organes mêmes innervés par ces portions nerveuses (névrite du plexus solaire consécutive à des altérations des parois intestinales, névrite du nerf pelvien dans les inflammations gynécologiques). De ces syndromes ganglionnaires, le plus anciennement cité est le syndrome du plexus cardiaque : il fut une des nombreuses pathogénies invoquées pour l'explication des angines de poitrine. Un autre syndrome plus fréquent et bien étudié depuis peu par Loeper est le syndrome solaire, désigné encore sous le nom de Cœlialgie. Le plexus solaire altéré est ainsi capable de modifier considérablement l'allure clinique d'une affection banale des voies digestives : d'abord par les troubles sécrétoires et moteurs qui s'y surajoutent; bien plus ensuite par les phénomènes de « répercussivité » sur les portions voisines du système (cardiaque respiratoire, vaso-motrice) ; aussi enfin par l'existence de douleurs cutanées réflexes irradiées, à caractère métamérique, dont nous avons tout à l'heure indiqué le mécanisme.

Bref, l'existence de tels syndromes ganglionnaires est importante à dépister, à cause de l'altération considérable que leur intervention inflige à la sémiologie d'affections banales.

c) *Les syndromes segmentaires* enfin sont ceux classiquement décrits sous le nom de vagotonie, hypersympathicotonie ou encore de neurotonie. La difficulté de l'étude précise résulte de l'intrication de leurs symptômes avec des symptômes d'origine endocrinienne : une inextricable confusion s'ensuit à chaque pas. Pourtant, s'il n'y a plus dans ce domaine de loi topographique reconnaissable, il y a cependant un certain nombre de réflexes qui permettent de tâter la sensibilité de l'un ou l'autre système, comme il y a aussi des épreuves pharmacodynamiques qui aident à en vérifier l'activité. C'est à eux surtout qu'il faudra s'adresser pour explorer les syndromes segmentaires, au lieu de s'en tenir, comme on le voit faire journellement, aux tableaux cliniques, brillants peut-être, mais confus et incertains.

Certains réflexes sont uniquement aptes à renseigner sur l'activité du sympathique vrai, ce sont les *réflexes sudoraux* et le *réflexe pilomoteur*. On sait, en effet, que la sécrétion sudorale et l'érection pilaire sont sous la seule influence de ce système. Le réflexe pilomoteur, surtout bien étudié par André Thomas, qui en a fait une étude quasi expérimentale sur de nombreux blessés atteints de section totale de la moelle, est précieux pour apprécier le tonus du sympathique vrai. On peut cependant lui reprocher la délicatesse de sa recherche.

Le réflexe de Ruggeri ou réflexe cardiaque à la convergence oculaire est également propre à renseigner sur le tonus du sympathique vrai : en faisant fixer par le sujet un point situé à 1 cm. en avant du nez, et cela par les deux yeux, on voit se produire dans les 30 secondes une accélération cardiaque dont l'intensité varie proportionnellement à l'activité fonctionnelle du système dorso-lombaire. Il va de soi que la production du réflexe est conditionnée par l'intégrité de ses voies : une névrite diphtérique frappant les accélérations cardiaques le supprimera naturellement. Sa valeur est donc liée à l'intégrité anatomique des conducteurs nerveux.

Il en est de même du *réflexe oculo-cardiaque*, ainsi que l'a longuement montré Mougeot. Mais ce réflexe, par la facilité de sa pratique et par le caractère de généralité qu'on peut lui démontrer, constitue vraiment le moyen par excellence d'exploration du système sympathique. Sa pratique est facile : il suffit d'exercer une impression rapide et forte sur les globes oculaires pendant 30 à 60 secondes et de noter de 15 en 15 secondes le chiffre des pulsations. Dans le cas de réflexe positif, celles-ci diminuent de 20 à 25 ; dans le cas de réflexe exagéré elles tombent de 40, 50, voire même s'arrêtent ainsi qu'il nous est arrivé deux fois. Le réflexe enfin peut être nul ou inverse. Pour plus de précision on peut pratiquer une compression instrumentale (oculo-compresseur pneumatique de Roubicuvitch ou compresseur à ressort de Barré).

Quelle que soit la manière dont on le pratique, les résultats du réflexe ne sont susceptibles d'être comparés entre eux que si l'on s'adresse à des sujets dans la même période physiologique. On sait, en effet, que les tonus du vague et du sympathique sont soumis à des oscillations nycthémérales (sommeil, digestion, fatigue, émotion). Il importe d'en tenir compte dans l'estimation des résultats du réflexe.

Mais ce qui fait comprendre la valeur du R. O. C., c'est l'étude de ses voies afférentes et efférentes. Ses voies centripètes sont les filets de la sensibilité générale (nerf V) et non les nerfs ciliaires comme l'a encore prétendu récemment Barré. En réalité même le nerf trijumeau n'est pas le seul qui soit capable de se réfléchir de la même façon sur le rythme cardiaque : presque tous les nerfs périphériques tiraillés ou comprimés, le plexus solaire comprimé, le tiraillement des anses intestinales, l'attouchement du Douglas sont autant d'excitations périphériques capables de produire le ralentissement cardiaque : la compression oculaire n'est donc en somme *qu'un mode facile d'excitation périphérique* destinée à se réfléchir sur le système végétatif. C'est un *mode particulier d'un phénomène général.*

La voie centrifuge du R. O. C. est normalement le vague : il vaudrait mieux dire : c'est le système qui a le plus fort tonus qui répond à l'excitation périphérique. Normalement ce tonus prédominant appartient au vague. Tout trouble de cette hiérarchie du tonus des deux systèmes est précieusement signalé par la réponse aux excitations périphériques, et notamment aux compressions oculaires.

Puisque le R. O. C. n'est qu'un cas particulier d'un réflexe général sensitivo-végétatif, la réponse cardiaque, cela va de soi, n'est pas la seule qu'on puisse rechercher.

Indépendamment de la dilatation cardiaque et de l'abaissement de la pression minima, dont on a voulu faire des réflexes spéciaux et qui ne sont que des conséquences de la bradycardie, il y a surtout un réflexe oculo-respiratoire extrêmement net ; un réflexe oculo-gastrique et un réflexe oculo-colique, précieux à pratiquer sous l'écran pour éclairer la valeur des troubles fonctionnels de ces viscères ; un réflexe oculo-glycosurique et oculo-polyurique, etc.

Bref, non seulement l'excitation, dans le R. O. C. n'est qu'un cas particulier d'un phénomène extrêmement général, mais les réponses sont à ce point généralisées qu'elles permettent *d'explorer le tonus végétatif de presque tous les viscères*. C'est pourquoi nous le considérons comme une des manières les plus fécondes d'exploration du système sympathique.

Les épreuves pharmacodynamiques sont également précieuses. Ce sont aussi la plupart du temps des épreuves agissant sur un système tout entier.

Ce sont des actions des plus classiques : Tout le monde sait que l'atropine en injection d'un milligr. paralyse les fonctions vagales ; de même l'inhalation de nitrite d'amyle (Josuë), épreuve plus rapide mais parfois moins sûre.

L'ésérine à dose suffisante est un vagotrope, tandis que l'adrénaline sert à tâter le tonus du sympathique vrai, grâce à sa fonction sympathicotrope : on sait l'usage qui en a été fait, en Amérique surtout, dans le diagnostic des états dénommés sous le nom de cœur irritable.

De ces épreuves pharmacodynamiques, il faut séparer une autre série d'épreuves qu'on confond parfois avec les précédentes : l'épreuve de Lœwy, la glycémie et la glycosmie provoquée, le test hypophysaire de Claude, etc. Ce ne sont plus là des moyens d'exploration du sympathique, mais surtout des signes d'intoxication thyroïdienne. Que ce nous soit une occasion de plus d'insister sur la nécessité de séparer, dans le diagnostic, les troubles du système végétatif d'avec les signes purs d'intoxication endocrinienne : la vérité et la clarté ne feront qu'y gagner.

De toutes les fonctions du système végétatif la tonicité vasculaire est certes la plus importante : qu'on me permette de signaler en terminant un signe objectif d'hypertonie du sympathique vrai : la pulsatilité artérielle exagérée. Cette pulsatilité artérielle se manifeste lors de la mesure de la pression artérielle par l'existence soit de supramaximales très résistantes, observées au Pachon, soit de bruits supramaximaux très prolongés, dans la méthode de Korokkow. Cette pulsatilité artérielle se manifeste encore, dans le cas de syndrome solaire, notamment par une pulsatilité aortique exagérée, signalée d'ailleurs comme une gêne par le malade. Bien que modeste, ce signe de la pulsatilité artérielle nous a été fréquemment précieux.

L'ensemble de ces moyens d'exploration du système sympathique n'a certes pas encore la précision de ceux employés dans l'exploration du système cérébro-spinal. Néanmoins ils apportent, par leur systématisation ébauchée, une contribution déjà importante à l'étude de ces troubles si fréquents, si variés et si fondamentaux sans doute en pathologie générale.

Nous croyons notamment que la localisation des syndromes — périphériques, ganglionnaires, segmentaires, cérébraux — d'une part, la pratique des réflexes et surtout du R. O. C. d'autre part, aidée accessoirement des épreuves pharmacodynamiques, constituent l'indispensable base à la pratique de thérapeutiques étrangères à l'empirisme brutal. L'avenir ne manquera pas de nous en offrir des moyens meilleurs encore.

Cinquième Section

M. Fernand Baudhuin présente une communication sur *La Belgique et les réparations*.

Cette étude se borne à préciser la position de la Belgique en face du problème des réparations, et ne touche aux principes généraux que pour établir son point de départ.

La capacité de payement de l'Allemagne soulève deux problèmes qui ont trop souvent été confondus. Il faut établir d'abord que l'Allemagne peut épargner de quoi satisfaire aux justes exigences des vainqueurs, et ce fut fait avec succès. Mais de nouvelles difficultés surviendront quand les Alliés voudront s'approprier cette épargne. Elle consiste en produits fabriqués, en immeubles, en travaux publics : comment les créanciers pourront-ils se les rendre utiles ? C'est le second problème.

L'auteur s'efforce de démontrer qu'une nation ne peut payer à l'étranger qu'en nature, en fournissant des produits ou des services. Un pays a cependant, normalement, une réserve de moyens de payement qu'il doit à son exportation passée. Cette réserve mise à part, l'Allemagne paiera par ses exportations futures ou elle ne payera pas.

Les facultés d'exportation de l'Allemagne ne paraissent pas pouvoir suffire à ses obligations. Les pays voulant être indemnisés le seront par l'acceptation de produits et de services allemands, ou ils recevront une partie seulement de leur créance. Il s'agit pour eux de régler ces prestations de façon à troubler aussi peu que possible leur commerce et leur industrie.

La Belgique se ferait livrer avec avantage, en plus du charbon, des engrais synthétiques et des produits chimiques. L'appoint serait déjà sérieux. Mais elle peut surtout faire exécuter par l'Allemagne une série de travaux publics qui ne pourraient l'être par ses propres forces.

La crise du logement serait résolue par la construction de cités à proximité des grandes villes. Le canal d'Anvers au Rhin, avec embranchement vers le nouveau bassin houiller, serait creusé par nos débiteurs ; l'achèvement du port d'Anvers et la mise au point de nos ports côtiers appelleraient la même solution. Enfin, au Congo, les réparations pourraient être consacrées à l'équipement de notre colonie, dont le développement menace d'être paralysé par l'insuffisance de nos moyens.

De tels travaux n'épuiseraient pas notre créance, même après le payement complet de notre priorité. L'avenir dira si le reste peut nous être versé en espèces, ou si nous serons forcés d'élargir le système des prestations.

L'auteur ne méconnaît pas l'obstacle que présente l'emploi de la main-d'œuvre allemande ; il indique le moyen d'en diminuer l'importance, et les raisons qui nous poussent à le négliger.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'Assemblée Générale s'est tenue à deux heures et demie sous la présidence de M. Armand Renier, premier Vice-Président.

Le Conseil propose à la Société de se procurer le bénéfice de la loi belge du 27 juin 1921 sur la personnification civile, et de s'ériger légalement en association sans but lucratif. A cet effet les statuts de la Société doivent subir quelques modifications. Un projet de statuts nouveaux de la Société scientifique, association sans but lucratif, a été communiqué à tous les membres dans la circulaire de convocation. M. Renier annonce, conformément à l'art. 16 des statuts, que le vote définitif sur cette question se fera dans la prochaine assemblée de Pâques, et prie les membres qui auraient des observations ou suggestions à faire concernant les propositions du Conseil, de les adresser par écrit au Secrétariat.

Il donne ensuite la parole à M. le Professeur D. Damas, Directeur de l'Institut Édouard Van Beneden à Liége. Le sujet de la conférence est un parallèle entre deux zoologistes : un savant allemand, Ernest Haeckel, et un savant belge, Édouard Van Beneden. Dans un contraste saisissant entre deux mentalités scientifiques, l'élève et digne successeur du zoologiste belge dans la chaire de l'Université de Liége met en relief la sincérité indispensable au savant qui mérite son nom. La conférence sera publiée dans la Revue des Questions scientifiques.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

La théorie des marées et le calcul des variations

PAR

M. Gaston Bertrand
Astronome à l'Observatoire d'Abbadia

L'objet de cette note est de ramener les équations des marées à un problème de calcul des variations. Dans le but de provoquer des recherches et de préparer l'application de la méthode de Ritz, H. Poincaré a donné une solution de la question, et il a été suivi dans cette voie par M. F. Jager (Thèse, Paris, 1916). Mais l'intégrale de Poincaré renferme des coefficients qui deviennent infinis à la *latitude critique*. Conséquemment, il n'est peut-être pas sans intérêt de chercher à éviter cette première difficulté.

1. *Les équations des Marées.* — D'après Poincaré (*Mécanique céleste*, t. III, *Théorie des Marées*, p. 142) et avec ses notations,

chaque oscillation contrainte harmonique complexe d'un bassin océanique est déterminée sur la carte par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} & k^2\left(\frac{\partial . hu}{\partial x}+\frac{\partial . h\nu}{\partial y}\right)=\zeta && (1)\\ & \zeta=\frac{\lambda^2\varphi-\pi''-Ce^{\lambda t}}{g} && (2)\\ & u-\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}v=\frac{\partial\varphi}{\partial x} && (3)\\ & \nu+\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}u=\frac{\partial\varphi}{\partial y} && (4)\end{aligned}\right.$$

Les fonctions inconnues sont u, ν, ζ et φ ; les unités sont choisies de manière que la densité de l'eau de mer et le rayon de la sphère terrestre soient égaux à l'unité ; x et y sont les coordonnées rectangulaires sur la carte de la molécule liquide M qui a pour colatitude θ et pour longitude ψ.

Le ds^2 de la sphère étant :

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2$$

le changement de variables

$$x = x(\theta, \psi) ; \quad y = y(\theta, \psi)$$

lui donne la forme :

$$ds^2 = \frac{1}{k^2}(dx^2 + dy^2),$$

de sorte que si l'on considère un petit vecteur MM_1 sur la sphère, son image sur la carte a pour longueur kMM_1.

g représente l'intensité de la pesanteur supposée constante.

ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

h est la profondeur de la mer au point M ; c'est une fonction *réelle* de x et y, ou de θ et ψ.

ζ, φ, u, ν, C, π'' sont des fonctions complexes de x et y.

$\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ est la *dénivellation* due à la marée.

$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ est une fonction auxiliaire inconnue.

Pour définir

$$u = u_1 + iu_2, \; \nu = \nu_1 + i\nu_2,$$

envisageons le déplacement MM_1 de la molécule liquide ; u et v sont, par définition, les composantes d'un déplacement fictif sur la carte, les composantes du déplacement réel MM_1 étant ku et kv. (On a fait ce choix pour que le flux soit le même sur la carte et sur la sphère.)

$\pi'' = \pi''_1 + i\pi''_2$ est le potentiel dû au bourrelet liquide lui-même ; c'est donc le potentiel d'une simple couche de densité $-\zeta$.

$$\pi''(x, y) = \iint \frac{-\zeta(x', y')dx'dy'}{k^2 r},$$

r étant la distance *dans l'espace,* des deux éléments représentés sur la carte par (x, y), (x', y'). L'intégrale est étendue à toute la surface des mers.

Le potentiel W, d'où dérive l'attraction des astres perturbateurs, est une fonction *réelle,* somme de termes périodiques :

$$W = \sum [A(x, y) \cos \mu t + B(x, y) \sin \mu t]$$

ce qu'on peut écrire :

$$W = \sum \left[\frac{A}{2}(e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}) + \frac{B}{2i}(e^{i\mu t} - e^{-i\mu t})\right]$$

$$= \sum \left[\frac{A - iB}{2} e^{i\mu t} + \frac{A + iB}{2} e^{-i\mu t}\right].$$

D'où, en désignant par C et C' les deux fonctions imaginaires conjuguées $\frac{A - iB}{2}$, $\frac{A + iB}{2}$, et en posant

$$\lambda = i\mu,$$

on a :

$$W = \sum \left[Ce^{\lambda t} + C'e^{-\lambda t}\right].$$

Ces différents termes constituent les composantes harmoniques complexes du potentiel ; les équations étant linéaires, on pourra envisager séparément chaque composante, à laquelle correspondra pour la marée une *oscillation contrainte isochrone complexe,* ayant pour période $T = \frac{2i\pi}{\lambda}$.

Ce mode de décomposition du potentiel simplifie notablement les équations ; il donne aux fonctions ζ, φ, u, v, π'' une forme complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire représentent les solutions physiquement utilisables.

2. *Conditions aux limites.* — Il faut distinguer trois cas.

A. — Le bord de la mer forme une plage. On a donc, le long de ce bord, $h(x, y) = 0$; et les fonctions u, v, ne sont assujetties qu'à la condition de rester finies.

B. — Le bord de la mer est constitué par une falaise verticale. Le déplacement de la molécule liquide devra alors être tangent à la falaise.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$udy - vdx = 0.$$

C. — *Cas général.* — On a donc constamment au bord :

$$hudy - kvdx = 0. \qquad (5)$$

3. *Latitude critique.* — La première méthode consiste à éliminer u et v entre les équations (3) et (4). On en tire :

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\cos^2\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \\ v &= \frac{1}{1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\cos^2\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \end{aligned}\right.$$

Cette résolution n'est pas possible si l'on a :

$$1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\cos^2\theta = 0.$$

Or, λ étant purement imaginaire, posons $\lambda = i\mu$, d'où :

$$1 - \frac{4\omega^2}{\mu^2}\cos^2\theta = 0.$$

Il y a donc une difficulté si l'équation

$$\cos\theta = \pm\frac{\mu}{2\omega} = \pm\frac{i\lambda}{2\upsilon}$$

a une ou plusieurs racines dans le bassin considéré. Ces racines déterminent ce qu'on a appelé *la latitude critique.*

Pour les marées semi-diurnes, μ égale environ 2ω, la latitude critique, si elle existe, est voisine des pôles.

Pour les marées diurnes. μ égale environ ω, on a $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$, $\theta = \pm 60^\circ$, la latitude critique est d'environ $\pm 30^\circ$.

Pour les marées à plus longue période, la latitude critique se rapproche de l'équateur.

4. *L'intégrale de Poincaré.* — En posant :

$$h_1 = \frac{\lambda^2 h}{\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\theta}, \qquad \eta = \frac{-2i\omega\lambda h\cos\theta}{\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\theta},$$

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2, \quad \pi'' = \pi''_1 + i\pi''_2, \quad Ce^{\lambda t} = W_1 + iW_2.$$

Poincaré a ramené la détermination des 4 fonctions inconnues φ_1, φ_2, ζ_1, ζ_2, à l'annulation de la variation première de l'intégrale

$$J = \iint -\frac{h_1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$+\iint \eta\frac{D(\varphi_2, \varphi_1)}{D(x, y)}dxdy + \iint\left[-\frac{\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2}{k^2} + \frac{g(\zeta^2_1 + \zeta^2_2)}{2\lambda^2 k^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\zeta_1\pi''_1 + \zeta_2\pi''_2}{2\lambda^2 k^2} + \frac{\zeta_1 W_1 + \zeta_2 W_2}{\lambda^2 k^2}\right]dxdy$$

Cette intéressante intégrale renferme h_1 et η qui deviennent infinis à la latitude critique. Il y a donc lieu de la transformer. C'est ce qu'on va faire en conservant u et v.

5. *L'intégrale J.* — Je reprends les équations générales (1, 2, 3, 4).

Avec la condition au bord (5) :

$$hudy - hvdx = 0.$$

Je reviens au domaine réel en posant :

$$\lambda = i\mu, \quad u = u_1 + iu_2, \quad \nu = \nu_1 + i\nu_2, \quad \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$$

$$\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2, \quad \pi'' = \pi''_1 + i\pi''_2, \quad Ce^{\lambda t} = W_1 + iW_2.$$

Les équations *u* se dédoublent et donnent le système :

$$u_1 + \frac{2\omega \cos\theta}{\mu}\nu_2 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0 \qquad u_2 - \frac{2\omega \cos\theta}{\mu}\nu_1 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0$$

$$\nu_1 = \frac{2\omega \cos\theta}{\mu}u_2 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0 \qquad \nu_2 + \frac{2\omega \cos\theta}{\mu}u_1 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial.hu_1}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_1}{\partial y} - \frac{\zeta_2}{k^2} = 0 \qquad \frac{\partial.hu_2}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_2}{\partial y} - \frac{\zeta_2}{k^2} = 0$$

$$-\frac{\varphi_2}{k^2} - \frac{g\zeta_1}{\mu^2k^2} - \frac{W_1}{\mu^2k^2} - \frac{\pi''_1}{\mu^2k^2} = 0 \qquad -\frac{\varphi_2}{k^2} - \frac{g\zeta_2}{\mu^2k^2} - \frac{W_2}{\mu^2k^2} - \frac{\pi''_2}{\mu^2k^2} = 0$$

Et la condition au bord devient :

$$hu_1dy - h\nu_1dx = 0 \qquad hu_2dy - h\nu_2dx = 0$$

Je donne à u_1, u_2, ν_1, ν_2, de petites variations δu_1, δu_2, $\delta\nu_1$, $\delta\nu_2$, respectant les conditions au bord, à φ_1, φ_2 ζ_1, ζ_2 les variations $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\zeta_1$, $\delta\zeta_2$; je multiplie les équations respectivement par $h\delta u_1$, $h\delta u_2$, $h\delta\nu_1$, $h\delta\nu_2$, puis par $dxdy$ et j'intègre sur toute la surface B de la carte du bassin océanique considéré.

J'ai d'abord :

$$\iint_B h(u_1\delta u_1 + u_2\delta u_2 + \nu_1\delta\nu_1 + \nu_2\delta\nu_2)\, dxdy$$

qui peut s'écrire :

$$\delta\iint_B \frac{h}{2}(u_1^2 + u_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2)\, dxdy.$$

Puis :

$$\iint_B \frac{2\omega\cos\theta}{\mu} h\,(\nu_2\delta u_1 - \nu_1\delta u_2 - u_2\delta\nu_1 + u_1\delta\nu_2)\, dxdy$$

qui s'écrit :

$$\delta\iint_{\mathrm{B}} \frac{2\omega\cos\theta}{\mu}\, h\,(u_1\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1 u_2)\,dxdy.$$

Vient ensuite :

$$-\iint_{\mathrm{B}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}h\delta u_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}h\delta u_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}h\delta\mathrm{v}_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}h\delta\mathrm{v}_2\right)dxdy$$

qui, par l'application des formules de Green :

$$\iint_{\mathrm{B}} \mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\,dxdy = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{PQ}dy - \iint_{\mathrm{B}} \mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\,dxdy$$

$$\iint_{\mathrm{B}} \mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\,dxdy = -\int_{\mathrm{C}} \mathrm{PQ}dy - \iint_{\mathrm{B}} \mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\,dxdy,$$

se dédouble en deux intégrales :

$$\int_{\mathrm{C}} \varphi_1\,(h\delta\mathrm{v}_1 dx - h\delta u_1 dy) + \varphi_2\,(h\delta\mathrm{v}_2 dx - h\delta u_2 dy)$$

$$+\iint_{\mathrm{B}}\left[\varphi_1\left(\frac{\partial.h\delta u_1}{\partial x} + \frac{\partial.h\delta\mathrm{v}_1}{\partial y}\right) + \varphi_2\left(\frac{\partial.h\delta u_2}{\partial x} + \frac{\partial.h\delta\mathrm{v}_2}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

L'intégrale simple est nulle puisque les variations δu_1, δu_2, $\delta\mathrm{v}_1$, $\delta\mathrm{v}_2$ respectent les conditions au bord. On a ensuite :

$$\iint_{\mathrm{B}}\left[\left(\frac{\partial.hu_1}{\partial x} + \frac{\partial.h\mathrm{v}_1}{\partial y}\right)\delta\varphi_1 + \left(\frac{\partial.hu_2}{\partial x} + \frac{\partial.h\mathrm{v}_2}{\partial y}\right)\delta\varphi_2\right]dxdy.$$

La somme des deux dernières intégrales doubles forme une variation exacte, à savoir :

$$\delta\iint_{\mathrm{B}}\left[\varphi_1\left(\frac{\partial.hu_1}{\partial x} + \frac{\partial.h\mathrm{v}_1}{\partial y}\right) + \varphi_2\left(\frac{\partial.hu_2}{\partial x} + \frac{\partial.h\mathrm{v}_2}{\partial y}\right)\right]dxdy.$$

Puis on a :

$$-\iint_{\mathrm{B}}\frac{1}{k^2}\,(\zeta_1\delta\varphi_1 + \zeta_2\delta\varphi_2 + \varphi_1\delta\zeta_1 + \varphi_2\delta\zeta_2)\,dxdy =$$

$$-\,\delta\iint_{\mathrm{B}}\frac{\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2}{k^2}\,dxdy,$$

$$-\iint_{B}\frac{g}{\mu^2k^2}(\zeta_1\delta\zeta_1+\zeta_2\delta\zeta_2)\,dxdy=-\delta\iint_{B}\frac{g}{2\mu^2k^2}(\zeta_1{}^2+\zeta_2{}^2)\,dxdy,$$

$$-\iint_{B}\frac{W_1\delta\zeta_1+W_2\delta\zeta_2}{\mu^2k^2}\,dxdy=-\delta\iint_{B}\frac{W_1\zeta_1+W_2\zeta_2}{\mu^2k^2}\,dxdy.$$

Et il reste :

$$-\iint_{B}\frac{\pi''_1\delta\zeta_1+\pi''_2\delta\zeta_2}{\mu^2k^2}\,dxdy.$$

Or l'on a pour toute la surface des mers :

$$\pi''(x,\,y)=-\iint_{M}\frac{\zeta(x',\,y')\,dx'dy'}{k^2(x',\,y')\,r\,(x,y;\,x',\,y')}$$

On en déduit pour le bassin lui-même :

$$\pi''_1(x,\,y)=-\iint_{B}\frac{\zeta_1(x',\,y')\,dx'dy'}{k^2(x',\,y')\,r\,(x,y;\,x',\,y')}$$

$$\delta\pi''_1(x,\,y)=-\iint_{B}\frac{\delta\zeta_2(x',\,y')\,dx'dy'}{k_2(x',y')\,r\,(x,\,y;\,x',y')}$$

$$\iint_{B}\frac{\zeta_1\delta\pi''_1}{k^2}\,dxdy=-\iint_{B}\frac{\zeta_1(x,\,y)\,dxdy}{k^2(x,\,y)}\iint_{B}\frac{\delta\zeta_1(x',\,y')\,dx'dy}{k^2(x',\,y')\,r\,(x,\,y;\,x',\,y')}$$

D'autre part on a :

$$\iint_{B}\frac{\pi''_1\delta\zeta_1}{k^2}dxdy=-\iint_{B}\frac{\delta\zeta_1(x,\,y)dxdy}{k^2(x,\,y)}\iint_{B}\frac{\zeta_1(x',\,y')dxdy}{k^2(x',\,y')r(x,\,y;\,x',\,y')}.$$

Les deux intégrales quadruples sont égales, par suite :

$$\iint_{B}\frac{\pi''_1\delta\zeta_1}{k^2}dxdy=\iint_{B}\frac{\zeta_1\delta\pi''_1}{k^2}dxdy=\frac{1}{2}\iint_{B}\frac{\pi''_1\delta\zeta_1+\zeta_1\delta\pi''_1}{k^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\delta\iint\frac{\pi_1\zeta_1}{k^2}dxdy.$$

La dernière intégrale considérée est égale à :

$$-\delta\iint_{B}\frac{\pi_1\zeta_1+\pi_2\zeta_2}{2\mu^2k^2}dxdy.$$

Rassemblant tous ces résultats, on voit que les 10 équations de départ ont pour conséquence :

$$\delta J' = 0,$$

$$J' = \iint_B \frac{h}{2}\left[u^2_1 + u^2_2 + \nu^2_1 + \nu^2_2 + \frac{4\omega\cos\theta}{\mu}(u_1\nu_2 - \nu_1 u_2)\right]dxdy$$

$$+\iint_B\left[\varphi_1\left(\frac{\partial.hu_1}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_1}{\partial y}\right) + \varphi_2\left(\frac{\partial.hu_2}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_2}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$-\iint_B\left[\frac{\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2}{k^2} + \frac{g(\zeta^2_1 + \zeta^2_2)}{2k^2\mu^2} + \frac{\pi''_1\zeta_1 + \pi''_2\zeta_2}{2k^2\mu^2}\right.$$

$$\left. + \frac{W_1\zeta_1 + W_2\zeta_2}{k^2\mu^2}\right]dxdy.$$

Réciproquement. — Dans le champ fonctionnel u_1, ν_1, u_2, ν_2, ζ_1, ζ_1, φ_2, φ_2, où u_1, ν_1, u_2, ν_2 satisfont aux conditions au bord, si l'on cherche le système de fonctions qui annule $\delta J'$, variation première de J', on trouve que ces fonctions sont déterminées par les 8 équations indéfinies qui ont servi de point de départ.

6. *L'intégrale J''.* — Dans une première approximation on peut négliger π'', ce qui conduit à éliminer φ et ζ. On a alors :

$$\varphi_1 = -\frac{g\zeta_1}{\mu^2} - \frac{W_1}{\mu^2} = -\frac{gk^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial.hu_1}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_1}{\partial y}\right) - \frac{W_1}{\mu^2}$$

$$\varphi_2 = -\frac{g\zeta^2}{\mu^2} - \frac{W_2}{\mu^2} = -\frac{gk^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial.hu_2}{\partial x} + \frac{\partial.hv_2}{\partial y}\right) - \frac{W_2}{\mu^2}.$$

D'où les équations indéfinies qui régissent u et ν :

$$u_1 + \frac{2\omega\cos\theta}{\mu}\nu_2 + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{gk^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial.hu_1}{\partial x} + \frac{\partial.h\upsilon_1}{\partial y}\right) + \frac{W_1}{\mu^2}\right] = 0$$

$$u_2 - \frac{2\omega\cos\theta}{\mu}\nu_1 + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{gk^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial.hu_2}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_2}{\partial y}\right) + \frac{W_2}{\mu^2}\right] = 0$$

$$\nu_1 - \frac{2\omega\cos\theta}{\mu}u_2 + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{gk^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial.hu_1}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_1}{\partial y}\right) + \frac{W_1}{\mu^2}\right] = 0$$

$$\nu_2 + \frac{2\omega\cos\theta}{\mu}u_1 + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{gk^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial.hu_2}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_2}{\partial y}\right) + \frac{W_2}{\mu^2}\right] = 0$$

En opérant comme précédemment on trouve :

$$\delta J'' = 0$$

$$J'' = \iint_B \frac{h}{2}\left[u_1^2 + u_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 + \frac{4\omega\cos\theta}{\mu}(u_1\nu_2 - u_2\nu_1)\right]dxdy$$

$$-\iint_B \frac{gk^2}{2\mu^2}\left[\left(\frac{\partial.hu_1}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial.hu_2}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_2}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$-\iint_B \left[\frac{W_1}{\mu^2}\left(\frac{\partial.hu_1}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu_1}{\partial y}\right) + \frac{W_2}{\mu^2}\left(\frac{\partial.hu_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial.h\nu_2}{\partial y}\Big)\right]dxdy$$

Cette intégrale ne contient plus que 4 fonctions inconnues.

7. *L'intégrale J' sur la sphère.* — Il est aisé de transformer ces équations en revenant de la carte à la sphère elle-même. Soient U et V les composantes du déplacement sur le méridien et sur le parallèle. On a, d'après ce qui précède :

$$ku_1 = U_1, \qquad ku_2 = U_2, \qquad k\nu_1 = V_1, \qquad k\nu_2 = V_2$$

$$\frac{dxdy}{k^2} = \sin\theta d\theta d\psi.$$

J'envisage maintenant un élément ds' de la courbe (Γ) sur la sphère, et l'élément correspondant ds de son image (C) sur la carte, $ds = kds'$; les angles étant conservés, le flux sur la carte du vecteur u, ν est égal au flux sur la sphère du vecteur U, V ; d'où l'égalité :

$$\int_C h\nu dx - hudy = \int_\Gamma hVd\theta - hU\sin\theta d\psi$$

Ce qui, transformé par la formule de Green, donne :

$$\iint_B \left(\frac{\partial.hu}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{B'}\left(\frac{\partial.h\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial hV}{\partial\psi}\right)d\psi d\theta,$$

en désignant par B et B' les bassins correspondants de la carte et de la sphère. Dans la première intégrale, je passe des variables (x, y) aux variables (θ, ψ) ; il vient :

$$\iint_{B'} k^2\left(\frac{\partial.hu}{\partial x} + \frac{\partial.h\nu}{\partial y}\right)\sin\theta d\theta d\psi$$

$$= \iint_{B'} \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial . hU \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial . hV}{\partial\psi}\right) \sin\theta d\theta d\psi.$$

Ce fait, ayant lieu quel que soit B′, entraîne la relation :

$$k^2\left(\frac{\partial . hu}{\partial x} + \frac{\partial . hv}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial . hV \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial . hV}{\partial\psi}\right).$$

Portant cette valeur, ainsi que celle de *dxdy*, dans l'intégrale J′, celle-ci prend la forme :

$$J'_2 = \iint_{B'} \frac{h}{2}\left[U^2_1 + U^2_2 + V^2_1 + V^2_2 + \frac{4\omega\cos\theta}{\mu}(U_1V_2 - V_1U_2)\right] \sin\theta d\theta d\psi$$

$$+ \iint_{B'} \left[\varphi_1\left(\frac{\partial . hU_1 \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial . hV_1}{\partial\psi}\right) + \varphi_2\left(\frac{\partial . hV_2 \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial . hV_2}{\partial\psi}\right)\right] d\theta d\psi$$

$$- \iint_{B'} \left[\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2 + \frac{g}{2\mu^2}(\zeta_2^2 + \zeta_2^2) + \frac{\pi_1''\zeta_1 + \pi_2''\zeta_2}{2\mu^2}\right.$$

$$\left. + \frac{W_1\zeta_1 + W_2\zeta_2}{\mu^2}\right] \sin\theta d\theta d\varphi.$$

8. *Conclusion.* — Cette formule ne contient plus aucun élément susceptible de devenir infini ; elle est donc tout à fait adaptée à l'application formelle de *la méthode de Ritz*.

Dans le cas où le bassin océanique se termine de tout côté par une plage, il n'y a pas à se préoccuper de conditions aux limites. On pourra, par exemple, développer les 8 fonctions inconnues en série de fonctions sphériques ; et cela permettra facilement de tenir compte de l'attraction du bourrelet.

En effet (H. Poincaré, *loc. cit.*, p. 51) le bourrelet forme sur la sphère une couche infiniment mince de densité $-\zeta$. π'' étant le potentiel de cette simple couche, on a, d'après un élégant théorème :

$$-4\pi\zeta = \lim_{r=1}\left(2r\frac{\partial\pi''}{\partial r} + \pi''\right).$$

Décomposons en série de fonctions sphériques, ζ sur la sphère et π'' en son intérieur :

$$\zeta = \Sigma A^n X_n$$
$$\pi'' = \Sigma B_n r^n X_n$$

La relation précédente donne :

$$B_n = -\frac{4\pi A_n}{2n+1}$$

Et l'on pourra traiter le problème dans toute sa généralité.

Contributions à la géométrie du triangle et du tétraèdre

PAR

V. THÉBAULT

I. CERCLES REMARQUABLES DU TRIANGLE

La question 2006 (Mathesis, 1915, p. 32), dans laquelle M. Neuberg signale quatre sphères remarquables du tétraèdre, nous a suggéré l'étude de trois circonférences analogues dans le triangle.

1. Étant donné un triangle ABC, proposons-nous de construire trois circonférences égales entre elles, se coupant au même point et tangentes, chacune, à deux côtés du triangle.

Soient ω_a, ω_b, ω_c les centres des trois circonférences, supposées d'abord intérieures au triangle, S leur point commun. Les rayons étant égaux, le triangle $\omega_a\omega_b\omega_c$ est directement homothétique au triangle ABC, le centre d'homothétie étant le centre I du cercle inscrit à ABC ; S est le centre de son cercle circonscrit. Ce point est situé visiblement sur la droite IO des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC. Par suite, si α, β, γ désignent les seconds points d'intersection de ω_b et ω_c, ω_c et ω_a, ω_a et ω_b,

$$\text{angle } \omega_b\alpha\omega_c = \text{angle } \omega_b S\omega_c = 2A,$$

$$\text{angle } \omega_c\beta\omega_a = 2B \text{ ; angle } \omega_a\gamma\omega_b = 2C,$$

et *les circonférences* ω_a, ω_b, ω_c *se coupent deux à deux sous les angles* 2A, 2B, 2C, A, B, C *étant les angles du triangle* ABC.

S et O étant des points homologues des triangles $\omega_a\omega_b\omega_c$ et ABC, $S\omega_a$ est parallèle à OA, et si l'on mène Im, $\omega_a n$ perpendiculaires à AB, on a :

$$\frac{S\omega_a}{OA} = \frac{I\omega_a}{IA} = \frac{Im \pm \omega_a n}{Im} = \frac{r \pm \rho}{r} ;$$

d'où
$$\frac{\rho}{R} = \frac{r \pm \rho}{r}, \quad \rho = \frac{Rr}{R \pm r}, \tag{1}$$
relation remarquable entre les rayons r, R des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC et le rayon ρ des cercles ω_a, ω_b, ω_c. Les signes ± correspondent aux cas où les centres des circonférences ω_a, ω_b, ω_c sont intérieurs ou extérieurs au triangle ABC.

La relation (1), qui peut s'écrire
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \pm \frac{1}{R},$$
indique nettement la position du point commun aux trois cercles : S *est l'un des centres de similitude des cercles inscrit et circonscrit au triangle* ABC.

2. On rencontre aussi les résultats précédents en prenant comme hypothèse les seules conditions que les circonférences ω_a, ω_b, ω_c touchent deux côtés du triangle et se coupent respectivement sous les angles 2A, 2B, 2C.

Désignons en effet par x, y, z les rayons des circonférences ω_a, ω_b, ω_c, que nous supposons *intérieures* à ABC, par X et X′, Y et Y′, Z et Z′ leurs contacts respectifs sur BC, CA, AB. On a, par exemple,
$$\overline{XX'}^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos 2A - (y-z)^2 = 4yz\sin^2 A\,;$$
d'où l'on conclut :
$$\overline{XX'} = 2\sqrt{yz}\,.\sin A, \quad \overline{YY'} = 2\sqrt{zx}\,.\sin B, \quad \overline{ZZ'}^2 = 2\sqrt{xy}\,.\sin C.$$

Or, en grandeur et en signe,
$$\overline{XX'} = a - y\cot\frac{B}{2} - z\cot\frac{C}{2} = 2R\sin A - y\cot\frac{B}{2} - z\cot\frac{C}{2},$$
et x, y, z sont déterminés par le système
$$x\cot\frac{A}{2} + y\cot\frac{B}{2} + 2\sqrt{xy}\sin C - 2R\sin C = 0,$$
$$y\cot\frac{B}{2} + z\cot\frac{C}{2} + 2\sqrt{yz}\sin A - 2R\sin A = 0,$$
$$z\cot\frac{C}{2} + x\cot\frac{A}{2} + 2\sqrt{zx}\sin B - 2R\sin B = 0.$$

Si l'on observe, par exemple, que

$$\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+2\sin A}=\frac{\sin C}{\sin A},$$

on déduit :

$$x=y=z=\frac{2R\sin C}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+2\sin C}=\frac{Rr}{R+r}.$$

3. A chacun des cercles exinscrits I_a, I_b, I_c correspondent deux triples de circonférences égales se coupant aux centres de similitude interne et externe des cercles O et I_a, O et I_b, O et I_c. Leurs rayons sont tels que

$$\frac{1}{\rho_a}=\frac{1}{r_a}\pm\frac{1}{R},\quad \frac{1}{\rho_b}=\frac{1}{r_b}\pm\frac{1}{R},\quad \frac{1}{\rho_c}=\frac{1}{r_c}\pm\frac{1}{R},$$

et, pour les huit triples de cercles,

$$\sum\frac{1}{\rho}=\frac{2}{r}+\sum\frac{2}{r_a}=\frac{4}{r}.$$

4. Soient D, E, F les contacts du cercle inscrit sur BC, CA, AB, A_1, B_1, C_1 et A', B', C' les pieds des bissectrices intérieures et leurs intersections avec le cercle O. Les points de rencontre M, N, P des droites OD, OE, OF avec IA', IB', IC' sont situés sur le cercle $\omega_a\omega_b\omega_c$ de centre S, car

$$\frac{IM}{MA'}=\frac{ID}{OA'}=\frac{r}{R}=\frac{IS}{SO};$$

donc SM est perpendiculaire à BC. De plus,

$$\frac{SM}{OA'}=\frac{S\omega_a}{OA};\quad \text{d'où}\quad SM=S\omega_a.$$

Si A'', B'', C'' désignent les points de rencontre des bissectrices extérieures avec le cercle O, les intersections M', N', P' des droites OD, OE, OF avec IA'', IB'', IC'' appartiennent au second cercle $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$ dont le centre S' est le centre de similitude directe des cercles O et I.

Remarquons aussi que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est égal au triangle $\omega_a\omega_b\omega_c$; le centre S du cercle circonscrit à ce dernier triangle est l'orthocentre du premier.

5. Puisque les triangles $\omega_a\omega_b\omega_c$ et ABC sont homothétiques, les tangentes en S aux cercles ω_a, ω_b, ω_c sont respectivement antiparallèles à BC, CA, AB par rapport aux angles correspondants de ABC. Il en est ainsi des tangentes en S′ aux cercles ω'_a, ω'_b, ω'_c ;... Les symétriques S_a, S_b, S_c et S'_a, S'_b, S'_c de S et S′, par rapport aux bissectrices AI, BI, CI sont donc les contacts des cercles ω_a et ω'_a avec leurs tangentes parallèles à BC, CA, AB et (AS_a, BS_b, CS_c), (AS'_a, BS'_b, CS'_c) déterminent les points de Gergonne et de Nagel du triangle ABC. On retrouve ce théorème que nous avons donné (NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1915, pp. 115 et 302), et que nous complétons :

Dans un triangle ABC, *les conjugués isogonaux des points de Gergonne et de Nagel sont les centres de similitude interne* S *et externe* S′ *des cercles inscrit et circonscrit.*

Les conjugués isogonaux des adjoints des points de Gergonne et de Nagel sont les centres de similitude interne et externe des cercles circonscrit et exinscrit correspondants (1).

6. Désignons par T et T′, U et U′, V et V′ les points où les tangentes en S aux cercles ω_a, ω_b, ω_c rencontrent CA et AB, AB et BC, BC et CA. Les points (B, C, T, T′), (C, A, U, U′), (A, B, V, V′) déterminent trois cercles W_a, W_b, W_c. Nous allons montrer que ces cercles se coupent deux à deux aux points M, N, P du cercle $\omega_a\omega_b\omega_c$.

Les triangles semblables ABC et CVV′ donnent :

$$\frac{CV'}{CA} = \frac{\rho}{r}, \quad \text{soit} \quad CV' = \frac{b\rho}{r}.$$

---

(1) Si le cercle I_a touche les côtés de ABC en D_a, E_a, F_a et si D'_a, E'_a, F'_a sont les isotomiques de ces points sur BC, CA, AB, les droites AD_a, BD_b, CD_c et les droites AD'_a, BD'_b, CD'_c concourent en des points Γ_a et V_a. M. Vigarié a appelé les points Γ_a, V_a des *adjoints des points de Gergonne et de Nagel* (MATHESIS, 1887, p. 59). Les cercles exinscrits I_b, I_c donnent naissance à des *adjoints* Γ^b et V_b, Γ_c et V_c.

On a aussi :

$$BU' = \frac{c\rho}{r}, \quad \text{et} \quad \overline{A_1V'} = \overline{CV'} - \overline{CA_1} = b\left(\frac{\rho}{r} - \frac{a}{b+c}\right),$$

$$\overline{A_1U'} = \overline{BU'} - \overline{BA_1} = c\left(\frac{\rho}{r} - \frac{a}{b+c}\right);$$

d'où
$$\overline{A_1V'} \,.\, \overline{A_1B} = \overline{A_1U'} \,.\, \overline{A_1C}.$$

A_1 est par conséquent un point de l'axe radical des cercles W_b et W_c ; B_1 et C_1 sont aussi sur les axes radicaux de W_a et W_c, W_a et W_b, et *les cercles* W_a, W_b, W_c *ont pour centre radical le centre* I *du cercle inscrit au triangle* ABC.

Calculons la puissance de I par rapport à ces cercles.

Soit M' l'intersection de W_b et W_c sur AA_1.

$$\overline{AI} \,.\, \overline{IM'} = \overline{AI}(\overline{IA_1} - \overline{M'A_1}) = \overline{AI}\left(\overline{IA_1} - \frac{\overline{A_1V'} \,.\, \overline{A_1B}}{\overline{A_1A}}\right).$$

En exprimant AI, IA_1 et A_1A en fonction des côtés a, b, c de ABC, des rayons R et r, on obtient :

$$\overline{AI} \,.\, \overline{IM'} = \frac{ar^2}{(b+c)\sin^2\frac{A}{2}} - 2Rr\left(\frac{R}{R+r} - \frac{a}{b+c}\right);$$

c'est-à-dire, après réductions,

$$\overline{AI} \,.\, \overline{IM'} = 2Rr - \frac{2R^2r}{R+r} = \frac{2Rr^2}{R+r}.$$

Mais

$$\overline{AI} \,.\, \overline{IM} = \overline{AI} \,.\, \overline{IA'} \,.\, \frac{r}{R+r} = 2Rr \,.\, \frac{r}{R+r} = \frac{2Rr^2}{R+r},$$

et les cercles W_b, W_c se coupent au point M. De même les intersections de W_c et W_a, W_a et W_b sont les points N et P.

Les cercles W_a, W_b, W_c *se coupent donc deux à deux sur le cercle circonscrit au triangle* $\omega_a\omega_b\omega_c$ *aux points* M, N, P.

On déduit à nouveau, de ce résultat, que les points O, S, I sont en ligne droite. Ajoutons que I est l'un des centres de similitude des cercles O et S et que les points O et S sont conjugués isogonaux par rapport au triangle $W_aW_bW_c$.

7. Les triangles MNP et $W_aW_bW_c$, dont les côtés sont perpendiculaires aux bissectrices AA_1, BB_1, CC_1, sont homothétiques au triangle DEF des contacts du cercle inscrit au triangle ABC ; les centres d'homothétie sont deux points F_1 et F_2 de OI, et

$$\frac{F_1I}{F_1S} = 1 + \frac{r}{R}\,; \quad \frac{F_2I}{F_2O} = \frac{(R+r)r}{R^2}.$$

Les lignes des centres SW_a, SW_b, SW_c des cercles S et W_a, S et W_b, S et W_c sont par suite parallèles à AA_1, BB_1, CC_1 et S *est l'orthocentre du triangle* $W_aW_bW_c$. Le centre du cercle circonscrit à ce triangle $W_aW_bW_c$ est le centre O du cercle ABC, conjugué isogonal de S par rapport à $W_aW_bW_c$.

Les rayons R, r, λ des cercles O, I et $W_aW_bW_c$ sont d'ailleurs liés par la relation

$$R^2 = \lambda\,(R + r).$$

II. SUR L'ORTHOPÔLE

1. A propos d'une construction de Mannheim pour le point de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points, nous avons donné des propriétés de points et de droites d'un triangle (¹).

Depuis, nous avons publié ces propositions plus générales : (²)

a) On donne un triangle ABC *et un point* P *de son plan. Soient* Q, R, S *les projections orthogonales de* P *sur* BC, CA, AB ; α, β, γ *les seconds points de rencontre du cercle podaire* ω *de* P *avec* QP, RP, SP ; M_1, M_2, M_3 *les milieux de* PA, PB, PC ; O *le centre du cercle* ABC, *et* A_1, B_1, C_1 *les milieux de* BC, CA, AB. *Les droites* αM_1, βM_2, γM_3 *concourent à l'orthopôle* φ' *du diamètre* OP', P' *étant l'inverse triangulaire de* P *par rapport à* ABC (³).

b) Les droites $\varphi'\alpha$, $\varphi'\beta$, $\varphi'\gamma$ *rencontrent les côtés du triangle médian* $A_1B_1C_1$ *en trois points* m_1, m_2, m_3 *d'une droite* (Δ_1) *qui contient le centre* Ω *des moyennes distances des points* A, B, C, P.

c) Les droites Am_1, Bm_2, Cm_3 *rencontrent respectivement* BC,

---

(¹) V. Thébault, MATHESIS, 1913, p. 203 et NOUVELLES ANNALES, 1914, p. 116.

(²) V. Thébault, THE TOHOKU MATHEMATICAL JOURNAL, vol. XIX, nᵒˢ 1 et 2, 1921, pp. 35-41.

(³) K. Goormaghtigh, JOURNAL DE VUIBERT, 1914, p. 69.

CA, AB *en trois points d'une droite* (Δ_2). *La transversale réciproque* (Δ_3) *de* (Δ_2), *par rapport à* ABC, *passe par l'inverse triangulaire* P′ *de* P.

d) La droite (Δ_1) *contient le centre des moyennes distances* Ω *des points* A, B, C, P *et le centre* ω *du cercle podaire de* P *et* P′.

e) La droite (Δ_2) *contient l'orthopôle* φ′ *du diamètre* OP′ *et* (Δ_2) *est perpendiculaire à* P′φ.

2. Ces théorèmes appliqués au quadrilatère inscrit dans un cercle admettent comme cas particuliers des propriétés obtenues jusqu'ici par d'autres méthodes (¹).

Soient un quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle O dont les côtés AB, BC, CD, DA sont a, b, c, d ; A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 les milieux de ces côtés et de AC et DB.

Le cercle podaire de D, par rapport au triangle ABC, se réduit à la droite de Simson QRS de ce point, Q, R, S étant les projections orthogonales de D sur BC, CA, AB. L'inverse triangulaire D′ de D, par rapport au triangle formé par les trois autres sommets, est donc situé à l'infini sur les parallèles à DQ, DR, DS tracées par D_1, E_1, C_1.

Or, αA_1, βB_1, γE_1, et les droites analogues concernant les sommets A, B, C, comme il est bien connu, se coupent en un même point L. *Ce point* L *est donc l'orthopôle des diamètres* OA′, OB′, OC′, OD′, *par rapport aux triangles* BCD, CDA, DAB, ABC.

Puisque l'orthopôle d'un diamètre du cercle circonscrit à un triangle est l'un des points communs au cercle des neuf points et au cercle podaire d'un point de ce diamètre :

Les droites de Simson de chacun des sommets d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, par rapport au triangle des trois autres sommets, ainsi que les cercles des neuf points des quatre triangles déterminés par les sommets pris trois à trois, se coupent au point L *du qudrilatère* (²).

L est le foyer commun à quatre paraboles, inscrites aux triangles $A_1B_1E_1$, $B_1C_1F_1$, $C_1E_1D_1$, $D_1A_1F_1$, qui ont pour directrices

---

(¹) A. Deteuf, Nouvelles Annales de Mathématiques, 1908, p. 442.

(²) E. Lemoine, Nouvelles Annales de Mathématiques, 1869, pp. 174 et 317.

OA′, OB′, OC′, OD′ et pour tangentes au sommet les quatre droites (Δ_1), (parallèles à OA′, OB′, OC′, OD′), relatives aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC. Ces droites (Δ_1) concourent au centre Ω des moyennes distances des points A, B, C, D. On en déduit que *Ω est milieu de* OL.

Les droites de Simson des sommets, par rapport aux triangles des trois sommets restants, sont les droites (Δ_2). Leurs transversales réciproques, par rapport à leur triangle correspondant, *leur sont perpendiculaires,* et représentent par suite les droites de Simson des points diamétralement opposés à A, B, C, D, sur le cercle O.

Le point L, considéré comme orthopôle de OA′, OB′, OC′, OD′, conduit à des relations assez curieuses, telle la suivante :

$$a \cdot LA_1 + c \cdot LC_1 = b \cdot LB_1 + d \cdot LD_1,$$

que nous avons signalée dans les NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1920, p. 320, question 2451.

III. SUR DES GROUPES DE TRIANGLES ET DE TÉTRAÈDRES

Au sujet de nos recherches relatives à des triples de cercles et à des quadruples de sphères (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1921, pp. 233-241, deuxième partie), M. Neuberg a eu l'obligeance d'attirer notre attention sur un théorème de Steiner, concernant deux tétraèdres homologiques entre eux et orthologiques à un troisième tétraèdre, dont il a du reste donné une solution fort élégante (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, 1921, p. 220, première partie). Nous avons ainsi été conduit à généraliser nos développements antérieurs, d'abord en ce qui concerne des triples de cercles, puis des groupes de quatre sphères quelconques.

1. Des sommets d'un triangle ABC, comme centres, décrivons trois cercles quelconques, et de leur centre radical S abaissons les perpendiculaires d_a, d_b, d_c sur les côtés BC, CA, AB ; ces droites sont les axes radicaux des couples de cercles (B, C), (C, A), (A, B).

Soient A′, B′, C′ trois points quelconques de ces axes. A′, B′, C′ sont les centres de trois cercles respectivement orthogonaux aux cercles (B, C), (C, A), (A, B). Le cercle A coupant orthogonalement les cercles (B′, C′), son centre est sur l'axe radical de ces derniers cercles ; de même, B et C appartiennent respectivement aux axes radicaux des groupes de cercles (C, A), (A, B).

On en conclut que les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C respectivement sur les côtés du triangle A′B′C′ concourent en un point S′, centre radical des cercles A′, B′, C′. Les points S et S′ sont les *centres d'orthologie* des couples de triangles (A′B′C′, ABC) et (ABC, A′B′C′).

Prenons sur les droites d_a, d_b, d_c un second triple de points A″, B″, C″, desquels, comme centres, nous décrivons des cercles coupant orthogonalement les couples (B, C), (C, A), (A, B) ; soit S″ le centre d'orthologie des triangles ABC et A″B″C″. Les points S′ et S″ sont les centres de deux cercles coupant orthogonalement, le premier les cercles A′, B′, C′ et l'autre les cercles A″, B″, C″.

Les cercles B′, C′ sont orthogonaux aux cercles A et S′ ; donc la droite B′C′ est l'axe radical des cercles A et S′. De même la droite B″C″ est l'axe radical des cercles A et S″ ; par suite, l'intersection de B′C′ et B″C″ est un point de l'axe radical Δ des cercles S′ et S″. On constate alors que l'axe radical Δ de S′ et S″ est l'axe d'homologie des triangles A′B′C′ et A″B″C″ et que Δ est perpendiculaire à la droite S′S″ des centres d'orthologie des couples de triangles (ABC, A′B′C′) et (ABC, A″B″C″).

Ainsi se trouve établi un premier théorème de Steiner (JOURNAL DE CRELLE, t. II, p. 287) (¹).

2. Désignons par α_1, α_2, α_3 et α'_1, α'_2, α'_3 les projections orthogonales des points S′ et S″ sur les côtés du triangle ABC. S′A, perpendiculaire à B′C′, est un diamètre du cercle $S'\alpha_2\alpha_3$. Les côtés des angles $\alpha_2 S' \alpha_3$ et B′SC′ étant respectivement parallèles, $\alpha_2\alpha_3$ est

---

(¹) Ce mode de démonstration, peu connu en France, nous paraît mériter d'être répandu, à l'exemple de M. Neuberg, qui a jugé bon de l'appliquer aux tétraèdres *(loc. cit.)* et me fait savoir qu'il l'a emprunté à l'ouvrage SYNTHETISCHE BEWEISE, par Fuhrmann, et que cet auteur s'est probablement inspiré de la démonstration du premier théorème de Steiner, par Félix Eberty (JOURNAL DE CRELLE, t. V, p. 107).

Steiner a signalé un second théorème analogue sur trois triangles sphériques et un troisième sur trois tétraèdres dont il sera question plus loin. En a-t-on publié des démonstrations ?

antiparallèle à la direction B′C′ par rapport à ces angles ; de même $\alpha_3\alpha_1$ et $\alpha_1\alpha_2$ sont antiparallèles aux directions C′A′ et A′B′ dans les angles $\alpha_3 S'\alpha_1$, C′SA′, ... On en conclut que le triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ est *homothétique* à un triangle $a'b'c'$ dont les sommets, situés respectivement sur SA′, SB′, SC′, sont les inverses de A′, B′, C′ dans une inversion de centre S et de module quelconque k^2. Semblablement, le triangle $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ est homothétique à un triangle $a''b''c''$ obtenu par inversion des points A″,B″,C″, le centre étant S et le module k'^2.

Remarquons aussi que S′ et S, S″ et S sont des couples de points homologues dans les homothéties $(a'b'c', \alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ et $(a''b''c'', \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3)$, car ces points sont les concours de parallèles issues de points homologues.

Par suite,

$$\frac{\overline{S'\alpha_1}}{\overline{Sa'}} = \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2}}{\overline{a'b'}} = m\,; \quad \frac{\overline{S''\alpha'_1}}{\overline{Sa''}} = \frac{\overline{\alpha'_1\alpha'_2}}{\overline{a''b''}} = m'\,;$$

$$\overline{S'\alpha_1}\,.\,\overline{S''\alpha'_1} = mm'\,.\,\overline{Sa'}\,.\,\overline{Sa''} = \frac{mm'k^2k'^2}{\overline{SA'}\,.\,\overline{SA''}}\,;$$

si bien que

$$(\overline{SA'}\,.\,\overline{SA''})\,.\,(\overline{S'\alpha_1}\,.\,\overline{S''\alpha'_1}) = (\overline{SB'}\,.\,\overline{SB''})\,.\,(\overline{S'\alpha_2}\,.\,\overline{S''\alpha'_2}) = \\ = (\overline{SC'}\,.\,\overline{SC''})\,.\,(\overline{S'\alpha_3}\,.\,\overline{S''\alpha'_3})\,, \qquad (1)$$

relation remarquable entre les produits des distances des points S′ et S″ aux côtés du triangle ABC.

3. Cette égalité présente un intérêt tout particulier, lorsque

$$\overline{SA'}\,.\,\overline{SA''} = \overline{SB'}\,.\,\overline{SB''} = \overline{SC'}\,.\,\overline{SC''},$$

c'est-à-dire quand les points A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″, sont des points inverses dans une inversion de centre S. Alors

$$\overline{S'\alpha_1}\,.\,\overline{S''\alpha'_1} = \overline{S'\alpha_2}\,.\,\overline{S''\alpha'_2} = \overline{S'\alpha_3}\,.\,\overline{S''\alpha'_3}, \qquad (2)$$

et S′, S″ *sont deux points conjugués isogonaux par rapport au triangle* ABC, autrement dit, *les foyers d'une conique inscrite à ce triangle.*

Si S′, par exemple, est sur le cercle circonscrit au triangle ABC, A″, B″, C″ sont en ligne droite et S″ est rejeté à l'infini sur la perpendiculaire à la droite de Simson de S′ par rapport au triangle ABC. *La conique est alors une parabole de foyer S′ inscrite à ce triangle.*

Les cercles A, B, C se coupant deux à deux en des points C′ et C″, A′ et A″, B′ et B″,

$$\overline{SA'} . \overline{SA''} = \overline{SB'} . \overline{SB''} = \overline{SC'} . \overline{SC''},$$

et les points S′ et S″ relatifs aux groupes (A′, B′, C′), (A″, B″, C″), sont les centres des cercles circonscrits aux triangles A′B′C′ et A″B″C″. Ce cas particulier comprend le théorème de M. Neuberg (MÉMOIRE SUR LE TÉTRAÈDRE, p. 20), que nous avons étudié à notre tour (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, 1921, p. 233, deuxième partie).

Si les points (A′, B′, C′), (A″, B″, C″) sont situés sur un même cercle Σ,

$$\overline{SA'} . \overline{SA''} = \overline{SB'} . \overline{SB''} = \overline{SC'} . \overline{SC''}.$$

Voici une autre propriété spéciale à cette figure. Nous désignons par $P_{(O)}$ la puissance d'un point P par rapport à un cercle de centre O. Soient K′ et K″ les projections orthogonales de S sur B′C′ et B″ C″.

$$S_{(S')} - S_{(A)} = 2S'A . SK',$$
$$S_{(S'')} - S_{(A)} = 2S''A . SK'' ;$$

d'où

$$S_{(S')} + S_{(S'')} = 2\left[\overline{S'A} . \overline{SK'} + \overline{S''A} . \overline{SK''} + S_{(A)}\right].$$

Or, de la similitude des triangles $S'_1\alpha_2\alpha_3$ et SB′C′, par exemple, on déduit :

$$\overline{S'A} . \overline{SK'} + \overline{S''A} . \overline{SK''} = 0,$$

et *la somme algébrique des puissances du centre radical* S *des cercles* A, B, C, *par rapport aux cercles* S′ *et* S″, *reste constante lorsque le cercle* Σ *varie.*

4. Les produits égaux de la relation (2) représentent le carré de la moitié du petit axe *b* de la conique de foyers S′ et S″ inscrite au triangle ABC. Appelons R′, R″ les rayons des cercles circonscrits aux triangles A′B′C′, A″B″C″ et δ le diamètre du cercle podaire des

points S′ et S″, par rapport au triangle ABC ; de la similitude des triangles $S'\alpha_2\alpha_3$ et SB″C″, $S''\alpha'_2\alpha'_3$ et SB′C′, on tire :

$$\frac{\overline{S'\alpha_1}}{\overline{SA''}} = \frac{\delta}{2R''} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{S''\alpha'_1}}{\overline{SA'}} = \frac{\delta}{2R'},$$

soit

$$\overline{S'\alpha_1} \cdot \overline{S''\alpha'_1} = \overline{SA'} \cdot \overline{SA''} \cdot \frac{\delta^2}{4R'R''} ;$$

d'où

$$\frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{R'R''}{p}}, \qquad (p = \overline{SA'}\,.\,\overline{SA''} \neq 0) \qquad (3)$$

expression du rapport des axes de la conique.

Lorsque $p = R'R''$, S′ et S″ sont confondus en l'un des centres des cercles tritangents au triangle ABC.

Si nous nous reportons à la formule

$$d^2 = (\rho - \rho')^2 - 4rr_1,$$

que nous avons donnée dans le cas où les cercles A, B, C se coupent deux à deux aux points (A′, B′, C′), (A″, B″, C″), (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQE, 1921, p. 236), et que l'on y introduise la relation (3), on obtient ces valeurs simples des rayons des sphères tangentes aux quatre plans des faces d'un tétraèdre, en fonction des rayons ρ, ρ′ des cercles A′B′C′, A″B″C″ et de la puissance p du centre radical des cercles A, B, C par rapport à ces mêmes cercles :

$$r = \frac{\rho - \rho'}{\rho}\sqrt{p} = \frac{\delta}{\rho}\sqrt{p}\,; \qquad r_1 = \frac{\rho - \rho'}{\rho'}\sqrt{p} = \frac{\delta}{\rho'}\sqrt{p}.$$

5. Un second théorème de Steiner (JOURNAL DE CRELLE, t. II, p. 92), relatif à trois tétraèdres A′B′C′D′ et A″B″C″D″ homologiques entre eux et orthologiques à un tétraèdre ABCD, a été démontré par M. Neuberg *(loc. cit.)*. C'est l'extension à l'espace du théorème sur les triangles dont nous venons de nous occuper.

6. Nous conservons les notations employées par M. Neuberg qui considère, dans sa solution, deux sphères de centres S′ et S″ orthogonales à deux groupes de sphères A′,B′,C′,D′ et A″,B″,C″,D″.

Soient α_1, α_2, α_3, α_4 et α'_1, α'_2, α'_3, α'_4 les projections orthogonales des points S′ et S″ sur les faces du tétraèdre ABCD. La droite S′A, par exemple, est perpendiculaire au plan B′C′D′. Mais S′A est un diamètre de la sphère $S'\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, et comme les trièdres $\alpha_2\alpha_3\alpha_4S'$ et B′C′D′S ont leurs arêtes respectivement parallèles, le plan $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ est antiparallèle à B′C′D′ par rapport au trièdre B′C′D′S. De même les plans $\alpha_3\alpha_4\alpha_1$, ..., $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ sont antiparallèles aux plans C′D′A′, ..., A′B′C′ par rapport aux trièdres de sommet S qui leur correspondent.

Le tétraèdre $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ est donc *homothétique* à un tétraèdre $a'b'c'd'$ dont les sommets, situés sur SA′, SB′, SC′, SD′ sont les inverses de A′, B′, C′, D′ dans une inversion de centre S et de module quelconque.

S′ et S, S″ et S sont des points homologues dans des homothéties ($a'b'c'd'$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$) et ($a''b''c''d''$, $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4$) et l'on a, comme en géométrie plane,

$$(\overline{SA'}\,.\,\overline{SA''})\,.\,(\overline{S'\alpha_1}\,.\,\overline{S''\alpha'}) = (\overline{SB'}\,.\,\overline{SB''})\,.\,(\overline{S'\alpha_2}\,.\,\overline{S''\alpha'_2}) =$$

$$= (\overline{SC'}\,.\,\overline{SC''})\,.\,(\overline{S'\alpha_3}\,.\,\overline{S''\alpha'_3}) = (\overline{SD'}\,.\,\overline{SD''})\,.\,\overline{S'\alpha_4}\,.\,\overline{S''\alpha'_4}).$$

7. Lorsque

$$\overline{SA'}\,.\,\overline{SA''} = \overline{SB'}\,.\,\overline{SB''} = \overline{SC'}\,.\,\overline{SC''} = \overline{SD'}\,.\,\overline{SD''},$$

$$\overline{S'\alpha_1}\,.\,\overline{S''\alpha'_1} = \overline{S'\alpha_2}\,.\,\overline{S''\alpha'_2} = \overline{S'\alpha_3}\,.\,\overline{S''\alpha'_3} = \overline{S'\alpha_4}\,.\,\overline{S''\alpha'_4}. \qquad (4)$$

S′ *et* S″ *sont alors conjugués isogonaux par rapport au tétraèdre* ABCD, *c'est-à-dire les foyers d'une quadrique de révolution inscrite à ce tétraèdre. Cette quadrique est un paraboloïde lorsque* S′, *par exemple, tombe sur la surface du troisième ordre lieu des points dont les projections orthogonales sur les faces du tétraèdre* ABCD *sont situées dans un même plan.*

Si les quatre sphères de centres A, B, C, D se coupent trois à trois en des points A′, B′, C′, D′ et A″, B″, C″, D″, nous retrouvons le théorème que nous avons donné, 1921, p. 239 (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE).

A′B′C′D′ et A″B″C″D″ étant situés sur une même sphère Σ, *la somme algébrique des puissances du centre radical* S *des sphères* A,B,C,D, *par rapport aux sphères* S′ *et* S″, *reste constante lorsque* Σ *varie.*

8. Enfin, si $2b$ désigne le petit axe de la quadrique de foyers S′ et S″ inscrite au tétraèdre ABCD,

$$\overline{S'\alpha_1} \,.\, \overline{S''\alpha'_1} = \overline{S'\alpha_2} \,.\, \overline{S''\alpha'_2} = \overline{S'\alpha_3} \,.\, \overline{S''\alpha'_3} = \overline{S'\alpha_4} \,.\, \overline{S''\alpha'_4} = \frac{b^2}{4},$$

et la relation

$$\frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{R'R''}{p}}, \qquad (p = \overline{SA'} \,.\, \overline{SA''} \neq 0)$$

subsiste pour la quadrique, δ étant le diamètre de la sphère podaire de S′ et S″, par rapport au tétraèdre ABCD, R′ et R″ les rayons des sphères circonscrites aux tétraèdres A′B′C′D′ et A″B″C″D″.

S′ et S″ coïncident avec l'un des centres des sphères tangentes aux quatre plans des faces du tétraèdre ABCD, quand $p = R'R\,'$.

Nouveau procédé

POUR LA

Fabrication de la Céruse en Écailles dures

(Brevet Belge N° 282.879)

PAR

M. E. LENOBLE

La fabrication de la céruse par le procédé hollandais fournit suivant les circonstances, ou bien de la poudre de céruse, ou bien de la céruse en morceaux, désignés sous le nom d'« écailles ». Ordinairement, le fabricant n'est pas maître de son opération ; celle-ci, restant toujours empreinte d'empirisme, est livrée aux hasards des conditions qui se réalisent naturellement. Or, il est impossible de fixer toutes ces conditions, car quelques-unes sont tout à fait indépendantes de la volonté du cérusier, telles la composition du fumier de cheval et la température extérieure.

Dans la pratique, on ne peut pas diriger l'opération de manière à obtenir constamment un même genre de produit. On se contente de mettre en route la fabrication, en s'efforçant de réaliser les conditions reconnues les meilleures par l'usage, ce qui conduit aux résultats les plus variables. Dans une même fosse on peut trouver tantôt des écailles, tantôt de la poudre, quelquefois il ne se produit presque rien. De même, il arrive que les genres de céruse qui prennent naissance dans un même lit sont les plus divers ; il est possible de recueillir, en un point, un produit mousseux, en un autre, quelques belles écailles, tandis que certaines parties peuvent être vierges de toute production.

Il en est de même du rendement, qui est des plus aléatoires ; habituellement le fabricant se déclare satisfait lorsqu'il obtient, comme moyenne, une proportion de céruse égale à 40 $^0/_0$ du poids du plomb mis en œuvre.

C'est pour obvier aux multiples inconvénients d'une telle méthode que j'ai entrepris la présente étude. Comme point de départ, j'ai considéré que la pratique enseignait : 1° que la céruse en *écailles* était la meilleure ; 2° que la céruse en *écailles dures* était celle qui possédait le pouvoir couvrant maximum. Aussi, me basant sur ces indications, me suis-je efforcé de trouver les conditions favorables à la production des *écailles dures*. La formation d'une telle céruse présente, en outre, un grand avantage au point de vue hygiénique, car les écailles dures se détachent très facilement du plomb ; il suffit d'un léger choc pour les séparer, et cette opération s'accomplit sans formation de poussière.

La fabrication de la céruse par la méthode hollandaise utilise trois produits : du plomb métallique, de l'acide acétique dilué et du fumier de cheval. Cette dernière substance fournit vraisemblablement : le gaz carbonique, une partie de l'humidité et la chaleur nécessaires pour la production de l'hydrocarbonate de plomb. Mais ces trois corps ne suffisent pas pour former de la céruse ; il faut encore l'intervention de l'oxygène, qui selon toute vraisemblance est emprunté à l'air atmosphérique. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que cet air circule entre les différents lits, de manière à pénétrer jusqu'au fond même des fosses de fabrication, en passant à travers une épaisseur de plusieurs couches. Le dégagement de chaleur produit par la fermentation du fumier doit évidemment favoriser cette circulation de l'air et son arrivée jusqu'aux lits inférieurs de l'installation.

La nécessité de la présence de l'oxygène est nettement accusée, lorsqu'on considère la formule chimique de la céruse, laquelle est voisine de celle de l'hydrocarbonate de plomb suivant :

$$(CO^3Pb)^2, Pb(OH)^2 \quad \text{ou} \quad (CO^2, PbO)^2, PbO, H^2O$$

$$H = 1, \quad O = 16, \quad C = 12, \quad Pb = 207.$$

La deuxième formule montre nettement qu'avec le gaz carbonique, le plomb et l'eau, il est indispensable de fournir de l'oxygène pour la fabrication de la céruse. Pour 1 kilogramme de plomb, il faut théoriquement 77,3 grammes d'oxygène, ce qui représente 333 grammes d'air atmosphérique ou 257,5 litres. Dans la pratique, la quantité d'air nécessaire pour assurer la complète transformation du plomb en céruse est beaucoup plus forte, car une fraction seulement de cet air est utilisée ; j'estime qu'il faut, au minimum, 1 m^3 d'air par kilogramme de plomb.

La même formule indique encore que pour 1 kilogramme de plomb, il est nécessaire d'avoir à sa disposition, au moins, 141,7 grammes ou 71,5 litres de gaz carbonique et 29 grammes d'eau.

Quant à la proportion d'acide acétique qu'il faut employer pour fabriquer de la céruse, la formule ci-dessus ne peut pas nous renseigner. Si, par analogie avec ce qui se passe dans la fabrication de la céruse par la méthode française ou de Thénard, on admettait que le plomb donne d'abord naissance à de l'acétate triplombique, il faudrait 193 grammes d'acide acétique cristallisable, par kilogramme de plomb. Mais il est peu probable que cette production d'acétate triplombique s'accomplisse intégralement avant que l'action de l'acide carbonique se manifeste. Il est vraisemblable, au contraire, que la transformation du plomb en céruse, avec production intermédiaire possible d'acétate triplombique, s'effectue peu à peu, de proche en proche, l'acide acétique étant constamment régénéré au fur et à mesure que le gaz carbonique a réagi pour former de la céruse. En sorte qu'une quantité très minime d'acide acétique doit être susceptible de transformer en céruse une proportion illimitée de plomb, théoriquement, bien entendu.

LE FUMIER

Par des essais préalables, je me suis d'abord assuré que le fumier était réellement le générateur du gaz carbonique ; les expériences qui suivent montrent que le gaz n'est pas produit directement par le fumier ; il est le résultat d'une combustion du fumier sous l'influence de l'oxygène.

EXPÉRIENCE I

Dans un flacon muni d'un bouchon livrant passage à un thermomètre et à un tube abducteur aboutissant sur une cuve à eau, j'introduis 800 grammes de fumier de cheval et j'observe la température ainsi que le mouvement de l'eau à l'extrémité du tube abducteur.

L'expérience est commencée le 28 avril ; de cette date jusqu'au 13 mai, la température n'a pas cessé de décroître, avec quelques oscillations, depuis 25° jusqu'à 18°5.

A l'extrémité du tube abducteur, je constate d'abord une dépression de 3 centimètres d'eau, laquelle diminue peu à peu en oscillant, pour se fixer, lorsque j'arrête l'expérience le 13 mai, à une pression d'eau d'un centimètre.

Il ne s'est donc pas dégagé de gaz spontanément.

EXPÉRIENCE II

Dans un grand appareil, analogue au précédent, je place 2115 grammes de fumier de cheval, auquel j'ajoute 200 c^3 d'une solution diluée d'acide acétique (50 c^3 d'acide cristallisable pour 3 litres de solution). Cette addition d'acide est faite pour se rapprocher des conditions ordinaires de la fabrication de la céruse ; le bouchon du flacon est soigneusement recouvert de cire à cacheter.

L'expérience dure sept jours entiers.

La température descend lentement de 20° à 16°, et l'appareil accuse constamment une légère dépression.

Ici encore, il ne s'est pas dégagé de gaz spontanément.

EXPÉRIENCE III

Je prends le flacon précédent, tel qu'il se trouve le septième jour et j'y amène d'une manière ininterrompue, nuit et jour, de l'oxygène pur se dégageant bulle à bulle. L'expérience commence le 18 mai ; la vitesse d'arrivée de l'oxygène est de 4 bulles à la minute, ce qui correspond à un débit de 1,068 litre en 24 heures. Le premier jour l'oxygène est complètement absorbé.

Le 19 mai, à 3 h. 1/4, j'augmente la vitesse d'écoulement de l'oxygène, qui arrive à raison de 10 bulles par minute ; à l'extrémité du tube abducteur, il ne se dégage pas de gaz, mais il se produit une pression d'eau de 2 centimètres. Le même jour, à 6 heures, je fais dégager 12 bulles d'oxygène à la minute.

Le 20 mai, je monte à 14 bulles à la minute.

Le 21 mai, à 3 heures 1/2, je règle l'appareil de manière à dégager 20 bulles à la minute (5,340 litres par 24 heures). C'est à partir de cet instant seulement qu'un dégagement de gaz se manifeste à l'extrémité du tube abducteur ; la potasse caustique absorbe une portion du gaz qui renferme 11,5 °/₀ de gaz carbonique.

Le 22 mai, je règle l'écoulement gazeux à 15 bulles à la minute ; à 4 heures du soir, il se dégage 17 bulles par minute. Le gaz recueilli le 22 mai, vers

6 heures, contient 65 $^0/_0$ d'anhydride carbonique. A partir de cet instant, je m'efforce de régler l'arrivée de l'oxygène, de manière à réaliser l'équilibre, c'est-à-dire de façon à n'avoir pas de dégagement gazeux.

Les 26 et 27 mai l'écoulement de l'oxygène est de 8 bulles à la minute, sans dégagement de gaz à l'extrémité de l'appareil. Il résulte de cette observation que la totalité de l'oxygène introduit dans le flacon est complètement absorbée.

Le 27 mai, j'augmente la vitesse de l'oxygène ; il se dégage 55 bulles à la minute. Cela représente un excédent de 47 bulles d'oxygène par minute ; aussi se dégage-t-il du gaz, à l'extrémité du tube abducteur. Le gaz sortant de l'appareil renferme 66 $^0/_0$ d'anhydride carbonique. Un peu plus tard il n'en contient plus que 50 $^0/_0$. A ce taux, cela représente 260 c^3 de gaz carbonique par heure, pour 2115 grammes de fumier. J'ai conservé pour l'oxygène la même vitesse jusqu'au 29 mai ; à ce moment, le gaz qui se dégage renferme encore 5 $^0/_0$ de gaz carbonique. De nouveau, je rétablis l'équilibre, en réduisant la vitesse de l'oxygène à 11 bulles par minute ; le gaz cesse de se dégager à l'extrémité de l'appareil.

Les 30 et 31 mai je maintiens le statu quo.

Le 1er juin, à 4 heures, j'augmente le débit de l'oxygène jusqu'à 55 bulles à la minute ; le gaz dégagé renferme 50 $^0/_0$ d'anhydride carbonique. Et je mets fin à l'expérience.

Pendant la durée de cet essai, j'ai constaté que la température a légèrement oscillé, en suivant, à peu près, le même mouvement que la vitesse du dégagement de l'oxygène, s'élevant quand la vitesse augmentait, baissant lorsque la vitesse diminuait, comme le montrent les observations suivantes :

		Vitesse du dégagement de l'O.	Température.
19 mai	à 9 heures 1/2	4 bulles à la minute	17°
20 mai	à 9 heures	12 » »	19°
21 mai	à 9 heures	14 » »	19°70
21 mai	à 3 heures 1/2	20 » »	20°50
22 mai	à 9 heures	15 » »	19°50
23 mai	à 10 heures	11 » »	18°
26 mai	à 9 heures	8 » »	15°50
29 mai	à 9 heures	11 » »	17°
30 mai	à 10 heures 1/2	24 » »	18°

Il résulte de ces observations :

1°) Que le fumier de cheval seul, placé à l'abri de l'air, ne dégage pas de gaz ;

2°) Que ce même fumier est capable d'absorber une quantité considérable d'oxygène ;

3°) Qu'après l'absorption de l'oxygène, le fumier, en s'échauffant, dégage du gaz carbonique.

L'ACIDE ACÉTIQUE

Quel est le rôle joué par l'acide acétique dans cette fabrication ?

Par analogie avec ce qui se passe dans la fabrication de la céruse par le procédé de Thénard, on admet généralement que cet acide favorise la formation de l'oxyde de plomb, avec lequel il se combine pour produire de l'acétate triplombique. Celui-ci est ensuite décomposé par l'acide carbonique avec production d'acétate monoplombique capable de dissoudre, à nouveau, de l'oxyde de plomb pour régénérer l'acétate triplombique ; mais, ce n'est là qu'une hypothèse dont l'exactitude n'est nullement démontrée.

A ce propos, il est intéressant de signaler une opinion de Dumas (*Traité de Chimie appliquée aux Arts*, t. III, p. 577). Son attention ayant été vraisemblablement attirée sur la quantité abondante d'oxygène nécessaire pour la production de la céruse, et constatant, d'un autre côté, la difficulté que doit éprouver l'air pour circuler à travers les diverses couches afin d'arriver au contact du plomb, l'éminent chimiste français émet l'hypothèse que l'acide acétique est probablement décomposé.

A quel degré de dilution faut-il employer l'acide acétique ?

Dans l'importante fabrique lilloise, Th. Lefebvre et C^ie^, on utilise un produit très dilué, renfermant, par litre, 16,83 grammes d'acide acétique cristallisable.

Krems employait un acide 6 fois plus fort, se rapprochant, par conséquent, pour la teneur en acide, du vinaigre d'Orléans.

Les renseignements concernant l'acide acétique manquent donc de précision et d'intérêt.

LA TEMPÉRATURE

Il n'y a rien de précis, non plus, comme je le montrerai plus loin, relativement à la température nécessaire pour la fabrication de la céruse. Mais il doit exister certainement une température optima, c'est-à-dire, une température plus favorable que toute autre à la formation de la céruse. Pour avoir une idée de la valeur de cette température, j'ai suivi de près une fabrication industrielle, grâce à l'obligeance de MM. Th. Lefebvre et C^ie^.

Afin d'observer ce qui se passe au niveau de chacun des lits, on installe de larges tuyaux en fonte, recourbés à l'angle droit, à la partie inférieure, partant du niveau de chaque lit et s'élevant jusqu'à la partie supérieure de la fosse.

La température, au niveau d'un lit, se détermine en descendant un thermomètre, à l'aide d'une corde, jusqu'à la partie inférieure du tuyau correspondant.

En même temps, je saisis l'occasion qui m'est offerte de déterminer la composition des gaz se dégageant de chacune des couches. Pour prélever un échantillon de gaz, je descends un long tube de caoutchouc dans chaque tuyau, tandis que par l'autre extrémité ce tube communique avec la partie supérieure d'un flacon rempli d'eau, que je fais écouler lentement par une tubulure latérale ; je prends la précaution de rejeter les premières portions de gaz recueillies.

En agitant un volume connu du gaz avec de la potasse caustique je détermine la proportion du gaz carbonique. Et, en additionnant le résidu d'une petite quantité d'acide pyrogallique, j'obtiens, après agitation, la teneur en oxygène.

L'installation comprend 10 lits.

Le numéro 1 se trouve au fond de la fosse ; le numéro 6 est au niveau du sol extérieur.

Voici, par lit, les observations que j'ai faites :

Lit n° 1 construit le 21 novembre

Date		Température	Acide carboniq. %	Oxygène %
14 décembre,		45°		
18 décembre,	Dégagement d'air chaud,	45°	1,75	17,4
21 décembre,		40°		
24 décembre,	Dégagement d'air chaud,	48°	0,5	19,6
29 décembre,		30°		
6 janvier,		30°	6	10
9 janvier,		25°		
13 janvier,		25°	0,25	19,4
20 janvier,	Aspiration,			
25 janvier,		60°		
27 janvier,		60°	3,1	12,4
3 février,		56°	2,1	16
8 février,		57°		
10 février,	(82e jour)	55°	2,1	11,5
				10

Le lit est démonté le 20 février (92e jour).

La production est de 1107 kilogrammes de céruse pour 2000 kilogrammes de plomb ; ce qui représente un rendement de 55,35 % en 91 jours, ou 30,4 % en 50 jours.

La moyenne des températures observées est de 44°3.

Lit n° 2 construit le 21 novembre

Date		Température	Acide carboniq. %	Oxygène %
18 décembre,	Fort appel d'air,	23°	0,25	19,5
21 décembre,		18°		
24 décembre,	Appel d'air,	27°		
29 décembre,		35°		
6 janvier,	Aspiration,	21°		
9 janvier,		25°		
13 janvier,	Aspiration,	29°		
20 janvier,	Aspiration,			
25 janvier,		62°		
27 janvier,		63°	1,6	9,8
3 février,		57°	1,8	16
8 février,		60°		
10 février,	(82e jour)	57°	1,5	8,4

Le lit est démonté le 19 février (91e jour).

Production : 706 kilos de céruse pour 3000 kilos de plomb.

Rendement : 23,53 % pour 90 jours ou 13 % en 50 jours.

Moyenne des températures : 39°75.

Lit n° 3 construit le 24 novembre

Date		Température	Acide carboniq. %	Oxygène %
14 décembre,		46°		
18 décembre,	Dégagement d'air chaud,	45°	0,25	19,5
21 décembre,		45°		
24 décembre,	Dégagement d'air chaud,	54°	0,5	19,1
29 décembre,		50°		
6 janvier,		45°	1,3	18,4
9 janvier,		50°		
13 janvier,	Mauvaise odeur,	55°	6,1	9,8
20 janvier,	Faible odeur,	59°	1,8	14,5
25 janvier,		65°		
27 janvier,	Mauvaise odeur,	66°	1,1	4,2
3 février,		61°	1	10,8
8 février,		62°		
10 février,	(79e jour),	59°	1,3	5,1

Le lit est démonté le 19 février (88e jour).

La prise est bonne, vers la droite. Deux rangées, à gauche, vis-à-vis du tuyau, n'ont presque rien.

Production : 1150 kilos de céruse pour 3000 kilos de plomb.

Rendement : 38,33 % en 87 jours ou 22 % en 50 jours.

Moyenne des températures : 54°4.

Lit n° 4 construit le 25 novembre

Date		Température	Acide carboniq. %	Oxygène %
14 décembre,		50°		
18 décembre,	Dégagement d'air chaud,	50°	0,4	18,5
21 décembre,		46°		
24 décembre,	Dégagement d'air chaud,	58°	0,75	18
29 décembre,		55°		
6 janvier,	Odeur,	55°	2,6	16,3
9 janvier,		57°		
13 janvier,	Mauvaise odeur,	60°	5,2	10,6
20 janvier,	Mauvaise odeur,	65°	2,9	9,4
25 janvier,		65°		
27 janvier,	Mauvaise odeur,	66°	0,5	12,4
3 février,		61°	0,5	17
8 février,		61°		
10 février,	(78e jour),	59°	0,8	9,3

Le lit est démonté le 18 février (86e jour).

Le rendement paraît passable. J'observe, vers le tuyau, une partie rougeâtre.

Production : 1216 kilos de céruse pour 3000 kilos de plomb.

Rendement : 40,53 % pour 85 jours ou 23,8 % en 50 jours.

Moyenne des températures : 57°7.

Lit n° 5 construit le 27 novembre

Date		Température	Acide carboniq. %	Oxygène %
18 décembre,	Appel d'air	18°		
21 décembre,		10°		
24 décembre,	Appel d'air,	21°		
29 décembre,		55°		
6 janvier,	Odeur faible,	53°	1,9	16
9 janvier,		60°		
13 janvier,	Mauvaise odeur,	60°	3,4	3,8
20 janvier,	Très mauvaise odeur,	65°	2,1	14,4
25 janvier,		65°		
27 janvier,	Mauvaise odeur,	66°	1,5	9,4
3 février,		58°	0,4	14,9
8 février,		60°		
10 février,	(76e jour),	56°	0,3	11,6

Le lit est démonté le 18 février (84e jour).

La proportion de céruse semble moyenne. Quelques parties ne sont pas prises.

Production : 703 kilos de céruse pour 3000 kilos de plomb.

Rendement : 23,43 % pour 83 jours ou 14,1 % en 50 jours.

Moyenne des températures : 49°7.

Lit n° 6 construit le 30 novembre

Date		Température	Acide carboniq. %	Oxygène %
14 décembre,		37°		
18 décembre,	Dégagement d'air chaud,	40°	0,4	17,7
21 décembre,		35°		
24 décembre,	Dégagement d'air chaud,	50°	0,95	17,8
29 décembre,		56°		
6 janvier,		56°	1,6	16
9 janvier,		64°		
13 janvier,	Mauvaise odeur,	65°	2,2	11,6
20 janvier,	Mauvaise odeur,	67°	2,1	16,9
25 janvier,		66°		
27 janvier,	Mauvaise odeur,	60°	0,25	15
3 février,		55°	0,5	12,8
8 février,		55°		
10 février,	(73e jour),	53°	1	10,5

Le lit est démonté le 17 février (80e jour).

La prise est assez bonne, un peu irrégulière. Quelques parties sont complètement inattaquées. Il reste un peu de liquide dans les pots.

Ce lit se trouve au niveau du sol extérieur.

Production : 1272 kilos de céruse pour 3000 kilos de plomb.

Rendement : 42,40 % en 79 jours ou 26,8 en 50 jours.

Moyenne des températures : 54°2.

Lit n° 7 construit le 1 décembre

Date		Température	Acide carboniq. %	Oxygène %
18 décembre,	Appel d'air,	17°		
21 décembre,		11°		
24 décembre,	Appel d'air,	17°		
29 décembre,		13°		
6 janvier,	Odeur faible,	55°	1,7	16,6
9 janvier,		60°		
13 janvier,	Mauvaise odeur,	60°	2,1	13
20 janvier,	Faible odeur,	63°	0,3	18,5
25 janvier,		60°		
27 janvier,	Peu d'odeur,	55°	0	18
3 février,		47°	0,5	13,9
8 février,		50°		
10 février,	(72e jour),	44°	0	17,4

Le lit est démonté le 17 février (79e jour),

La prise est uniforme. Les pots sont vides de liquide.

La céruse est mousseuse.

Production : 688 kilos de céruse pour 3000 kilos de plomb.

Rendement : 22,93 % en 78 jours ou 14,7 % en 50 jours.

Moyenne des températures : 42°4.

Lit n° 8 construit le 2 décembre

Date		Température	Acide carboniq. %	Oxygène %
14 décembre,		37°		
18 décembre,	Dégagement d'air chaud,	40°	0,5	19,9
21 décembre,		35°		
24 décembre,	Dégagement d'air chaud,	50°	0,5	19,7
29 décembre,		45°		
6 janvier,	Faible odeur,	48°	1,1	16,7
9 janvier,		55°		
13 janvier,	Très faible odeur,	59°	1,8	7,6
20 janvier,	Aspiration,	55°	0	19,7
25 janvier,		17°		
27 janvier,	Aspiration,	15°		
3 février,		17°		
8 février,		25°		
10 février,	(71e jour),	24°		

Le lit est démonté le 16 février (77e jour).

La prise est assez bonne, régulière.

Les pots sont vides de liquide. La céruse est mousseuse, sauf en avant où se trouvent des écailles un peu dures.

Production : 895 kilos de céruse pour 3000 kilos de plomb.

Rendement : 29,83 % en 76 jours, ou 19,6 % en 50 jours.

Moyenne des températures : 37°2.

Lit n° 9 construit le 2 décembre

Date		Température	Acide carboniq. %	Oxygène %
18 décembre,	Faible appel d'air,	17°		
21 décembre,		9°		
24 décembre,	Dégagement d'air chaud,	45°	0,5	19,6
29 décembre,		49°		
6 janvier,		35°	1,85	17,5
9 janvier,		56°		
13 janvier,	Mauvaise odeur,	55°	1,6	17,5
20 janvier,	Aspiration,			
25 janvier,		17°		
27 janvier,	Aspiration,	17°		
3 février,		17°		
8 février,		8°		
10 février,	(71e jour),	17°		

Le lit est démonté le 16 février (77e jour).
La prise est peu importante, mais régulière.
Les pots sont vides de liquide.
Production : 683 kilos de céruse pour 3000 kilos de plomb.
Rendement : 22,77 % en 76 jours, ou 14,98 % en 50 jours.
Moyenne des températures : 28°5.

Lit n° 10 construit le 3 décembre

Date		Température	Acide carboniq. %	Oxygène %
18 décembre,	Faible dégagement d'air tiède,	25°	0,5	19,6
21 décembre,		23°		
24 décembre,	Dégagement d'air chaud,	25°	0,5	20,4
29 décembre,		17°		
6 janvier,	Aspiration,	10°		
9 janvier,		15°		
13 janvier,	Aspiration,	15°		
20 janvier,	Aspiration,			
25 janvier,		35°		
27 janvier,		32°	0	15,3
3 février,		28°	0	15,5
8 février,		20°		
10 février,	(70e jour),	23°	0	15

Le lit est démonté le 15 février (75e jour).
Presque rien.
Production : 447 kilos de céruse pour 2000 kilos de plomb.
Rendement : 22,35 % en 74 jours ou 15,1 % en 50 jours.
Moyenne des températures : 22°3.

La production générale est de 8867 kilos de céruse pour 28000 kilos de plomb ; ce qui représente un rendement de 31,67 % pour une moyenne de 82 jours, ou 19,3 % en 50 jours.

Il est remarquable que la production a été tout à fait irrégulière et sans rapport, ni avec la température, ni avec la composition des gaz.

La température la plus élevée a été celle de 67° ; la moyenne des températures observées est de 43°.

L'aspiration de l'air extérieur s'est faite d'abord par les lits 2, 5, 7 et 9, puis, par 2 et 10, ensuite par les lits 8 et 9. En général, ces lits sont ceux pour lesquels le rendement a été le plus faible ; par exception, le deuxième lit qui a fourni un rendement élevé de 42,4 %, a été pendant deux mois le siège d'une aspiration d'air extérieur.

FABRICATION DE LA CÉRUSE

Les résultats précédents, quoique peu précis, me servent de points de départ pour les recherches que j'entreprends sur la fabrication de la céruse ; pour les motifs indiqués plus haut, je m'efforce surtout de rechercher les conditions qui permettent d'obtenir de la céruse en *écailles dures,* utilisant pour cela du plomb, de l'anhydride carbonique, de l'air, de l'acide acétique, de l'humidité et une température convenable.

Les essais sont effectués dans une très grande étuve à air chaud, dans laquelle j'installe les appareils de fabrication. Ceux-ci comprennent essentiellement un grand cristallisoir en verre, au milieu duquel est placé un trépied en bois supportant les masses de plomb; ce métal et son support sont recouverts d'une cloche tubulée dans laquelle j'amène les gaz réagissants : oxygène, air, acide carbonique. Le joint, entre la cloche et le cristallisoir, est constitué successivement par diverses substances : paraffine, glycérine, eau seule, eau légèrement acidulée, huile, coton.

L'acide acétique est utilisé pur ou impur, concentré ou étendu ; il est placé, tantôt sous la cloche dans un petit cristallisoir au milieu duquel est installé le trépied supportant le plomb, tantôt hors de la cloche, dans un flacon laveur mis à l'intérieur ou à l'extérieur de l'étuve.

La valeur des températures réalisées varie, suivant les cas, depuis 15° jusqu'à 60°. Nous avons vu que dans la fabrication de la céruse par le procédé hollandais, la température variait beaucoup, elle peut atteindre 60° et même davantage.

La plupart des essais ont duré plusieurs semaines.

Les trente-trois expériences que j'ai faites peuvent se classer en trois groupes : le premier groupe comprend douze expériences, que je considère comme préliminaires ; le deuxième groupe se compose de sept essais doubles exécutés en série ; enfin, le troisième groupe est constitué par quatorze expériences qui peuvent être acceptées, surtout les dernières, comme définitives.

PREMIER GROUPE

(ESSAIS PRÉLIMINAIRES)

J'emploie d'abord des lames de plomb auxquelles je substitue bientôt des grilles semblables à celles utilisées dans la fabrication industrielle de la céruse par la méthode hollandaise.

Au début, je me sers d'acide acétique pur des laboratoires, que je remplace ensuite par de l'acide commercial impur, toujours placé dans un cristallisoir sous la cloche.

Le joint, entre la cloche et le cristallisoir, est constitué par de la glycérine, de l'eau ou de la paraffine.

Je fais varier la température, d'une expérience à l'autre, depuis 15° jusqu'à 60°.

Comme gaz, je me sers quelquefois de l'oxygène pur, mais le plus souvent j'emploie l'air atmosphérique ; ce gaz, accompagné ou non d'acide carbonique, en proportions diverses, arrive dans l'appareil par la partie supérieure, d'une manière continue ou intermittente.

Les rendements des essais de ce premier groupe ont été nuls ou très faibles.

EXPÉRIENCE I

Sous la cloche, je place un petit cristallisoir dans lequel je mets un litre d'acide acétique dilué (50 c^3 d'acide acétique cristallisable pour 3 litres d'eau) et le trépied supportant deux lames de plomb, pesant ensemble 2178 grammes. Le joint, entre la cloche et le grand cristallisoir, est constitué par de la glycérine.

Je chauffe à 38°, puis, par aspiration, j'amène dans la cloche un mélange d'air et d'acide carbonique, à raison d'une bulle d'acide carbonique pour quatre bulles d'air.

Au bout de 10 jours, je démonte l'appareil et je pèse les lames de plomb ; l'augmentation de poids est insignifiante.

EXPÉRIENCE II

Les conditions précédentes ne sont donc pas favorables à la production de la céruse. Je vais m'efforcer de les modifier peu à peu, jusqu'à réussite, en ne changeant, autant que possible, qu'une condition à la fois.

Conservant donc l'installation précédente telle quelle, je porte simplement la température à 50°.

Je pèse les lames de plomb les quinzième et vingt-septième jours, et j'arrête l'opération. Tout l'acide est évaporé ; il s'est produit une très légère attaque du plomb. L'augmentation de poids est de 35 grammes ; pour 2178 grammes de plomb, cela représente théoriquement (¹) une production de céruse de 171,5 grammes, c'est-à-dire, 7,87 % en 27 jours ou 14,5 % en 50 jours.

(¹) Dans un travail précédent, j'ai déterminé la composition de plusieurs échantillons de céruse, notamment des céruses Th. Lefebvre et C^{ie}, de Lille. Pour ces dernières, en moyenne, à 100 parties de plomb, correspondent

EXPÉRIENCE III

Les lames de l'expérience II étant dépouillées, autant que possible, de leur céruse, je les réinstalle sur le trépied ; elles pèsent 1027 et 1152 grammes, en tout 2179 grammes. Je maintiens constantes toutes les conditions précédentes, sauf l'acide acétique, que je supprime totalement.

Je fais passer les gaz, par aspiration, pendant treize jours.

L'attaque est nulle.

EXPÉRIENCE IV

Gardner indique que les corps électronégatifs : étain, graphite, coke, favorisent la production de la céruse. Pour utiliser ce renseignement, j'installe l'une des grilles de plomb sur du coke, tandis que la deuxième grille est placée sur le bois du trépied.

Les grilles pèsent 1156 grammes et 980 grammes.

Dans le petit cristallisoir, sous la cloche, je mets de l'acide acétique cristallisable. Le joint est constitué par de l'eau et la température est maintenue constante à 40°.

Je lance d'abord un courant d'oxygène pur, pendant deux jours, puis j'emploie un mélange d'oxygène et d'acide carbonique.

Le septième jour, il ne s'est rien produit ; je mets fin à l'essai.

EXPÉRIENCE V

Je conserve l'installation précédente, mais je porte la température à 55°-58°.

J'amène l'oxygène seul, pendant 48 heures, puis je fais arriver, peu à peu, l'acide carbonique, en comptant le nombre de bulles gazeuses qui entrent et qui sortent de l'appareil.

Dès le quatrième jour, l'attaque des lames de plomb est manifeste.

Le sixième jour, tandis qu'il arrive dans l'appareil 28 bulles par minute, il en sort 24 bulles. Il y a donc absorption de 4 bulles par minute. Le septième jour, l'absorption est de 6 bulles par minute. La grille placée sur le bois pèse 950 grammes, elle est blanche ; celle qui repose sur le coke est jaunâtre et pèse 1150 grammes.

Le huitième jour, l'absorption est de 9 bulles par minute.

Le onzième jour, les grilles pèsent 951 grammes et 1152 grammes. Je verse dans le cristallisoir intérieur 100 grammes d'acide acétique cristallisable. Peu de temps après, il n'y a plus absorption, mais il se produit un dégagement abondant de 51 bulles par minute. Peu à peu, le dégagement se ralentit ; quelques heures plus tard, il est réduit à 4,5 bulles par minute ; le lendemain matin, il se produit encore un très faible dégagement gazeux.

125,6 parties de céruse ; par conséquent, une augmentation de 25,6 grammes donne 125,6 grammes de céruse, soit 4,9 fois plus (*Étude sur la composition et la densité des céruses,* par E. Lenoble. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, 1898).

Le quatorzième jour, les grilles pèsent respectivement 935 grammes et 1147 grammes ; *elles sont collantes.*

Le dégagement gazeux observé est vraisemblablement dû à la décomposition de la céruse par l'acide acétique concentré ; de plus, cet acide a pu dissoudre une partie de l'oxyde de plomb qui s'était formé.

EXPÉRIENCE VI

Je conserve les grilles collantes précédentes qui pèsent 935 grammes et 1147 grammes ; j'enlève l'acide concentré, je le remplace par l'acide dilué, je renouvelle l'eau formant le joint entre la cloche et le cristallisoir, je fais arriver un mélange d'oxygène et d'acide carbonique et je maintiens le courant gazeux pendant sept jours. La température oscille entre 55° et 58°.

Au bout de sept jours, les grilles pèsent 936 grammes et 1150 grammes ; l'augmentation de poids étant insignifiante, j'arrête l'expérience.

Des essais précédents, je conclus qu'il est nécessaire :

1° d'employer de l'acide acétique dilué ;

2° *d'opérer dans un milieu fortement humide, car la céruse sèche est décomposée par l'acide dilué.*

EXPÉRIENCE VII

Je prends deux grilles de plomb pesant 1083 grammes et 1110 grammes, je les plonge un instant dans de l'acide acétique dilué, pour les imprégner de cet acide et je les installe sur le trépied, en plaçant l'une d'elles sur un barreau d'étain. Dans le cristallisoir intérieur, je mets 850 c^3 d'acide acétique pur dilué. Le joint entre la cloche et le cristallisoir, est fait avec de la paraffine.

Je chauffe pour réaliser une température d'environ 55° et je fais passer lentement un courant d'air, pendant une huitaine d'heures, puis je fais arriver, en même temps que l'air, de l'anhydride carbonique.

Au bout de cinq jours, il ne s'est encore rien produit ; la température étant montée jusqu'à 60°, je la fais baisser un peu.

Le sixième jour, le thermomètre marque 55° ; j'observe quelques parties blanches sur les grilles, je fais encore baisser la température.

Le septième jour, la température est de 50°, je la fais monter afin d'obtenir environ 55° et je remplace, dans le petit cristallisoir intérieur, l'acide dilué par de l'eau.

Le treizième jour, je mets fin à l'expérience ; la température est de 56°, les grilles pèsent 1084 grammes et 1111 grammes.

Ces expériences me conduisent à faire un essai en supprimant l'eau sous la cloche et en faisant barboter les gaz dans de l'acide acétique dilué ; je vais aussi remplacer l'acide acétique pur par de l'acide commercial.

EXPÉRIENCE VIII

J'opère avec du gaz carbonique seul.

J'emploie une grille de plomb de 1870 grammes qui repose d'un côté sur le trépied en bois, de l'autre côté sur un barreau d'étain. Dans le petit cristallisoir, je mets 500 c^3 d'acide acétique impur dilué (80 c^3 d'acide à 40 % pour 2 litres de solution). Le joint, comme précédemment, est fait avec de la paraffine. La température est de 55°. J'amène immédiatement de l'acide carbonique qui se dégage bulle à bulle.

Le deuxième jour, le thermomètre marque 55°. La céruse apparaît en plusieurs points. Je maintiens le courant d'acide carbonique. Le soir, la température est montée à 57°, les taches blanches ont disparu ; je baisse le régulateur de température.

Le troisième jour, la température est de 52°.

Le sixième jour, je trouve 53°. Le courant d'acide carbonique est arrêté, je le remets en marche.

Le septième jour, la grille pèse 1872 grammes.

Sous l'influence de l'acide carbonique seul, j'obtiens donc une augmentation insignifiante.

EXPÉRIENCE IX

Je conserve le dispositif précédent et je place dans le petit cristallisoir 500 c^3 d'acide acétique dilué. Je fais baisser la température et je continue le dégagement de l'acide carbonique seul.

Le cinquième jour, je n'observe aucune modification et je trouve l'acide carbonique arrêté. Par aspiration, je fais passer bulle à bulle de l'air atmosphérique et je ferme un peu le régulateur de température.

Le sixième jour, le thermomètre marque, le matin : 37°, le soir : 34°.

Le septième jour, le thermomètre marque 34°.

Le neuvième jour, j'augmente la vitesse du courant d'air de manière à dégager 50 litres à l'heure.

Le dixième jour, température : 33°, vitesse de l'air : 30 litres à l'heure.

Le onzième jour, température : 33°5. Je chauffe davantage pour liquéfier la paraffine, afin de pouvoir peser la grille ; son poids est de 1872 grammes. Il n'y a donc aucune augmentation de poids ; pourtant sur les arêtes de la grille, j'observe la présence de quelques points blancs.

EXPÉRIENCE X

Je remonte l'appareil avec la grille précédente, et, tout en maintenant un rapide courant d'air, je fais arriver de l'acide carbonique, bulle à bulle. La température est de 33°.

Le deuxième jour, la température n'a pas changé ; la grille semble s'attaquer en divers points ; je continue l'arrivée des gaz, comme précédemment.

Le troisième jour, j'arrête le dégagement gazeux. Nous sommes le 14 août, je pars en vacances, en laissant l'appareil monté.

Le 6 octobre, je trouve la grille nettement attaquée ; elle pèse 1871 grammes. Il s'est produit quelques écailles de céruse, qui se sont formées en l'absence des courants gazeux. Mettant à profit cette indication, je monte l'expérience suivante.

EXPÉRIENCE XI

Sous la cloche, reposant sur une lame de bois et sur un barreau d'étain, j'installe une grille de plomb pesant 2142 grammes, en présence de 585 c^3 d'acide acétique impur dilué. Je chauffe à 50^0 pour liquéfier la paraffine et former le joint.

Le lendemain matin, je constate la présence de quelques points d'attaque ; je baisse la température et j'amène, pendant une heure seulement, un rapide courant d'air, accompagné d'acide carbonique se dégageant bulle à bulle.

Le deuxième jour, le thermomètre marque 28^{0}5; je fais encore passer, pendant une heure et dans les mêmes conditions, un mélange d'air et d'acide carbonique. Je répète la même opération, matin et soir, pendant une demi-heure, jusqu'au vingt-huitième jour. A ce moment, la grille pèse 2160 grammes, elle est collante et se trouve recouverte d'une faible couche de céruse. Théoriquement, l'augmentation de poids, 18 grammes, correspond à 88,2 grammes de céruse, ce qui représente un rendement de 4,12 $^0/_0$ en 27 jours ou 7,6 $^0/_0$ en 50 jours.

La céruse est mousseuse et friable.

EXPÉRIENCE XII

Je remonte l'appareil avec la grille précédente pesant 2160 grammes. Je fais arriver, pendant cinq jours, de l'acide carbonique, bulle à bulle, tandis que je produis une faible aspiration d'air.

Le sixième jour, l'acide carbonique cesse de se dégager ; je renouvelle l'acide chlorhydrique de l'appareil producteur et je continue le dégagement gazeux, comme précédemment. Le thermomètre marque 30^{0}5.

Le neuvième jour, j'élève la température pour fluidifier la paraffine et peser la grille. Poids trouvé : 2170 grammes.

Je continue l'opération jusqu'au vingt-cinquième jour. La grille pèse 2175 gr.

Augmentation : 15 grammes. Céruse : 73,5 grammes.

Rendement : 3,54 $^0/_0$ pour 25 jours ou 7 $^0/_0$ pour 50 jours.

DEUXIÈME GROUPE D'EXPÉRIENCES

Dans le but de mieux utiliser les gaz, je monte deux appareils semblables, le deuxième recevant les gaz provenant du premier appareil. En général, l'effet produit dans le deuxième appareil fut presque nul.

L'acide acétique est toujours l'acide commercial ; je le place dilué sous la cloche ou dans un flacon laveur installé dans l'étuve et, dans ce cas, j'emploie l'acide dilué ou concentré.

Les joints, entre les cloches et les cristallisoirs, sont toujours constitués par de l'eau.

Les expériences du premier groupe qui ont fourni quelques écailles et les meilleurs rendements, sont presque toujours celles qui ont été exécutées à une température inférieure à 50°. La moyenne des températures, pour les essais qui ont donné de la céruse, est de 42°5. La moyenne des températures dans l'essai industriel, que j'ai suivi, est de 43°.

Thomson indique comme favorables à la production de la céruse, les températures comprises entre 27° et 50°. Moyenne : 38°5.

Dans l'encyclopédie industrielle, on indique comme températures limites : 36° et 60°. Moyenne : 48°.

C'est pourquoi j'ai réalisé tous les essais de ce deuxième groupe à la température de 45° environ.

Les gaz sont constitués par l'air atmosphérique et l'acide carbonique, mélangés dans la proportion de 20 % d'acide carbonique, avec l'intention d'obtenir une céruse riche en hydrate de plomb, semblable à celle qui forme les écailles dures de la maison Th. Lefebvre et Cie.

EXPÉRIENCE XIII

Le premier appareil B, reçoit une grille de plomb pesant 2056 grammes, le deuxième A, une grille pesant 2139 grammes. Dans chacun des cristallisoirs intérieurs, je mets 700 c^3 d'acide acétique impur dilué (80 c^3 d'acide à 40 % pour 2 litres de solution). Les joints des deux côtés sont faits avec de l'eau distillée. Pour éviter l'évaporation rapide de cette eau, je la recouvre, à distance, d'une couche épaisse de coton fixé à une couronne de carton.

Je fais d'abord marcher, bulle à bulle, l'air atmosphérique, puis j'allume le gaz et je m'efforce de maintenir la température au voisinage de 42°5.

Le lendemain, l'attaque des grilles est commencée ; je règle la température et le courant d'air. Température observée : 45° faibles. A deux heures du soir (22 heures après le début de l'opération), je mets en route l'acide carbonique.

Le troisième jour, la prise est très nette, sauf sur la moitié postérieure de la grille A. La vitesse des gaz est réglée de manière à dégager une bulle de gaz carbonique pour quatre à cinq bulles d'air, et ces conditions sont maintenues jusqu'au vingt-troisième jour.

Il reste dans les appareils : 3500 grammes d'eau, 435 c^3 d'acide acétique dilué ; les grilles pèsent : 4410 grammes. Je puis détacher 766 grammes de céruse et il reste 3695 grammes de plomb.

Voici les rendements pour chaque grille : de la grille A j'ai détaché 437 grammes de céruse ; ce qui correspond à 19,96 % en 21 jours, ou à 47,5 %

en 50 jours ; la grille B a fourni 359 grammes de céruse, rendement : 16,49 % en 21 jours ou 39,26 % en 50 jours. Cette grille B a été incomplètement battue.

Pendant l'expérience, il s'est détaché des grilles, peu à peu, de minces écailles de céruse, qui tombèrent dans l'acide acétique. La céruse recueillie en A fut plus abondante que celle provenant de la grille B.

Cet essai a donc donné un rendement satisfaisant de *minces écailles* de céruse.

EXPÉRIENCE XIV

Je remonte deux appareils semblables aux précédents, mais en faisant barboter les gaz dans de l'eau, pour les saturer d'humidité, avant de les introduire sous la première cloche.

L'appareil A (deuxième) possède une grille de plomb pesant 1915 grammes, de l'acide acétique impur dilué : 700 c^3, un joint constitué par 2 litres d'eau distillée.

L'appareil B (premier) a une grille de plomb de 2122 grammes, 700 c^3 d'acide acétique dilué impur, 2 litres d'eau distillée, pour former le joint.

L'installation comprend, en outre, un petit flacon laveur contenant 160 c^3 d'eau distillée.

Pendant une heure, je fais arriver un mélange d'air et d'acide carbonique, à volumes sensiblement égaux, puis, changeant d'idée, je chasse l'acide carbonique, par un violent courant d'air et je maintiens le dégagement de l'air, bulle à bulle.

Le lendemain, l'attaque des grilles étant uniforme, je mets en route le gaz carbonique, qui se dégage, bulle à bulle, de manière à constituer avec l'air un mélange renfermant 66 % de gaz carbonique.

L'opération se poursuit jusqu'au vingt-deuxième jour (vingt jours de dégagement d'acide carbonique).

Cette fois, il n'y a pas eu de poudre de céruse détachée et il ne s'est pas formé d'écailles.

La grille B pèse 2261 grammes, j'en détache 51 grammes de céruse ; la grille A pèse 1936 grammes et donne 62 grammes de céruse. La grille B est humide, sa céruse est complètement en poudre ; la grille A est également humide, mais sa céruse se détache plus facilement et plus complètement que celle de la grille B.

Les rendements sont faibles : 6 et 8 % pour 50 jours.

Les opérations ont été exécutées avec un grand excès de gaz carbonique.

EXPÉRIENCE XV

Je monte un essai, en série, avec :

En A (deuxième), une grille de plomb de 1776 grammes ; de l'acide acétique impur dilué : 700 c^3 ; de l'eau, pour le joint, 2 litres ;

En B (premier), une grille de plomb pesant 2172 grammes ; de l'acide dilué, 700 c^3 ; de l'eau, pour le joint 2 litres.

Avant la cloche B est installé un petit flacon laveur contenant 150 c^3 d'eau. La température est de 45°.

J'amène d'abord de l'air seul, puis, le lendemain, je fais arriver l'acide carbonique, à raison d'une bulle pour environ 10 bulles d'air.

Le dixième jour, je mets fin à l'opération, car aucune attaque ne s'est produite.

Cet essai a été exécuté en employant un très grand excès d'air. Le rendement est nul.

A plusieurs reprises, ayant observé que le volume des bulles gazeuses variait avec de nombreuses conditions, notamment, avec la vitesse des courants gazeux, je décide de ne plus me baser sur le nombre des bulles dégagées, mais d'analyser les gaz, à la sortie des appareils.

Théoriquement, pour la production de la céruse, il faut fournir de l'air contenant 22 $^0/_0$ d'anhydride carbonique; d'autre part, chez MM. Th. Lefebvre et C^{ie}, les écailles dures sont riches en hydrate de plomb; je vais donc m'efforcer de produire un mélange gazeux renfermant 20 $^0/_0$ de gaz carbonique, ce qui, à la sortie des appareils, en tenant compte de l'absorption, doit correspondre à 18 ou 20 $^0/_0$ d'anhydride carbonique.

EXPÉRIENCE XVI

Les appareils sont montés comme précédemment.

Premier appareil B (vers l'arrivée des gaz), grille de plomb de 2158 grammes; acide dilué, 700 c^3 ; eau, pour le joint, 2 litres.

Deuxième appareil A, grille de plomb de 2165 grammes ; acide dilué, 700 c^3 ; eau, pour le joint, 2 litres.

Le petit flacon, placé avant le premier appareil dans l'étuve, contient 100 c^3 d'eau.

Température : 45^0.

Pendant 24 heures, je fais arriver de l'air atmosphérique et, ensuite, un mélange d'air et de gaz carbonique tel qu'à la sortie du deuxième appareil, le gaz contienne encore 18 à 20 $^0/_0$ d'anhydride carbonique.

La prise commence à droite, sur la moitié de la grille B. Il se produit des écailles, qui se détachent et tombent, à partir du cinquième jour.

J'interromps les dégagements gazeux le quinzième jour, et je démonte les appareils le dix-huitième jour. Après avoir détaché la céruse, je pèse les grilles.

Poids de la grille A : 2144 grammes. La perte, en plomb, est donc de 21 gr., ce qui représente 26 grammes de céruse et un rendement de 1,2 $^0/_0$ en 14 jours, ou 4,3 $^0/_0$ en 50 jours.

La grille B fournit un meilleur rendement ; elle pèse, sans céruse, 1972 gr. La portion de cette grille qui n'a pas été attaquée pèse 1329 grammes; la partie attaquée pèse 642 grammes ; le poids de la céruse sèche détachée est de 206 gr., celui de la céruse humide tombée dans l'acide acétique est de 37 grammes ; cela représente, en tout, 250 grammes de céruse humide pour 829 grammes de plomb, soit un rendement de 30,2 $^0/_0$ pour 14 jours ou 107,8 $^0/_0$ en 50 jours.

Cette céruse se présente en *fines écailles*.

EXPÉRIENCE XVII

Les appareils sont encore disposés en série, mais, au lieu de mettre l'acide acétique sous les cloches, je le place dans le flacon laveur, installé dans l'étuve, avant le premier appareil.

Appareil A-Grille de plomb	1892 grammes,
Eau	2 litres.
Appareil B-Grille de plomb	2004 grammes,
Eau	2 litres.

Dans le flacon laveur : Acide acétique dilué 500 c^3.

Température : 45°.

J'amène d'abord l'air bulle à bulle ; le lendemain, je mets en marche le courant d'acide carbonique, de manière à obtenir, à la sortie, un mélange renfermant de 15 à 20 °/₀ d'anhydride carbonique.

Le dixième jour, des gouttelettes incolores apparaissent sur la grille B ; cette grille n'est pas prise.

La grille A est attaquée, mais il ne se produit pas d'écailles.

Le onzième jour, je recueille quelques gouttelettes pour les analyser : elles sont constituées par une solution concentrée d'acétate neutre de plomb.

EXPÉRIENCE XVIII

Je remonte les appareils précédents, en plaçant sous chaque cloche une deuxième grille de plomb, pesant pour A : 1768 grammes, pour B : 1979 gr. La température est de 45°. Je fais arriver continuellement le mélange d'air et d'acide carbonique.

Après six jours de marche, les nouvelles grilles ne sont pas encore prises, mais elles sont recouvertes de gouttelettes incolores.

Je pense que ces résultats négatifs, au point de vue de la production de la céruse, sont dus vraisemblablement à ce que je fais agir trop tôt le gaz carbonique.

EXPÉRIENCE XIX

Les cloches sont encore disposées en série.

L'appareil A (placé le deuxième) reçoit la grille de l'opération précédente qui avait été attaquée et dont j'ai détaché la céruse ; elle pèse 1892 grammes. Je place à côté une grille neuve pesant 1883 grammes.

Dans l'appareil B, près du flacon laveur, se trouve une nouvelle grille de 1869 grammes.

Le joint, dans les deux cloches, est constitué par l'eau acide provenant de l'expérience précédente.

Dans le flacon laveur de l'étuve, je mets de l'acide acétique impur concentré.

Je fais dégager l'air atmosphérique, bulle à bulle.

La température est de 45°.

Le lendemain, la grille B est bien prise ; il n'y a rien sur la grille A. Le soir, la grille A commence à s'attaquer en quelques points ; je continue à faire agir l'air seul.

Le troisième jour, l'attaque ayant progressé, je fais marcher le courant d'anhydride carbonique, toujours dans les mêmes conditions (15 à 20 °/₀, à la sortie). La grille B prend très bien, elle foisonne. L'attaque des grilles A semble s'être arrêtée.

Le dix-huitième jour, je mets fin à l'opération. La grille B est bien prise, les grilles A sont, pour ainsi dire, inattaquées.

Poids des grilles : A (nouvelle), 1892 grammes ; A (ancienne), 1902 grammes; B, 2070 grammes. Je détache de cette dernière 980 grammes de céruse, il reste 1090 grammes de plomb. L'eau est devenue fortement acide. Rendement, en 16 jours : 55,7 °/₀, en 50 jours 174 °/₀. L'augmentation de poids de cette grille est de 201 grammes, cela correspond théoriquement à 984,9 grammes de céruse ou rendement théorique, en 50 jours, 164,6 °/₀.

Il importe d'observer que la grille B est celle qui reçoit directement le mélange gazeux ; les grilles de A ne sont en contact qu'avec le mélange partiellement épuisé venant de B. Cela explique la faible production réalisée dans l'appareil A. Aussi vais-je supprimer, à partir de maintenant, les opérations en série.

TROISIÈME GROUPE D'EXPÉRIENCES

Les essais du troisième groupe peuvent être considérés comme définitifs, surtout les derniers.

Je place dans l'étuve des appareils isolés, tout à fait indépendants l'un de l'autre ; j'en installe d'abord deux, mais à cause de la difficulté de réglage des courants gazeux provenant chacun d'une source unique et pour améliorer le rendement, je simplifie l'installation et je ne fais plus fonctionner qu'un seul appareil.

Dans tous ces essais, j'utilise l'acide acétique commercial quelquefois dilué, mais le plus souvent concentré.

La température est d'abord de 45°, elle est ensuite descendue à 30° et c'est la température de 31° que j'ai adoptée définitivement.

Le mélange gazeux est toujours l'air atmosphérique additionné d'anhydride carbonique, de manière à obtenir, à la sortie de l'appareil, un gaz renfermant environ 20 °/₀ de gaz carbonique.

EXPÉRIENCES XX ET XXI

Chacun des appareils comprend un grand cristallisoir, une cloche tubulée, un trépied en bois supportant les grilles de plomb, des tubes abducteurs pour la circulation des gaz, un flacon laveur renfermant de l'acide acétique commercial de D = 1050. Les joints sont constitués par de l'eau. La température est d'environ 45°.

Appareil A — Première grille : 1750 gr. Deuxième grille : 1901 gr.

Appareil B — Première grille : 1775 gr. Deuxième grille : 1790 gr.

L'air arrive d'abord seul. Au bout de 41 heures, ayant constaté que la prise était commencée sur toutes les grilles, je fais arriver l'acide carbonique (18 à 20 °/₀, à la sortie).

Après dix-neuf jours de fonctionnement (dix-sept pour l'anhydride carbonique), j'arrête l'opération.

Les grilles B sont bien prises. L'ensemble pèse 3881 grammes. Je détache 1550 grammes de céruse, il reste 2330 grammes de plomb ; cela représente un rendement de 43,5 °/₀ pour 17 jours ou 128 °/₀ en 50 jours. L'augmentation de poids étant de 316 grammes, le poids théorique de céruse est de 1548,4 grammes ; or, j'en ai recueilli 1550 grammes

Les grilles A ne sont prises que partiellement. Poids total : 3651 grammes. Céruse : 1005 grammes. Rendement : 27,8 °/₀ en 17 jours, ou 81,7 °/₀ en 50 jours.

EXPÉRIENCES XXII ET XXIII

Appareil A — Première grille : 1831 grammes. Deuxième grille : 1675 grammes. Dans le flacon tubulé, placé dans l'étuve, je mets de l'acide acétique commercial dilué (80 c³ d'acide à 40 °/₀ pour 2 litres de solution). Le joint est fait avec de l'huile de squale : 2 litres.

Appareil B — Première grille : 1802 grammes. Deuxième grille : 1727 grammes. Dans le flacon laveur, dans l'étuve, se trouve de l'acide acétique commercial à 40 °/₀, étendu de son volume d'eau. Joint à l'eau, 2 litres.

L'air se dégage d'abord bulle à bulle ; une demi-heure plus tard, j'allume le gaz de l'étuve et je règle l'appareil de manière à réaliser la température de 45°.

Le quatrième jour, je fais dégager l'acide carbonique (provenant d'un tube). L'écoulement du gaz est d'abord intermittent à cause de la difficulté du réglage. Il est bien régulier, à partir du cinquième jour.

Les grilles de B sont bien prises.

En A, il n'y a rien ou presque rien; je mets fin à cette opération, pour l'appareil A, mais je continue le dégagement gazeux, en B, jusqu'au vingt-huitième jour.

Poids de la céruse recueillie : 1200 grammes.

Rendement : 34 °/₀ pour 23 jours de dégagement de gaz carbonique ou 74 °/₀ en 50 jours.

En A, il y avait certainement manque d'humidité.

EXPÉRIENCES XXIV ET XXV

J'opère avec une quantité insuffisante d'acide acétique et, dans l'un des appareils, je supprime le joint liquide et je le remplace par du coton.

Appareil A — Première grille : 2121 grammes. Deuxième grille : 2142 grammes. Sous la cloche, dans un petit cristallisoir, je mets de l'acide acétique dilué : 350 c³. Le joint est fait avec de l'eau ; 2 litres.

Appareil B — Première grille : 2221 grammes. Deuxième grille : 2111 grammes. Dans un petit cristallisoir, sous la cloche, je place 350 c^3 d'acide acétique dilué. Le joint est constitué par du coton.

Température : 45°.

Je mets en marche le courant d'air atmosphérique et le chauffage.

Le troisième jour, les grilles B étant plus attaquées que les grilles A, j'active le courant d'air en A et je le diminue en B.

Le lendemain, toutes les grilles semblent prises uniformément ; je fais dégager le gaz carbonique (18 à 20 %. à la sortie).

L'opération est arrêtée le trentième jour. Le cristallisoir B est complètement sec.

Appareil A — Première grille : 2115 grammes, rien.

Deuxième grille : 2182 grammes, presque rien.

Appareil B — Première grille : 2188 grammes, peu attaquée.

Deuxième grille : 2410 grammes, bien attaquée.

Cette dernière grille donne 828 grammes de céruse pour 2111 grammes de plomb. Rendement : 39,22 % en 27 jours ou 72,63 % en 50 jours.

La première grille B est prise partiellement ; je la divise en deux parties.

Première partie, peu attaquée : 800 grammes ; céruse : 173 grammes.

Deuxième partie, mieux attaquée : 1388 grammes ; céruse : 262 grammes.

EXPÉRIENCE XXVI

J'avais hâte de réaliser un essai à la température de 30°, que je considérais comme la plus favorable pour la fabrication de la céruse, contrairement à l'avis de certains fabricants qui supposent nécessaire une température plus élevée.

J'installe un seul appareil avec une grille de 1764 grammes. Dans le grand cristallisoir, je place 2 litres d'eau légèrement acidulée par de l'acide acétique commercial. Le flacon laveur, placé dans l'étuve, reçoit de l'acide acétique concentré (40 %).

Je fais arriver l'air seul, j'allume le gaz de l'étuve et je règle la température de manière à obtenir 30° environ. La prise est nette, sauf pour la partie postérieure de la grille, en dedans.

La troisième jour, je fais dégager l'acide carbonique (20 %. à la sortie).

Ces diverses conditions sont maintenues constantes pendant 22 jours.

Poids de la grille : 1922 grammes.

Poids après décapage : 1104 grammes.

Poids de la céruse obtenue : 818 grammes, plus une douzaine de grammes de céruse tombée dans l'eau du cristallisoir = 830 grammes de céruse.

Rendement, en 22 jours : 47 %. ce qui correspond à 102 % en 50 jours.

Le poids du plomb transformé est de 1764 grammes — 1104 grammes = 660 grammes.

Poids théorique de la céruse produite : $\frac{125,6 \times 660}{100} = 828,96$ grammes.

La céruse recueillie est *dure* et se présente sous forme d'*écailles*.

Remarque. — La température de 30° a été maintenue pendant toute la durée de l'expérience ; j'ai quelquefois observé 30°5, mais, le plus souvent, le thermomètre marquait 29°5.

Pour bien fixer la valeur de la température la plus favorable pour la production des écailles dures de la céruse, je fais varier la température dans les expériences qui suivent.

EXPÉRIENCE XXVII

Toutes les conditions précédentes sont maintenues, sauf la température qui est portée à 60°.

J'utilise l'acide acétique concentré de l'expérience précédente. La grille de plomb pèse 2283 grammes. L'air se dégage d'abord seul, pendant 24 heures, puis l'acide carbonique arrive bulle à bulle.

Pendant les 24 premières heures la grille a été attaquée, mais les parties blanches ont ensuite disparu, sauf sur une fraction d'arête.

Je termine l'expérience le 35e jour et je démonte l'appareil le 37e jour.

La grille est presque inattaquée : elle sent fortement l'acide acétique, elle pèse 2293 grammes et ne donne qu'une très petite quantité de céruse *mousseuse* et *collante*.

Cet essai, comparé au précédent, montre nettement l'influence fâcheuse de la température élevée de 60°.

EXPÉRIENCE XXVIII

Je monte un appareil identique au précédent, en utilisant l'acide acétique concentré qui restait dans le flacon laveur et en renouvelant l'eau du grand cristallisoir.

Poids de la grille : 2348 grammes.

Température : 30°.

Comme d'habitude, je fais d'abord arriver l'air atmosphérique seul pendant 24 heures, puis j'emploie un mélange d'air et de gaz carbonique (20 °/₀, à la sortie).

Le dixième jour, l'attaque est très satisfaisante. Pour achever de connaître l'influence d'une température plus élevée, je chauffe davantage.

Le onzième jour, le thermomètre marque 45°. La proportion de gaz carbonique dans le gaz sortant de l'appareil est toujours de 20 °/₀.

Le douzième jour, la température est montée à 60°. Je la maintiens telle jusqu'au vingt-quatrième jour.

L'attaque de la grille paraît assez bonne ; j'observe une partie jaune et quelques pointes noircies.

La céruse est *feuilletée*, *molle* et *collante*.

La grille pèse 2471 grammes. Augmentation de poids : 123 grammes ; ce qui correspond théoriquement à 603,5 grammes de céruse.

Rendement en 22 jours : 25,67 °/₀, ou 58,3 °/₀ en 50 jours.

Ce rendement est faible.

EXPÉRIENCE XXIX

Je vais opérer dans des conditions identiques aux précédentes, mais en plaçant l'acide acétique concentré dans un flacon laveur, mis hors de l'étuve, par conséquent à la température ordinaire.

Poids du plomb : 2235 grammes.

Eau : 2 litres.

A l'extérieur, dans le flacon laveur, je mets de l'acide acétique commercial concentré (40 %).

Je fais agir d'abord l'air atmosphérique et la chaleur, puis, après quarante heures, je mets en route le gaz carbonique, de manière à obtenir, à la sortie de l'appareil, un mélange renfermant 20 % d'anhydride carbonique.

J'arrête l'opération le douzième jour et je pèse la grille avec son support. Poids total : 2600 grammes (le support pèse 300 grammes). L'augmentation de poids correspond à un rendement théorique de 71,25 % de céruse, en 50 jours. La céruse est *très belle*, elle est analogue à celle obtenue dans la vingt-sixième expérience.

Je remonte l'appareil et, peu à peu, je fais monter la température jusqu'à 60° (intérieur de la cloche). Je maintiens cette température constante jusqu'au vingt-cinquième jour.

Poids total, avec support : 2783 grammes.

L'augmentation de poids, depuis treize jours, correspond à un rendement théorique de 174 %, pour 50 jours. L'augmentation totale de 248 grammes représente une production théorique de 1215 grammes de céruse. J'ai pu détacher 1127 grammes de céruse *feuilletée*.

Malgré le relèvement de la température, le rendement est très satisfaisant (118,2 %, pour 50 jours), mais la nature de la céruse s'est modifiée ; celle-ci n'est ni *dure*, ni en *écailles*.

EXPÉRIENCE XXX

J'essaie maintenant une température inférieure à celle de trente degrés ; j'opère à la température ordinaire du commencement du mois d'avril.

Poids de la grille : 2150 grammes.

L'acide acétique concentré à 40 % est placé hors de l'étuve.

L'air se dégage seul pendant 24 heures, puis j'amène le gaz carbonique (20 %, à la sortie). Le dégagement gazeux est maintenu pendant vingt-trois jours.

Poids de la grille : 2240 grammes.

L'augmentation de poids correspond théoriquement à 441 grammes de céruse. Je détache 350 grammes de céruse *mousseuse*, présentant quelques plaques lisses à la partie inférieure.

Je n'obtiens pas de céruse en *écailles dures*, mais la température ordinaire paraît moins défavorable que la température de 60°.

EXPÉRIENCE XXXI

J'opère, de nouveau, à 30°, mais en plaçant l'acide dilué sous la cloche.

Grille de plomb : 2297 grammes.

Acide acétique dilué (40 c^3 d'acide à 40 %, pour 1 litre) : 700 c^3.

Eau, pour le joint : 2 litres.

L'air agit seul, puis, après 24 heures, l'acide carbonique se dégage, à la façon ordinaire (20 %, à la sortie), pendant vingt-trois jours.

Poids de la grille : 2390 grammes.

Augmentation de poids : 93 grammes, qui correspond théoriquement à 455 grammes de céruse.

Je recueille 385 grammes de céruse *pulvérulente,* contenant quelques plaques minces. Rendement : 36,4 % en 50 jours.

EXPÉRIENCE XXXII

Toutes les tentatives faites pour modifier les conditions de la vingt-sixième expérience n'ont donc pas abouti à des résultats satisfaisants. Je remets en route un essai absolument semblable à celui de la vingt-sixième expérience.

Température : 31°, dans la cloche.

Acide acétique commercial concentré, placé dans l'étuve.

Première grille de plomb : 2203 grammes.

Deuxième grille de plomb : 2151 grammes.

Le joint est fait avec de l'eau légèrement acidulée.

Pendant 24 heures, l'air atmosphérique se dégage seul ; je fais, ensuite, arriver du gaz carbonique (20 %, à la sortie), pendant trente-sept jours.

Dans cet essai, comme dans tous les précédents, les gaz pénètrent dans la cloche par la partie supérieure et en sortent par la partie inférieure.

Poids de la céruse recueillie : 1890 grammes.

Rendement, en 50 jours : 58,6 %.

Les parties verticales de la grille intérieure sont moins attaquées que les autres.

Cette céruse se présente sous forme d'*écailles épaisses, très dures.*

En dégageant quatre bulles d'air, pour une bulle de gaz carbonique, cela représente environ, à la vitesse utilisée,

pour l'air	1 litre, en 40 minutes,
pour CO^2,	1 litre, en 180 minutes.

Cette quantité de gaz carbonique correspond à 8 litres dégagés en 24 heures, et à 296 litres, pour 37 jours. Théoriquement, ce gaz peut transformer, en céruse, 4 kilogrammes de plomb ; or, je n'en ai transformé que 1438 grammes, c'est-à-dire, un peu plus d'un tiers. Par conséquent, pendant la fabrication de la céruse, cela se comprend aisément, tout l'acide carbonique n'est pas utilisé. Pratiquement, il faut en employer deux ou trois fois plus que la quantité théorique.

Enfin, je mets en route un dernier essai.

EXPÉRIENCE XXXIII

Je place sous la cloche quatre fragments de grille de plomb pesant respectivement : 2290 grammes, 988 grammes, 982 grammes et 370 grammes. Total : 4630 grammes.

Le joint est fait avec de l'eau : 2 litres.

Le flacon laveur, placé dans l'étuve, contient de l'acide acétique commercial concentré (40 %). La température est maintenue, dans l'intérieur de la cloche, à 31°.

Les gaz arrivent par la partie inférieure et sortent par la partie supérieure de la cloche, de manière qu'ils puissent s'élever peu à peu.

L'air est amené seul pendant 24 heures, puis vient un mélange d'air et d'acide carbonique ; ce mélange gazeux est tel, qu'il se dégage, par seconde, 1 bulle de gaz carbonique et 4,5 bulles d'air. Ce régime est maintenu pendant 35 jours. A cause de la période des vacances, les pesées n'ont été effectuées que 29 jours plus tard.

Poids total : 4955 grammes.

Poids séparés,	2415 gr.	1060 gr.	1020 gr.	385 gr.
Poids initiaux,	2290 gr.	988 gr.	982 gr.	370 gr.
Poids après décapage,	1656 gr.	702 gr.	775 gr.	252 gr.
Céruse recueillie,	792,5 gr.	357,5 gr.	258,75 gr.	147,5 gr.
Rendement	32,8 %	33,7 %	25,4 %	38,3 %

Poids total de la céruse : 1555 grammes.

Rendement général, en 35 jours : 33,6 %, en 50 jours : 48 %.

La céruse est en *plaques*, d'une *épaisseur moyenne*, elle est d'une *bonne dureté*.

Le décapage s'est accompli facilement, sans fournir de poudre.

CONCLUSION

Les écailles dures prennent donc naissance dans les conditions suivantes : en faisant agir, à la température de 30°-31°, un mélange d'air et de gaz carbonique, imprégné d'acide acétique, sur du plomb placé dans une atmosphère humide.

J'ai réalisé l'opération dans une grande étuve à air. L'appareil se composait d'une cloche tubulée munie de tubes abducteurs et d'un flacon laveur mis en tête de l'installation dans l'étuve même.

Le joint entre le cristallisoir et la cloche était constitué par de l'eau ordinaire faiblement chargée d'acide acétique.

Sous la cloche se trouvait un trépied en bois supportant les grilles de plomb.

Le flacon laveur contenait de l'acide acétique commercial concentré, à 40 %.

Les gaz, après avoir traversé cet acide, pénétraient dans la cloche par la partie supérieure et en sortaient par la partie inférieure.

Ces gaz se composaient d'abord d'air atmosphérique qui arrivait seul pendant 24 heures, pour amorcer l'attaque du plomb, puis d'un mélange d'air et d'acide carbonique tel qu'à la sortie des appareils, le gaz renfermait encore 20 % d'anhydride carbonique.

En réunissant toutes ces conditions il se produit de la céruse *dure,* sous forme d'*écailles*. De plus, comme le montrent les résultats que j'ai obtenus, le rendement est notablement amélioré ; il peut être aisément doublé.

SESSIONS DES 26 ET 27 AVRIL 1922

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première Section

Mercredi et jeudi, 26 et 27 avril. — La Section constitue son Bureau, comme il suit :

Président : M. M. d'Ocagne ;
Vice-Présidents : M. Ch.-J. de la Vallée Poussin ;
M. Lecat ;
Secrétaire : M. Dutordoir.

Elle maintient au concours la question arrêtée dans la séance du 7 avril 1921 :

Exposer et améliorer, si possible, l'état actuel de nos connaissances concernant le Principe de Relativité, spécialement au point de vue de la Mécanique et de l'Astronomie.

M. Alliaume fait la communication suivante :

Sur la substitution d'une fonction linéaire à une fonction quelconque d'une variable dans les Mathématiques appliquées et spécialement en Astronomie.

1. Une fonction $y = f(x)$ d'une variable doit être utilisée dans le voisinage du point $x = x_0$, à savoir dans un intervalle symétrique par rapport à ce point, $(x_0 - h, x_0 + h)$. On désire lui substituer une fonction linéaire dans des conditions qui seront définies comme les plus avantageuses. — Dans les Mathématiques

appliquées, et spécialement en Astronomie et en Géodésie, on utilise ordinairement les deux premiers termes d'un développement en série de Taylor,

$$y = \eta + f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0),$$

avec la valeur $\eta = 0$. En agissant ainsi, on considère toute différence $(x - x_0)$ appartenant à l'intervalle $(-h, +h)$ comme assez petite pour que le produit de son carré par $f''(x_0)$ soit négligeable. On peut aussi bien donner à η une valeur quelconque dont l'ordre de grandeur soit celui de $h^2f''(x_0)$. — Je me propose de modifier la fonction linéaire habituellement adoptée en attribuant à η une valeur différente de zéro, en principe de l'ordre de grandeur de $h^2f''(x_0)$, et choisie *de manière à tenir compte de la répartition, dans l'intervalle* $(x_0 - h, x_0 + h)$, *des probabilités que la fonction étudiée soit utilisée aux divers points de cet intervalle.*

2. Soit Pdx la probabilité que la fonction soit utilisée dans l'intervalle $(x, x + dx)$; P est une fonction de $(x - x_0)$ qui sera choisie d'après les circonstances du problème dans lequel se rencontre $f(x)$, et qui doit être considérée comme faisant partie des données de ce problème.

En vue des applications on peut prévoir deux types pour la fonction P.

Lorsque les limites $(x_0 - h, x_0 + h)$ sont imposées par la nature du problème, de sorte que la solution de celui-ci perdrait sa signification en dehors de cet intervalle, il semble naturel d'attribuer à P une forme parabolique

$$P = P_0\left[1 - \frac{(x - x_0)^2}{h}\right]$$

l'annulant aux limites de l'intervalle proposé, et le faisant passer en x_0 par un maximum $P_0 = \frac{3}{4h}$ déterminé par la condition que, dans cet intervalle, $\int Pdx = 1$.

C'est une probabilité parabolique qu'on appliquera dans la recherche de l'instant d'un phénomène nécessairement compris entre deux instants calculés à l'avance et dont l'instant moyen est adopté comme solution de première approximation. Ceci se rencontre, par exemple, dans la prédiction des passages d'une planète devant le Soleil. Lors du passage de Mercure en 1914, 6 novembre, temps moyen de Paris, le premier contact extérieur a commencé à $22^h5^m18^s,6$ et fini à $22^h7^m9^s,6$; pour un point quelconque de la Terre cette phase a eu lieu en un instant compris entre ces deux limites, et, dans le calcul de cet instant, on adopte comme première approximation l'instant moyen $22^h6^m14^s,1$, instant du phénomène pour un observateur géocentrique.

Lorsque l'étendue $2h$ de l'intervalle possible est laissée à l'appréciation du calculateur, de manière qu'il ne soit pas, strictement, incompatible avec la nature du problème d'augmenter indéfiniment cet intervalle, il paraît indiqué d'attribuer à P la forme exponentielle

$$P = P_o\, e^{-k^2(x-x_o)^2}.$$

La quantité positive P_o sera déterminée par la condition $\int P dx = 1$; et le paramètre k^2 est proportionnel à la courbure en x_o de la ligne représentative de la fonction P, d'autant plus grand, par conséquent, que les probabilités d'utiliser la fonction proposée aux divers points x se groupent plus étroitement autour du point x_o. — En utilisant les notations

$$\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}, \qquad \Theta(t) = \int_o^t \theta(t) dt,$$

on obtient

$$P_o = k : \sqrt{\pi}\, \Theta(t).$$

C'est une probabilité exponentielle qu'on appliquera, par exemple, dans la détermination d'une constante instrumentale. Ainsi, dans l'astrolabe à prisme, un certain angle a pour valeur théorique 60° ; le calcul de sa vraie valeur comporte la résolution d'une équation dans laquelle on adopte 60° comme racine de première approximation ; les valeurs numériques de h et k auront été estimées d'après le soin apporté à la construction de l'instrument.

3. En un point x quelconque, l'erreur commise en substituant la fonction linéaire à la fonction proposée est

$$\Delta y = f(x) - \eta - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0).$$

A chaque valeur de η correspond, pour une même valeur de x, une valeur de la fonction $P\Delta y$. — Convenons de considérer comme fonction linéaire la plus avantageuse la fonction linéaire de la forme

$$y = \eta + f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0),$$

η ayant *la valeur pour laquelle, dans l'intervalle considéré, la plus grande valeur absolue du produit* $P\Delta y$ *prend sa valeur minimum.*

Dans les applications on écrira

$$\Delta y = -\eta + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0 + \lambda x - \lambda x_0),$$

et il sera nécessaire pour poursuivre les calculs d'attribuer à l'indéterminée λ, comme hypothèse simplificatrice compatible avec l'approximation du problème, une valeur numérique qui ne soit pas extérieure à l'intervalle $(0,1)$; nous ferons constamment $\lambda = 0$.

La correction η est de même signe que $f''(x_0)$, avec une valeur absolue moindre que $\frac{h^2}{2} f''(x_0)$. — Dans la parabole ayant la direction de l'axe des y pour direction asymptotique et osculatrice en x_0 à la ligne représentative de la fonction proposée, la fonction linéaire cherchée définit une sécante parallèle à la tangente en ce point et appartenant à la bande limitée par cette tangente et la sécante passant par les points d'intersection de la parabole et des parallèles à l'axe des y ayant pour abscisses $(x_0 - h)$ et $(x_0 + h)$.

Lorsque la probabilité est constante, on retrouve naturellement le polynome le plus approximatif, à savoir, dans l'hypothèse simplificatrice actuelle $\lambda = 0$,

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{h^2}{4} f''(x_0).$$

4. Dans le cas d'une *probabilité parabolique,* l'équation $\frac{d(P\Delta y)}{dx} = 0$ admet la racine $x_1 = x_0$, et deux racines x_2 telles que

$$(x_2 - x_0)^2 = \frac{h}{2} + \frac{\eta}{f''(x_0)};$$

la valeur absolue de chacune des deux différences $(x_2 - x_o)$ est moindre que h. Les valeurs de $P\Delta y$ correspondant à la racine x_1 et aux deux racines x_2 sont

$$(P\Delta y)_1 = - P_o \eta, \qquad (P\Delta y)_2 = \frac{P_o}{2h^2 f''(x_o)} \left[\frac{1}{2} h^2 f''(x_o) - \eta \right]^2 ;$$

$(P\Delta y)_1$ et $(P\Delta y)_2$ sont de signes contraires, $(P\Delta y)_2$ ayant celui de $f''(x_o)$; de plus, quel que soit ce signe, et dans l'intervalle admissible pour η, les dérivées de $(P\Delta y)_1$ et $(P\Delta y)_2$ par rapport à η sont de même signe ; et la valeur cherchée de η est celle qui, appartenant au susdit intervalle, annule la somme $(P\Delta y)_1 + (P\Delta y)_2$; c'est

$$\eta = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} h^2 f''(x_o) ;$$

d'où la fonction linéaire la plus avantageuse dans le cas d'une probabilité parabolique :

$$y = f(x_o) + (x - x_o) f'(x_o) + 0{,}08589\ldots h^2 f''(x_o).$$

5. Dans l'hypothèse d'une *probabilité exponentielle,* l'un des trois extrema a pour abscisse $x_1 = x_o$, et les deux autres des abscisses x_2 telles que

$$(x_2 - x_o)^2 = \frac{2\eta}{f''(x_o)} + \frac{1}{k^2}.$$

Les valeurs de ces extrema sont

$$(P\Delta y)_1 = - P\,\eta, \qquad (P\Delta y)^2 = P_o \frac{f''(x_o)}{2ek^2} e^{-\frac{2k^2\eta}{f''(x_o)}} ;$$

$(P\Delta y)_1$ et $(P\Delta y)_2$ sont de signes contraires, celui-ci ayant le signe de $f''(x_o)$; de plus, quel que soit ce signe, $(P\Delta y)_1$ et $(P\Delta y)_2$ varient dans le même sens avec η.

La valeur de η qui annule la somme $(P\Delta y)_1 + (P\Delta y)_2$ est la racine de l'équation

$$\eta = \frac{f''(x_o)}{2ek^2} e^{-\frac{2k^2\eta}{f''(x_o)}}$$

En désignant par ξ la racine de l'équation

$$\xi e^{1+\xi} = 1,$$

à savoir

$$\xi = 0{,}278\,464\,6\ldots,$$

on obtient pour la racine η

$$\eta = \frac{\xi f''(x_0)}{2k^2}.$$

Cette valeur ne peut être adoptée dans le polynome linéaire que si

$$(x_2 - x_0)^2 \leqslant h^2,$$

c'est-à-dire que si

$$kh \geqslant \sqrt{1+\xi} \qquad \text{ou} \qquad 1{,}130\,684\ldots$$

S'il n'en est pas ainsi, la valeur de η qui doit être adoptée est celle pour laquelle est nulle la somme de $(\mathrm{P}\Delta y)_1$ et de ce que devient $\mathrm{P}\Delta y$ quand on y fait $x - x_0 = \pm h$; c'est

$$\eta = \frac{1}{2}\,\frac{h^2 e^{-k^2h^2}}{1 + e^{-k^2h^2}}\, f''(x_0).$$

En résumé :

$$kh \leqslant 1{,}130\,684\ldots,\quad y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}\,\frac{h^2e^{-k^2h^2}}{1+e^{-k^2h^2}}\, f''(x_0),$$

$$kh \geqslant 1{,}130\,684\ldots,\quad y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{0{,}139\,232\ldots}{k^2}\, f''(x_0);$$

dans ce dernier cas l'intervalle possible $2h$ est, eu égard à k, assez grand pour que le terme complémentaire soit indépendant de son étendue.

Le n° 6 ci-dessous se termine par une table renfermant les valeurs de la fonction

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-t^2}}{1+e^{-t^2}}$$

pour des valeurs de l'argument t allant de 0,0 à 1,5, de 0,1 en 0,1.

6. La définition des conditions les plus avantageuses est, en principe, assez arbitraire. La méthode qui vient d'être exposée

prenant le nom de *méthode la plus approximative,* celle qui va l'être repose sur une définition qui permet de l'appeler *méthode moyennement la plus approximative.*

Eu égard à ce que $\int_{x_0-h}^{x_0+h} P dx = 1$, c'est pour une même valeur de η, à savoir

$$\eta = \frac{1}{2}\int_{x_0-h}^{x_0+h} P(x - x_0)^2 f''(x_0 + \lambda x - \lambda x_0) dx,$$

que, dans l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$: 1° la somme $\int P\Delta y dx$ des produits d'une erreur Δy par la probabilité P de la commettre est égale à zéro ; 2° la somme $\int P(\Delta y)^2 dx$ des produits du carré d'une erreur Δy par la probabilité P de la commettre est minimum.

Convenons maintenant d'adopter comme valeur la plus avantageuse de η ce que devient l'expression ci-dessus dans l'hypothèse simplificatrice $\lambda = 0$. D'où la fonction linéaire

$$y = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{1}{2}\, f''(x_0)\int_{x_0-h}^{x_0+h} P(x - x_0)^2 dx. \text{ (1)}$$

Si la probabilité P était constante, nécessairement égale à $(1 : 2h)$, on aurait

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{h^2}{6} f''(x_0).$$

Dans le cas d'une probabilité parabolique

$$y = f(x_0) + (x_0 - x) f'(x_0) + \frac{h^2}{10} f''(x_0) ;$$

et dans celui d'une probabilité exponentielle

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{4k^2}\, \frac{\Theta(kh) - kh\theta(kh)}{\Theta(kh)} f''(x_0) :$$

---

(1) En écrivant

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \frac{\int_{x_0-h}^{x_0+h} P(x - x_0)^2 dx}{\int_{x_0-h}^{x_0+h} P dx}$$

on terminerait le calcul en ne considérant P qu'à un facteur près.

le terme complémentaire, lorsque kh augmente indéfiniment, tend vers $\frac{0{,}25}{k^2} f''(x_o)$; lorsque kh prend la valeur limite $\sqrt{1+\xi}$ rencontrée dans la méthode la plus approximative, le terme complémentaire vaut

$$\frac{0{,}1501\ldots}{k^2} f''(x_o).$$

La table sommaire ci-dessous renferme les valeurs de la fonction

$$\Phi = \frac{\Theta(t) - t\,\theta(t)}{4\Theta(t)}$$

pour des valeurs de l'argument t allant de 0,0 à 1,5, de 0,1 en 0,1; il y aura lieu de reprendre ce calcul pour des valeurs de l'argument prises de 0,01 en 0,01.

t	φ	Φ	t	φ	Φ
0,0	0,250 00	0,000 00	0,8	0,172 62	0,089 65
0,1	0,248 75	0,001 65	0,9	0,153 95	0,108 28
0,2	0,245 00	0,006 00	1,0	0,134 47	0,126 86
0,3	0,238 75	0,014 65	1,1	0,114 85	0,144 87
0,4	0,230 40	0,025 54	1,2	0,095 78	0,161 89
0,5	0,218 91	0,038 96	1,3	0,077 81	0,177 49
0,6	0,205 48	0,054 45	1,4	0,061 73	0,191 58
0,7	0,189 95	0,071 52	1,5	0,047 68	0,203 83

7. La méthode moyennement la plus approximative se prête à l'extension au cas d'un *intervalle possible non symétrique* par rapport à x_o. Appelons $(x_o - h')$ et $(x_o + h'')$ les limites inférieure et supérieure de cet intervalle, et donnons à la fonction linéaire la plus avantageuse la forme

$$y = \eta + f(x_o) + \epsilon(x - x_o) + (x - x_o)f'(x_o),$$

moyennant deux indéterminées η et ϵ dont la deuxième devra s'annuler dans le cas particulier $h' = h''$ d'un intervalle symétrique.

Dans le calcul de ces deux indéterminées, nous obtiendrons cette fois des valeurs différentes suivant que les conditions les plus avantageuses expriment la nullité de la somme des $P\Delta y$ ou le minimum de la somme des $P(\Delta y)^2$. — Pour simplifier les notations, nous écrirons $\int$ au lieu de $\int_{x_0-h'}^{x_0+h''}$, $\int^{'}$ au lieu de $\int_{x_0}^{x_0-h'}$, et $\int^{''}$ au lieu de $\int_{x_0}^{x_0+h''}$; et nous introduirons immédiatement l'hypothèse simplificatrice $\lambda = 0$.

En définissant la fonction linéaire la plus avantageuse celle pour laquelle la somme des produits $P\Delta y$ est nulle dans chacun des intervalles $(x_0 - h', x_0)$ et $(x_0, x_0 + h'')$, on obtient :

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} f''(x_0) \frac{\int^{'} P(x-x_0)dx \int^{''} P(x-x_0)^2 dx - \int^{''} P(x-x_0)dx \int^{'} P(x-x_0)^2 dx}{\int^{'} Pdx \int^{''} P(x-x_0)dx - \int^{''} Pdx \int^{'} P(x-x_0)dx},$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} f''(x_0) \frac{\int^{'} Pdx \int^{''} P(x-x_0)^2 dx - \int^{''} Pdx \int^{'} P(x-x_0)^2 dx}{\int^{'} Pdx \int^{''} P(x-x_0)dx - \int^{''} Pdx \int^{'} P(x-x_0)dx}.$$

D'autre part, si on considère comme fonction linéaire la plus avantageuse celle pour laquelle la somme des produits $P(\Delta y)^2$ est minimum dans tout l'intervalle $(x_0 - h', x_0 + h'')$, on obtient les valeurs

$$\eta_2 = -\frac{1}{2} f''(x_0) \frac{\int P(x-x_0)dx \int P(x-x_0)^3 dx - \left[\int P(x-x_0)^2 dx\right]^2}{\int P(x-x_0)^2 dx - \left[\int P(x-x_0)dx\right]^2},$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) \frac{\int P(x-x_0)^3 dx - \int P(x-x_0)dx \int P(x-x_0)^2 dx}{\int P(x-x_0)^2 dx - \left[\int P(x-x_0)dx\right]^2}, \quad (^1)$$

---

(1) Dans le calcul de η_1 et ϵ_1, il suffit de considérer P à un facteur près. Pour qu'il en soit de même dans le calcul de η_2 et ϵ_2, il faut, dans les expressions de

qui, pour une fonction P symétrique par rapport à x_o, se réduisent à

$$\eta_2 = \frac{1}{2} f''(x_o) \int \mathrm{P}(x - x_o)^2 dx, \quad \epsilon_2 = 0$$

et font retrouver, comme il était nécessaire, la forme de la fonction linéaire la plus avantageuse correspondante obtenue pour un intervalle symétrique par rapport à x_o.

Pour exprimer les résultats relatifs au cas particulier d'une fonction P exponentielle, posons

$$\theta_o = \theta(0) \text{ ou } \frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ ou } 1{,}128\,38\ldots,$$

$$\theta' = \theta(kh'), \quad \theta'' = \theta(kh''),$$
$$\Theta' = \Theta(kh'), \quad \Theta'' = \Theta(kh'').$$

Dans cette hypothèse de la fonction

$$\mathrm{P} = \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-k^2(x - x_o^2)}}{\Theta' + \Theta''},$$

et suivant la première définition de la fonction linéaire moyennement la plus avantageuse,

$$\eta_1 = \frac{(\theta_o - \theta')(\Theta'' - kh''\theta'') + (\theta_o - \theta'')(\Theta' - kh'\theta')}{(\theta_o - \theta')\Theta'' + (\theta_o - \theta)\Theta'} \cdot \frac{f''(x_o)}{4k^2},$$

$$\epsilon_1 = \frac{\Theta' h''\theta'' - \Theta'' h'\theta'}{(\theta_o - \theta')\Theta'' + (\theta_o - \theta'')\Theta'} \cdot \frac{f''(x_o)}{2},$$

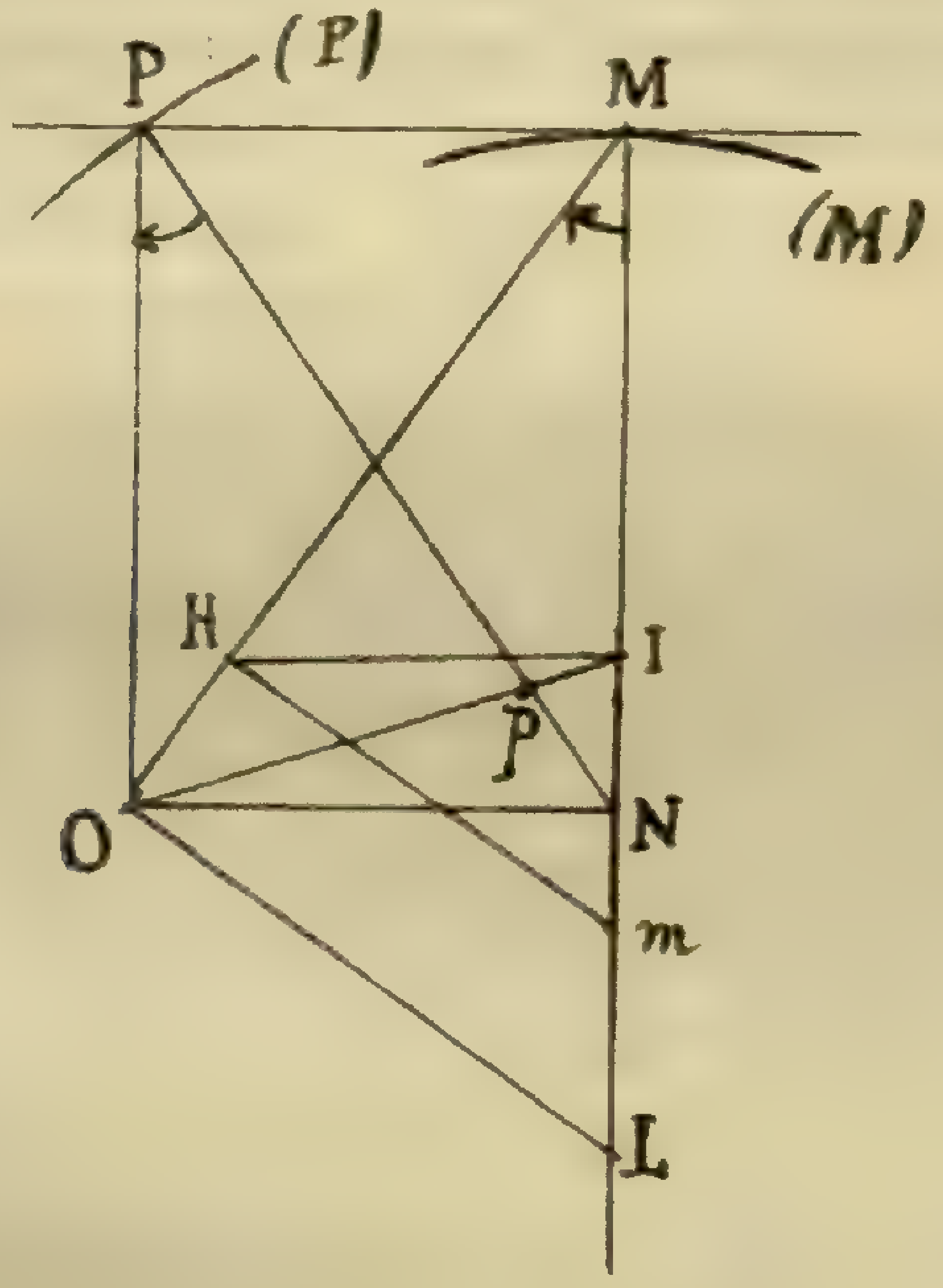
tandis que, pour une probabilité constante, et nécessairement égale à $[1 : (h' + h'')]$,

$$\eta_1 = \frac{h'h''}{6} f''(x_o), \quad \epsilon_1 = \frac{h'' - h'}{3} f''(x_o).$$

---

ceux-ci, rétablir des facteurs $\int \mathrm{P}dx$ qui assurent à chaque terme le même nombre de lettres P.

M. d'Ocagne présente la remarque élémentaire qui suit *sur le centre de courbure des podaires :* « Dans mon *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (T. I, p. 143), je déduis la construction du centre de courbure des podaires de celle des points d'une caustique. J'avais précédemment obtenu cette construction par la considération de la normale au lieu de l'extrémité de la sous-normale polaire (*Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimale,* 1896, p. 288). Je vais faire voir qu'il est très facile de l'établir directement par le procédé que voici :



« En appliquant successivement aux variations infiniment petites simultanées des angles NPO et NMO la formule fondamentale (V) de mon *Cours de Géométrie pure et appliquée* (T. I, p. 130), on a, en appelant m et p les centres de courbure de la courbe (M) donnée et de sa podaire (P) par rapport à O,

$$d\widehat{\mathrm{P}} = d(\mathrm{P})\left(\frac{1}{\mathrm{P}p} - \frac{1}{\mathrm{PN}}\right) = \frac{p\mathrm{N}\cdot d(\mathrm{P})}{\mathrm{P}p\cdot \mathrm{PN}},$$

$$d\widehat{\mathrm{M}} = d(\mathrm{M})\left(\frac{1}{\mathrm{M}m} - \frac{1}{\mathrm{ML}}\right) = \frac{m\mathrm{L}\cdot d(\mathrm{M})}{\mathrm{M}m\cdot \mathrm{ML}},$$

OL étant la perpendiculaire élevée en O à MO. De plus, la formule fondamentale (II) (*Loc. cit.*, p. 126) montre que

$$\frac{d(\mathrm{P})}{\mathrm{PN}} = \frac{d(\mathrm{M})}{\mathrm{M}m}.$$

« L'égalité de $d\widehat{\mathrm{P}}$ et $d\widehat{\mathrm{M}}$ se traduit donc par

$$\frac{p\mathrm{N}}{\mathrm{P}p} = \frac{m\mathrm{L}}{\mathrm{ML}}.$$

« Abaissant du centre de courbure *m* la perpendiculaire *m*H sur OM, puis de H la perpendiculaire HI sur la normale MN, nous transformons cette égalité en

$$\frac{p\mathrm{N}}{\mathrm{P}p} = \frac{\mathrm{IN}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{IN}}{\mathrm{PO}},$$

qui prouve que *le centre de courbure p est sur la droite* OI. Telle est précisément la construction visée.

« On peut remarquer que, *si le rayon de courbure* Mm *est double de la normale polaire* OL, *cette construction donne le centre de courbure p à l'infini sur* ON, et, par suite, que, dans ce cas, *le point* P *est d'inflexion sur la podaire* (P). Lorsque la courbe (M) est une parabole de foyer O, cette circonstance se produit en tous ses points et, par conséquent, tous les points P sont d'inflexion ; autrement dit, la podaire (P) devient, en ce cas, une droite, comme il est bien connu.

« Si le point M est d'inflexion sur (M), *m* étant à l'infini sur MN, il en est de même de I, et, OI se confondant alors avec OP, *p* se confond avec P qui est alors un point de rebroussement sur la podaire. »

M. d'Ocagne fait une seconde communication sur *les nomogrammes à plus de trois dimensions*. Cette communication paraîtra prochainement ailleurs.

M. Goedseels fait les communications suivantes :

1° En rendant compte du magistral ouvrage de M. d'Ocagne sur la Nomographie, dans la Revue des Questions scientifiques (1), j'ai établi un parallèle entre l'auteur et Monge.

---

(1) Janvier 1922, p. 202.

J'ai signalé que si ce dernier mérite d'être considéré comme le fondateur de la Géométrie descriptive, comme science autonome, quoique les techniciens aient appliqué avant lui les procédés enseignés dans cette science, et le mérite parce qu'il a publié en 1899 le premier traité complet sur la matière, M. d'Ocagne doit, à fortiori, être considéré non seulement comme le fondateur, mais comme le créateur de la science nouvelle appelée par lui *Nomographie* et dont il est l'inventeur.

Un de nos collègues m'a fait remarquer que Lacroix a publié avant Monge, en 1796, un ouvrage sur la géométrie descriptive, et doit, par conséquent, être considéré comme le fondateur de cette science, plutôt que Monge.

Le petit livre de Lacroix est intitulé *Éléments de Géométrie descriptive,* et est trop élémentaire pour constituer, comme celui de Monge, la pierre fondamentale d'une science autonome nouvelle.

2° Les auteurs d'analyse infinitésimale, notamment notre éminent collègue, M. de la Vallée Poussin, ont des idées si rigoureuses sur la matière, qu'ils dédaignent de prêter la moindre attention aux techniciens qui professent encore certaines idées absurdes sur le même sujet.

Nous pensons, tant ces techniciens sont nombreux, qu'on peut leur rendre service en employant pour eux certaines mesures préventives. En effet, les inepties qu'on lit, même dans ces derniers temps, dans plusieurs ouvrages technologiques sont si colossales qu'on ne peut espérer guérir les auteurs par des remèdes rationnels.

Pour bien faire comprendre notre pensée, nous nous bornerons à citer deux cas.

a) On dit, par exemple, qu'une variable tend vers zéro, lorsqu'elle finit par devenir et par *rester* inférieure, en valeur absolue à *toute* quantité $\epsilon > 0$, donnée d'avance, quelque petite qu'elle soit.

Un des remèdes préventifs auxquels nous faisons allusion consiste dans la suppression des mots, évidemment inutiles : quelque petite qu'elle soit.

b) On sait que la différentielle dy d'une fonction $y = f(x)$ et la différentielle dx de la variable dx sont deux quantités soumises à la seule condition de vérifier l'égalité

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Par conséquent deux des quantités x, dx et dy sont arbitraires et la troisième est déterminée par la formule ci-dessus. La seule réserve est $dx \gtrless 0$.

Dans les sciences appliquées on donne souvent x et une valeur $(x + h)$ et on se propose de calculer l'accroissement k de y.

De plus h est assez voisin de zéro poûr que le terme $\frac{h^2}{1.2} f''(x + \theta h)$, soit négligeable en présence du terme $h f'(x)$.

Or, on a rigoureusement

$$f' = hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x + \theta h)$$

Par conséquent on a *sensiblement*

$$k = hf'(x).$$

Puisque dx peut être pris arbitrairement, on peut poser

$$dx = h.$$

Dans ce cas, on a sensiblement

$$k = dy.$$

On peut donc ériger en principe que :

Si on donne à x un accroissement dx, et si on peut négliger $\frac{dx^2}{1.2} f''(x + \theta dx)$, y subit un accroissement sensiblement égal à dy.

Il conviendrait, à notre avis, d'insister dans l'enseignement théorique sur les considérations ci-dessus, et de les rendre familières aux futurs technologistes et praticiens en leur proposant de nombreux exercices.

3° Nous avons entendu déclarer par beaucoup de personnes qu'elles ne parviennent pas à comprendre les théories d'Einstein. Nous même sommes dans ce cas.

Nous pensons qu'ils serait utile d'exposer ces théories avec plus d'ordre et de méthode.

M. Lecat fait la communication suivante : *Sur diverses formes remarquables des produits et puissances de trois codéterminants cubiques. (Deuxième communication.)* [1]

13. Une cayléenne d'une matrice M et d'une cayléenne de M s'appelle une *bicayléenne* de M. Si M est cubique, une bicayléenne, de classe 5, a une forme telle que

$$\text{(B)} \qquad \left\| \sum_{\rho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} (\rho, \sigma, \omega_1)(\rho, \omega_2, \omega_3)(\sigma, \omega_4, \omega_5) \right\|_p$$

ou

$$\left\| \sum_{\rho=1}^{n} (\rho, \omega_1, \omega_2) \sum_{\sigma=1}^{n} (\rho, \sigma, \omega_3)(\sigma, \omega_4, \omega_5) \right\|_p$$

et il est aisé de voir qu'il n'y en a que 27 distinctes. Le facteur, dit *principal,* où figurent 2 indices sommants, peut, en effet, être placé le premier. Les autres facteurs, où les indices sommants sont *isolés,* s'appellent les *facteurs secondaires.*

Si une paire d'indices sommants occupent, dans les facteurs où ils se trouvent, les rangs r_1, r_2 et l'autre paire les rangs s_1 et s_2 (ce qui n'exige que $r_1 \neq s_1$), on désignera la bicayléenne par la notation $(r_1, r_2 ; s_1, s_2)$, les rangs placés après les virgules étant ceux des indices sommants isolés. Il y a : 3 matrices du genre $(\alpha, \alpha ; \beta, \beta)$, où chaque paire d'indices sommants occupe un même rang dans deux facteurs (dont le principal) ; 3 du genre $(\alpha, \beta ; \beta, \alpha)$, où les indices sommants non-correspondants ont deux à deux le même rang ; 3 du genre (α, β ; γ, β), où les indices sommants isolés ont tous deux le rang qui est non-sommant dans le facteur principal ; 6 du genre (α, α ; β, α), où les indices sommants isolés ont tous deux le rang d'un non-isolé ; c'est le cas de la matrice (B), qui se désigne par (1, 1 ; 2, 1). Si un indice sommant isolé a le rang d'un non-isolé, il y a deux cas suivant qu'ils se correspondent ou non, ce qui donne respectivement 6 matrices du genre (α, β ; γ, α) et 6 du genre (α, β ; γ, γ).

---

[1] Cf. ces ANNALES, t. XLI. 1921-1922, première partie, pp. 186-198 (fascicule 2, du 10 avril 1922). Signalons les errata qui se sont glissés dans cet article : p. 189, ligne 15, au lieu de « par » lire « la règle de Scott ou par » ; p. 190, l. 2 du n° 6, supprimer « et d'abord des » ; p. 192, l. 8 *per asc.*, au lieu « de premier ou le second facteur » lire « facteur où l'indice sommant a le rang r ou s » ; p. 192, les trois dernières lignes, au lieu de « d'espèce 4... ce rang » lire « Pour $P\Delta_{r,s}$ il est d'espèce 4. De même pour la fonction $D_\alpha\Delta_{r,s}$ si α n'est pas le rang principal, sinon c'est le persignant » ; p. 195, ligne 8, au lieu de « lié » lire « sommant » ; ligne 3 *per asc.*, au lieu de « D_3 » lire « D_2 » ; p. 196, ligne 13 *per asc.*, au lieu de « valeur ; *b*) » lire « ; *b*) ».

Chaque bicayléenne possède 16 déterminants : 1, 10, 5 d'espèces respectives 0, 2, 4. Il y a donc 432 bicayléens distincts. Des 16 déterminants de toute bicayléenne, nous allons voir qu'il y en a : 4 *normaux*, qui, par définition, s'expriment, à l'aide de la règle de Cayley, en fonction des trois déterminants D_1, D_2, D_3 de la matrice cubique primitive (permanent exclu) ; 8 *quasi-normaux*, qui s'obtiennent *normalement*, par la règle de Cayley, en fonction de déterminants cubiques et de cayléens anormaux. Quant aux 4 valeurs anormales, elles ne s'expriment pas à l'aide de la règle de Cayley.

14. De la loi de Cayley découle la règle suivante pour former la valeur des bicayléens normaux et quasi-normaux :

a) Pour l'espèce 2, quand chaque facteur de l'élément entre barres contient une seule non-signance, la valeur — normale — du bicayléen s'obtient en prenant D_α pour un facteur où α est le rang non-signant et en faisant le produit des trois fonctions ainsi obtenues. Si, des deux facteurs secondaires, l'un contient 2 non-signances, l'autre, f, la non-signance restante, et si les rangs de celui des deux indices sommants qui est absent dans f sont i et j, i dans le facteur principal, alors la valeur — quasi-normale — est $D_k\sigma^{(2)}_{i,j}$, en désignant par k le rang de la non-signance dans f. On pose $\sigma^{(2)}_{\alpha,\alpha} \equiv \sigma_{\alpha,\alpha}$ et l'on a $\sigma^{(1)}_{i,j} = \sigma^{(2)}_{j\,i}$;

b) Pour l'espèce 4, si l'unique non-signance se trouve dans un facteur secondaire, f, la valeur — quasi-normale — est $D_k\Delta_{i,j}$.

Exemples :

$$\left|\sum_{\rho}\sum_{\sigma}(\overset{\smile}{\omega}_1, \rho, \sigma)(\overset{\smile}{\omega}_2, \rho, \omega_3)(\overset{\smile}{\omega}_4, \omega_5, \sigma)\right|_p = D^3{}_1,$$

$$\left|\sum_{\rho}\sum_{\sigma}(\rho, \sigma, \omega_1)(\rho, \overset{\smile}{\omega}_2, \omega_3)(\sigma, \overset{\smile}{\omega}_4, \overset{\smile}{\omega}_5)\right|_p = D_2\sigma^{(1)}_{1,2}.$$

Les 4 valeurs normales sont donc d'espèce 2, et, des 8 quasi-normales, 4 sont d'espèce 4 et 4 d'espèce 2. Pour les 8 bicayléens quasi-normaux le facteur principal n'a pas de non-signance, contrairement à ce qui a lieu pour les 8 autres déterminants.

15. Occupons-nous du dénombrement et de la répartition des diverses valeurs bicayléennes. D'abord des normales.

Les 12 matrices des genres $(\alpha, \alpha ; \beta, \beta)$, $(\alpha, \beta ; \beta, \alpha)$, $(\alpha, \alpha ; \beta, \alpha)$ sont telles que dans les trois facteurs un même rang est non-sommant. Parmi elles, chacune des 4 où les 3 indices de rang α sont non-signants a un bicayléen d'espèce 2 valant D^3_α. Donc chaque cube D^3_r, $r = 1, 2, 3$, est engendré 4 fois.

Les 6 matrices du genre $(\alpha, \alpha ; \beta, \alpha)$ ne peuvent fournir le produit $D_1D_2D_3$, parce que 3 rangs n'y sont pas simultanément sommants, un par facteur. Mais, des 21 autres matrices, les 3 du genre $(\alpha, \beta ; \gamma, \beta)$ engendrent chacune 2 fois cette fonction, tandis que les 18 autres la donnent chacune une fois. Le produit est donc exprimé en tout 24 fois.

Quant aux expressions de la forme $D_rD^2_s$, des 27 bicayléennes, il y en a 9 qui en engendrent chacune 2. Ce sont d'abord les 6 des genres $(\alpha, \alpha ; \beta, \beta)$, $(\alpha, \beta ; \beta, \alpha)$, qui chacune fournissent une fois (¹) $D_\alpha D^2_\gamma$ et $D_\beta D^2_\gamma$; ce sont ensuite les 3 matrices du genre $(\alpha, \beta ; \gamma, \beta)$, qui donnent $D_\beta D^2_\alpha$ et $D_\beta D^2_\gamma$. Les 18 autres bicayléennes engendrent chacune 3 expressions de la forme $D_rD^2_s$; elles sont distinctes, valant $D_\alpha D_\gamma^2$, $D_\beta D_\gamma^2$, $D_\gamma D^2_\beta$, dans les 12 matrices des genres de celles où, les rangs sommants isolés étant α, γ, les non-isolés ont les rangs α, β ou β, α ; tandis que pour chacune des 6 bicayléennes du genre $(\alpha, \alpha ; \beta, \alpha)$, on a $D_\gamma D^2_\beta$ et 2 fois $D_\beta D^2_\gamma$. En tout, chacune des 6 fonctions est engendrée 12 fois par l'ensemble des 27 bicayléennes.

16. Passons aux valeurs quasi-normales, et d'abord à celles de la forme $D_k\sigma_{i,j}$ et $D_k\sigma^{(\theta)}_{i,j}$ [cf. n° 7] (²). De la règle de formation de

---

(¹) Nous sous-entendrons les mots « une fois ».

(²) Dans la première communication *(loc. cit.* ; cf. Comptes rendus Acad. Sc. Paris, t. CLXXIV, 13 mars 1922, pp. 728-731), nous avons donné une règle pour exprimer la valeur d'un cayléen anormal, mais la forme du *complément*, qui est la partie indépendante de P et D_α (à ajouter à la valeur principale) n'est pas ces fonctions, il résulte que la bicayléenne $(r_1, r_2 ; s_1, s_2)$ engendre, par 4 de ses déterminants d'espèce 2, chacune des valeurs :

$$D_{h_1}\sigma^{(2)}_{r_1,r_2}, \qquad D_{h_2}\sigma^{(2)}_{r_1,r_2} ; \qquad D_{k_1}\sigma^{(2)}_{s_1,s_2}, \qquad D_{k_2}\sigma^{(2)}_{s_1,s_2},$$

les nombres h_1 et h_2 d'une part, k_1 et k_2 d'autre part, désignant, des 3 nombres 1, 2, 3, les deux qui diffèrent respectivement de s_2 et de r_2. On pose $\sigma^{(1)}_{\alpha,\alpha} \equiv \sigma_{\alpha,\alpha}$ et l'on a $\sigma^{(1)}_{i,j} = \sigma^{(2)}_{j,i}$. Au total, l'ensemble des 27 bicayléennes fournit 4 fois chacune des 27 fonctions $D_k(\sigma^{(2)}_{i,j})$, pour $k, i, j = 1, 2, 3$.

---

exacte sans restriction si l'ordre p est quelconque. Cela se voit, en effet, sur l'exemple suivant, où $p = 3$. Dans la matrice cubique

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} o & a & o & e & o & f & o & i & o \\ b & o & c & o & o & o & j & o & k \\ o & d & o & g & o & h & o & l & o \end{array} \right\|,$$

particularisée par un vide qui laisse actifs tous les éléments non-nuls, les trois déterminants ont pour valeurs :

$$\left.\begin{array}{l} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array}\right\} \equiv \left\{\begin{array}{cccccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ -\,agk & +\,ahj & -\,bfl & +\,cel & -\,bih & +\,cgi & -\,dek & +\,djf \\ + & - & + & - & - & + & - & + \end{array}\right.$$

et de ses cayléennes, où l'activité a encore lieu pour tous les éléments non-nuls, l'une (que nous n'écrirons pas, faute de place) exprime : *a)* par chacun de ses deux déterminants anormaux d'espèce 2, la double somme algébrique de carrés

$$2[(bgi + dej)^2 + (chi + dfk)^2 - (agj + bel)^2 - (ahk + cfl)^2]$$

augmentée du produit du déterminant D_1 par le permanent P ; *b)* par le permanent et le persignant, respectivement les sommes de carrés

$$\left.\begin{array}{l} P^2 \\ D^2_1 \end{array}\right\} + 2(bgi + dej \pm agj \pm bel)^2 + 2(chi + dfk \pm ahk \pm cfl)^2,$$

fonctions où le complément ne rentre pas — manifestement — dans la règle énoncée.

Les modifications suivantes sont donc à apporter au texte de la première communication :

p. 188, ligne 2, au lieu de 2^{p-1} lire : un complément dont l'expression générale est très compliquée. Pour $p = 2$, il a une forme remarquable et simple : il vaut 2 ;

p. 192, dans l'expression de tous les cayléens anormaux donnés en exemple, on doit poser $p = 2$;

p. 197, l. 2, au lieu de $2^{(2p-1)}$ lire : un complément qui, pour $p = 2$, vaut 4 ;

p. 197, dans les deux exemples qui suivent, faire $p = 2$ et conséquemment $C = 4$.

De la règle de formation des expressions $D_k\Delta_{i,j}$, il résulte qu'une bicayléenne engendre, par 4 de ses déterminants d'espèce 4, une fois chacune des fonctions :

$$D_{h_1}\Delta_{r_1,r_2},\qquad D_{h_2}\Delta_{r_1,r_2},\qquad D_{k_1}\Delta_{s_1,s_2},\qquad D_{k_2}\Delta_{s_1,s_2}\,;$$

et l'on en déduit que l'ensemble des 27 matrices engendre $4(2 - \delta_{i,j})$ fois la valeur $D_k\Delta_{i,j}$, car $\Delta_{i,j} = \Delta_{j,i}$.

17. Les bicayléens anormaux sont : le permanent, le déterminant d'espèce 4 où l'unique non-signance figure dans le facteur principal, enfin les deux déterminants d'espèce 2 où un facteur (secondaire) contient 2 signances.

L'expression de ces bicayléens est donnée par un produit de trois fonctions correspondant chacune à un des trois facteurs de l'élément général, le facteur principal donnant toujours P et les autres, suivant qu'ils renferment ou non des non-signances, P ou D_s, s désignant, dans le facteur (secondaire), le rang sommant. Mais à ce produit, que nous appelons la *valeur principale,* on doit ajouter un *complément,* dont l'expression (¹), compliquée pour $p > 2$, devient assez simple quand l'ordre est 2.

Ce complément se compose de deux groupes de termes qui, pour $p = 2$, se forment de la manière suivante : les nombres i, j, k étant 1, 2, 3 dans un ordre quelconque, désignons par le symbole $\pi_{i,\rho\,;\,j,\sigma}$ le permanent, à une seule dimension, de la file, de rang k, des éléments dont les indices des rangs i et j valent respectivement ρ et σ ; de sorte que, par exemple :

$$\pi_{1,\rho\,;\,2,\sigma} = (\rho,\ \sigma,\ 1)\,(\rho,\ \sigma,\ 2).$$

Cela étant, soit $(r_1,\ r_2\ ;\ s_1,\ s_2)$ la bicayléenne. Le premier groupe de termes, qui rappelle le complément pour $p = 2$ dans les cayléens anormaux, se compose additivement de deux sommes de même nature, correspondant chacune à une paire d'indices sommants, ρ ou σ. Celle en ρ, par exemple, vaut deux fois le produit de deux fonctions dont l'une est donnée comme pour la valeur prin-

---

(¹) Dans la note aux Comptes rendus *(loc. cit.),* nous avons donné des expressions, sans faire de restriction, pour p quelconque. On fera $p = 2$. **Erratum : p. 730, l. 10, au lieu de $m_{\eta-1}$ lire $m_{\tau-1}$.**

cipale, mais par le facteur sans ρ, l'autre fonction étant la somme en ρ des produits de deux fonctions correspondant aux deux autres facteurs, celle relative au facteur principal étant $\pi_{r_1,\rho}$ et l'autre — relative au facteur secondaire en ρ — étant $\delta_{r_2,\rho}$ ou $\pi_{r_2,\rho}$ suivant que ce facteur contient ou non des signances (au nombre de 2).

Quant au second groupe de termes, image remarquable de l'élément général de la bicayléenne, il vaut 4 fois la somme double en $\rho\sigma$ du produit de 3 fonctions correspondant aux 3 facteurs de l'élément entre barres : le facteur principal donne $\pi_{r_1,\rho\,;\,s_1,\sigma}$ et, quant aux facteurs secondaires, on prend d'une part $\delta_{r_2,\rho}$ ou $\pi_{r_2,\rho}$ et d'autre part $\delta_{s_2,\sigma}$ ou $\pi_{s_2,\sigma}$, respectivement pour le facteur en ρ et pour celui en σ, en choisissant δ ou π suivant que le facteur envisagé contient ou non des signances.

Exemples :

$$\begin{matrix}\text{I)}\\ \text{II)}\end{matrix}\left|\sum_\rho\sum_\sigma\left(\rho,\ \sigma,\ \overset{\substack{\smile\\ \smile}}{\omega}_1\right)\left(\overset{\substack{\frown\\ \smile}}{\omega}_2,\ \rho,\ \overset{\substack{\frown\\ \smile}}{\omega}_3\right)\left(\sigma,\ \overset{\substack{\frown\\ \smile}}{\omega}_4,\ \overset{\substack{\frown\\ \smile}}{\omega}_5\right)\right|_2 =$$

$$\text{I)}\ PD_1D_2 + 2\Big(D_1\sum_\rho \pi_{1,\rho}\delta_{2,\rho} + D_2\sum_\sigma \pi_{2,\sigma}\delta_{1,\sigma}\Big) + 4\sum_\rho\sum_\sigma \pi_{1,\rho\,;\,2,\sigma}\delta_{2,\rho}\delta_{1,\sigma}$$

$$\text{II)}\ P^3 + 4P\sum_\gamma \pi_{1,\gamma}\pi_{2,\gamma} + 4\sum_\rho\sum_\sigma \pi_{1,\rho\,;\,2,\sigma}\pi_{2,\rho}\pi_{1,\sigma}.$$

On voit que les deux sommes composant le premier groupe de termes du complément sont identiques pour le permanent de chacune des 3 matrices du genre (α, β ; β, α). C'est le cas de l'exemple II.

Les 108 fonctions représentées par l'ensemble des bicayléens anormaux distincts sont en général toutes différentes. Les cas de dégénérescence, notamment par mérogénéité, seront étudiés ailleurs.

18. Les *biscottiennes* d'une matrice cubique sont de classe 7 et il y en a de deux sortes. Les unes, *du premier genre,* dont il y a 10 *distinctes,* n'ont qu'un seul *indice lié,* mais se présentant trois fois ; elles ressemblent aux scott-cayléennes [cf. n° **8**]. Les autres, *du second genre,* dont il y a 27 distinctes, ont 2 indices liés,

équivalents et se présentant chacun deux fois ; elles ressemblent aux bicayléennes.

Par analogie avec ce qui a été fait pour les scott-cayléennes, on désignera les biscottiennes du premier genre en mettant entre parenthèses les trois rangs (égaux ou inégaux) de l'indice lié ; il y a encore respectivement 3, 6, 1 matrices distinctes des types (α, α, α), (α, α, β), (α, β, γ).

Quant aux 27 biscottiennes du second genre, il est manifeste qu'elles peuvent se classer comme les bicayléennes, les indices sommants étant remplacés par les indices liés. Le facteur à 2 indices liés, qu'on pourra supposer écrit le premier, sera dit *principal*, les deux autres étant les *facteurs secondaires.* Dans celui-là l'*indice libre* est *isolé ;* dans ceux-ci, ce sont les indices liés qui sont isolés. Si donc un indice lié occupe les rangs r_1 et r_2 et l'autre les rangs ρ_1 et ρ_2 (ce qui exige que $r_1 \neq \rho_1$), on désignera la biscottienne par la notation $(r_1, r_2 ; \rho_1, \rho_2)$, où les rangs placés après les virgules sont ceux des indices liés isolés.

Toute biscottienne possède 64 déterminants : le permanent, 21 déterminants d'espèce 2, 35 d'espèce 4 et 7 d'espèce 6. Il y a donc 640 *biscottiens du premier genre* et 1728 *du second.* Tous sont *normaux,* exprimant des produits de 3 des quantités P, D_1, D_2, D_3, prises avec ou sans répétition.

19. De la loi de Scott il résulte que la valeur d'un biscottien du premier genre peut s'obtenir, en considérant les 3 facteurs de l'élément général, par une règle identique à celle énoncée pour les scottiens [cf. n° **3**].

D'après cela, faisons le dénombrement et la répartition des diverses expressions de ces biscottiens.

Le cube P^3 n'est donné que par le permanent. Quant aux cubes D^3_r, chaque matrice les engendre tous les 3. Pour (α, α, α), D^3_α est fourni par l'espèce 6, D^3_β et D^3_γ l'étant par l'espèce 4 ; *b)* si les rangs de l'indice lié sont α, α, β, D^3_α est engendré par l'espèce 6 et D^3_β, D^3_γ par l'espèce 4 ; pour la matrice (α, β, γ), les cubes sont donnés, tous trois, par l'espèce 4. Ainsi :

$$\left| \left(\overset{\cup}{\omega_1}, \overset{\cup}{\omega_2}, \omega_3 \right) \left(\overset{\substack{\cap \\ \cup}}{\omega_4}, \overset{\cup}{\omega_1}, \omega_5 \right) \left(\omega_6, \overset{\cup}{\omega_7}, \overset{\substack{\cup \\ \cap}}{\omega_1} \right) \right| = D^3_2.$$

La fonction $D_1D_2D_3$ est représentée 6 fois par chaque biscottienne du premier genre. Si l'indice lié occupe un seul rang, c'est toujours par l'espèce 4 ; *b)* pour les matrices (α, α, β), c'est par 4 déterminants d'espèce 4 et par 2 d'espèce 6 ; *c)* pour la matrice (α,β,γ), c'est par 5 d'espèce 4 et par 1 d'espèce 6.

Chaque matrice engendre 3 fois chacune des 6 expressions D_rP^2 et PD^2_r. Mais alors que les 3 premières sont toujours représentées simplement par l'espèce 2, il n'en est pas de même pour les 3 autres fonctions. Pour (α, α, α), 6 déterminants d'espèce 2 expriment 3 fois PD^2_β, PD^2_γ et 3 d'espèce 4 valent PD^2_α. Pour (α, α, β), 4 d'espèce 2 expriment PD^2_β et 3 fois PD^2_γ, tandis que 5 d'espèce 4 donnent 3 fois PD^2_α et 2 fois PD^2_β. Pour la matrice (α, β, γ), chacune des 3 fonctions est donnée 1 fois par l'espèce 2 et 2 fois par l'espèce 4.

Arrivons aux valeurs $D_rD^2_s$. Pour la matrice (α, α, α), 12 déterminants d'espèce 4 donnent 3 fois $D_\alpha D^2_\beta$, $D_\alpha D^2_\gamma$, $D_\beta D^2_\gamma$, $D_\gamma D^2_\beta$ et 6 d'espèce 2 expriment 3 fois les deux autres fonctions. La matrice (α, α, β) engendre : *a)* par 14 déterminants d'espèce 4, $D_\alpha D^2_\beta$, deux fois $D_\beta D^2_\alpha$, $D_\gamma D^2_\alpha$ et 3 fois $D_\gamma D^2_\beta$, $D_\beta D^2_\gamma$, $D_\alpha D^2_\gamma$; *b)* par 4 déterminants d'espèce 6, $D_\beta D^2_\alpha$, $D_\gamma D^2_\alpha$ et 2 fois $D_\alpha D^2_\beta$. Enfin pour (*α*, β, γ*)* chacune des 6 fonctions est exprimée 2 fois par l'espèce 4 et 1 fois par l'espèce 6. Chaque biscottienne du premier genre engendre donc 3 fois chacune des six valeurs $D_rD^2_s$.

Considérons enfin les expressions PD_rD_s. Quand l'indice lié occupe un même rang α, la matrice engendre, par l'espèce 2, six fois $PD_\beta D_\gamma$ et, par l'espèce 4, six fois $PD_\alpha D_\beta$ et $PD_\alpha D_\gamma$. La matrice (α, α, β) donne, par 8 déterminants d'espèce 2, 4 fois $PD_\beta D_\gamma$ et 2 fois $PD_\alpha D_\gamma$ et $PD_\alpha D_\beta$, tandis que 10 d'espèce 4 représentent 2 fois $PD_\beta D_\gamma$ et 4 fois $PD_\alpha D_\gamma$, $PD_\alpha D_\beta$. Enfin pour (α, β, γ), chacune des 3 expressions est fournie 3 fois par l'espèce 2 et aussi 3 fois par l'espèce 4. Chacune des 3 fonctions est donc engendrée 6 fois par toute biscottienne du premier genre, et 60 fois par l'ensemble des matrices distinctes.

20. Étudions maintenant la répartition des valeurs des biscottiens du second genre (¹).

(¹) Pour les valeurs normales de tous les déterminants étudiés antérieurement, nous avons donné une règle de formation basée sur l'examen des fac-

Seul le permanent donne la valeur P^3. Quant aux autres cubes, D^3_r, chaque matrice les exprime chacun une fois, mais la répartition suivant les espèces dépend de la disposition des indices liés et il y a 5 cas : *a)* la matrice (α, α ; β, α) engendre D^3_α, D^3_β et D^3_γ respectivement par les espèces 6, 4, 2 ; *b)* si un indice lié occupe un seul rang et si l'autre figure aux deux autres rangs, les 3 cubes sont exprimés par l'espèce 4 ; *c)* (α, γ ; β, γ) donne la fonction D^3_γ par l'espèce 6, les deux autres cubes étant exprimés par l'espèce 4 ; *d)* la biscottienne (α, α ; β, β) fournit D^3_α et D^3_β par l'espèce 4, D^3_γ étant donné par l'espèce 2 ; *e)* quant à (α, β ; β, α), elle engendre les cubes D^3_α,D^3_β par l'espèce 6 et D^3_γ par l'espèce 2.

---

teurs de l'élément entre barres. Ici la loi devient compliquée et n'est plus pratique, mais elle mérite cependant d'être considérée, car elle est curieuse : La valeur d'un biscottien du second genre s'obtient en faisant correspondre, d'après la règle suivante, à chaque facteur de l'élément général une des quantités P, D_1, D_2, D_3 et en faisant ensuite le produit des trois fonctions obtenues. Si le facteur contient :

I) 3 indices non-signants et si : *a)* deux sont libres, on prend P ; si *b)* un seul est libre, soit de rang α, il y a une distinction à faire : si les deux autres facteurs contiennent chacun un nombre impair de non-signances, la fonction à prendre est P, sinon c'est D_α ;

II) 2 indices non-signants ; il y a 4 cas : *a)* les deux sont libres : on prend P ; *b)* les deux sont liés, on prend D_α, α étant, dans le facteur considéré, le rang de celui des deux indices non-signants qui se répète dans le facteur où le nombre de non-signances est impair ; *c)* un seul des deux indices non-signants est libre et a le rang α ; il y a, en outre, dans le facteur, un indice signant libre : la fonction est D_α ; *d)* un seul des indices non-signants est libre et il y a en outre un indice signant lié : on procède alors comme en I*b*) ;

III) 1 indice non-signant, soit de rang α ; il y a 3 cas : *a)* cet indice est libre et il y a en outre 2 indices signants liés, chacun des deux autres facteurs renfermant une seule non-signance : on prend P ; *b)* cet indice est lié et il y a aussi un indice signant lié, de rang β, le facteur où se répète l'indice non-signant contenant en outre un seul indice non-signant libre : la valeur à prendre est D_β ; *c)* dans les autres cas, c'est D_α ;

IV) 3 signances ; deux cas : *a)* un indice signant lié, de rang α : on prend D_α ; *b)* 2 indices signants liés : la fonction est D_r, si r est le rang de l'indice signant lié qui se répète dans le facteur où le nombre de non-signances est impair.

Le produit $D_1D_2D_3$ est exprimé 6 fois par chaque biscottienne (du second genre comme du premier). Pour la répartition, il y a encore à distinguer 5 cas : *a)* si un indice lié figure à un seul rang, qui est un des deux rangs de l'autre indice lié, $D_1D_2D_3$ est donné 5 et 1 fois par les espèces 4 et 6 ; *b)* si un indice lié occupe un seul rang, l'autre figurant aux deux autres rangs, $D_1D_2D_3$ est exprimé par les espèces 2, 4, 6, respectivement 1, 3, 2 fois ; *c)* si chaque indice lié n'occupe qu'un seul rang, les espèces 2, 4, 6 interviennent 1, 2, 3 fois ; *d, e)* si chaque indice lié figure à 2 rangs, il y a 2 cas : suivant que, dans les deux facteurs secondaires, le rang de l'indice lié est ou n'est pas le même, $D_1D_2D_3$ est donné respectivement 2 fois par chaque espèce ou bien par 4 déterminants d'espèce 4 et par 1 de chacune des deux autres espèces.

Chaque matrice a 9 déterminants, d'espèces 2 ou 4, exprimant 3 fois chacune des 3 fonctions PD^3_r. Pour la répartition, il y a encore 5 cas : *a)* si un indice lié figure à un seul rang et si l'autre occupe les deux autres rangs, chacune des 3 expressions est engendrée une fois par des déterminants d'espèce 2 et 2 fois par ceux d'espèce 4 ; *b)* la matrice $(\alpha, \alpha ; \beta, \beta)$ engendre les fonctions PD^2_α et PD^2_β, 1 fois par l'espèce 2 et 2 fois par l'espèce 4, tandis que pour PD^2_γ c'est l'inverse ; *c)* pour $(\alpha, \alpha ; \beta, \alpha)$, les expressions PD^2_α, PD^2_β, PD^2_γ sont engendrées respectivement 0, 2, 1 fois par l'espèce 2 ; *d, e)* si chaque indice lié occupe 2 rangs, il y a 2 cas : la matrice $(\alpha, \gamma ; \beta, \gamma)$ fournit PD^2_α et PD^2_β par un seul déterminant d'espèce 2 (et par 2 d'espèce 4), tandis que PD^2_γ n'est pas représentée par l'espèce 2 ; quant à la matrice $(\alpha, \beta ; \beta, \alpha)$, seule la fonction PD^2_γ est engendrée par l'espèce 2 et elle l'est ainsi 2 fois, ne l'étant qu'une seule fois par l'espèce 4, tandis que PD^2_α et PD^2_γ le sont chacune 3 fois par cette espèce.

Comme pour le premier genre, chacune des 3 fonctions D_rP^2 est représentée 3 fois (en tout 81 fois) et elle l'est par l'espèce 2.

Chacune des 3 fonctions PD_rD_s est, ici encore, engendrée 6 fois par matrice. Pour la répartition, il y a 4 cas : *a)* si chaque indice lié occupe 2 rangs différents, chacune des 3 valeurs est exprimée par deux déterminants d'espèce 2 et par 4 d'espèce 4 ; *b)* la matrice $(\alpha, \alpha ; \beta, \beta)$ engendre chacune des fonctions $PD_\beta D_\gamma$ et

$PD_\alpha D_\gamma$, 2 et 4 fois par espèces respectives 2 et 4, tandis que $PD_\alpha D_\beta$ n'est représentée que par l'espèce 4 ; *c)* pour $(\alpha, \alpha ; \beta, \gamma)$, $PD_\beta D_\gamma$ est donnée 3 fois par chacune des espèces 2 et 4 ; tandis que $PD_\beta D_\alpha$ et $PD_\alpha D_\gamma$ sont représentées chacune 1 et 5 fois par les espèces 2 et 4 ; *d)* si un indice lié occupe un seul rang α, un des deux rangs de l'autre indice lié étant aussi α, $PD_\beta D_\gamma$ est fournie 3 fois par chacune des espèces 2 et 4, tandis que $PD_\alpha D_\beta$ et $PD_\alpha D_\gamma$ sont chacune engendrées 1 fois par l'espèce 2 (donc aussi 5 fois par l'espèce 4).

21. Chacune des 6 expressions $D_r D^2{}_s$ est encore engendrée 3 fois par chaque biscottienne. Pour la répartition, il y a 6 cas : *a)* la matrice $(\alpha, \alpha ; \beta, \beta)$ ne fournit $D_\gamma D^2{}_\alpha$ et $D_\gamma D^2{}_\beta$ que par l'espèce 4, $D_\alpha D^2{}_\gamma$ et $D_\beta D^2{}_\gamma$ étant représentées 1, 2, 0 fois et $D_\alpha D^2{}_\beta$, $D_\beta D_\alpha{}^2$ chacune 0, 1, 2 fois respectivement par les espèces 2, 4, 6 ; *b)* pour $(\alpha, \beta ; \beta, \alpha)$, les fonctions $D_\alpha D_\gamma{}^2$ et $D_\beta D_\gamma{}^2$ sont données chacune par les espèces 2, 4, 6 respectivement 1, 2, 0 fois, tandis que les 4 autres expressions sont fournies 0, 2, 1 fois ; *c)* la biscottienne $(\alpha, \alpha ; \beta, \alpha)$ n'engendre $D_\alpha D^2{}_\gamma$ que par l'espèce 4 ; $D_\beta D^2{}_\alpha$ et $D_\gamma D^2{}_\alpha$ l'étant chacune 0, 1, 2 fois, respectivement par les espèces 2, 4, 6 ; $D_\alpha D^2{}_\beta$, 0, 2, 1 fois ; $D_\beta D^2{}_\gamma$, 2, 1, 0 fois, tandis que $D_\gamma D^2{}_\beta$ l'est 1, 2, 0 fois ; *d)* pour $(\alpha, \alpha ; \beta, \gamma)$, les fonctions $D_\beta D^2{}_\gamma$, $D_\gamma D^2{}_\beta$ sont chacune engendrées 1, 2, 0 fois par les espèces respectives 2, 4, 6, $D_\alpha D^2{}_\gamma$ est donnée 1, 0, 2 fois et $D_\beta D^2{}_\alpha$, $D_\gamma D^2{}_\alpha$, $D_\alpha D^2{}_\beta$ le sont 0, 2 et 1 fois ; *e)* la matrice $(\alpha, \gamma ; \beta, \gamma)$ ne donne $D_\alpha D^2{}_\beta$ et $D_\beta D^2{}_\alpha$ que par l'espèce 4 (3 fois), $D_\gamma D^2{}_\alpha$ et $D_\gamma D^2{}_\beta$ étant chacune engendrées 1 fois par chaque espèce, tandis que les 2 fonctions restantes, $D_\alpha D^2{}_\gamma$ et $D_\beta D^2{}_\gamma$, sont fournies 0, 2 et 1 fois par les espèces respectives 2, 4, 6 ; *f)* enfin la matrice $(\alpha, \gamma ; \gamma, \beta)$, où α désigne celui des deux rangs non répétés d'indices liés qui figure dans le facteur principal, n'engendre $D_\gamma D^2{}_\alpha$ que par l'espèce 4, $D_\alpha D^2{}_\gamma$ et $D_\beta D^2{}_\gamma$ l'étant chacune 0, 2, 1 fois par les espèces respectives 2, 4, 6 ; enfin les 3 fonctions restantes sont données 1 fois par chacune des trois espèces. Exemple :

$$\left| \begin{pmatrix} \overset{\smile}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\omega_1}}}, & \overset{\frown}{\overset{\smile}{\overset{\smile}{\omega_2}}}, & \overset{\smile}{\overset{\smile}{\overset{\frown}{\omega_3}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_4, & \overset{\smile}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\omega_5}}}, & \overset{\smile}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\omega_1}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_6, & \overset{\frown}{\overset{\smile}{\overset{\frown}{\omega_7}}}; & \overset{\frown}{\overset{\smile}{\overset{\smile}{\omega_2}}} \end{pmatrix} \right| = D_2 D^2{}_3.$$

M. Thébault adresse à la Section le mémoire suivant qui, soumis à l'avis de M. Neuberg, a fait l'objet d'un rapport favorable :

Sur le quadrangle complet.

1. Soient A, B, C, V quatre points, situés dans un même plan, dont trois quelconques ne sont pas en ligne droite. En les joignant deux à deux par des droites, on forme un *quadrangle complet* dont A, B, C et V sont les sommets et qui a trois couples de côtés opposés :

$$BC = a,\ AV = a'\ ;\quad CA = b,\ BV = b'\ ;\quad AB = c,\ CV = c'\ (^1).$$

Désignons les projections orthogonales du sommet V sur BC, CA, AB par X_1, Y_1, Z_1 et posons :

$$Y_1Z_1 = m,\quad Z_1X_1 = n,\quad X_1Y_1 = p.$$

AV étant un diamètre du cercle circonscrit au triangle VY_1Z_1,

$$m = AV \,.\, \sin Y_1VZ_1 = a' \sin A = aa' : 2R_v\ ;$$

de même :

$$n = bb' : 2R_v\quad ;\quad p = cc' : 2R_v\ ;$$

R_v étant le rayon du cercle O circonscrit à ABC.

Le triangle podaire $X_1Y_1Z_1$ *du sommet* V, *par rapport au triangle* ABC, *est donc semblable au triangle dont les côtés ont pour mesure* aa', bb', cc' (²).

2. Il existe en général deux points V et W du plan tels que leurs triangles podaires, par rapport au triangle ABC, soient

---

(¹) Le quadrangle complet a donné lieu à un grand nombre d'études remarquables et occupé d'illustres géomètres, tels Gauss, Steiner, Darboux, Mœbius, von Staudt, etc. Voici une bibliographie incomplète :

von Staudt, JOURNAL DE CRELLE, t. 57, p. 88. — P. Terrier, NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1876, p. 106. — J. Neuberg, MATHESIS, 1891, pp. 33, 67, 81, 189 ; WISKUNDIG TIJDSCHRIFT, *Quadrangle complet et triangle associé.* — Bateman, EDUCATIONAL TIMES, 1907, p. 456. Rouché et de Comberousse, TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, 7ᵉ éd., t. I, p. 465. – Gob, MATHESIS, 1907, p. 144. — de Lépiney, MATHESIS, 1913, p. 200.

(²) Ce triangle est connu sous le nom de *triangle associé* ou *adjoint* au quadrangle ABCV.

semblables au triangle associé au quadrangle. Le sommet V, pour lequel

$$\frac{BV}{CV}=\frac{b'}{c'}\quad,\qquad\frac{CV}{AV}=\frac{c'}{a'}\quad,\qquad\frac{AV}{BV}=\frac{a'}{b'},$$

est à l'intersection de trois circonférences lieux des points du plan tels que :

$$VA:VB:VC=a':b':c'. \tag{1}$$

Divisons les côtés BC, CA, AB additivement et soustractivement dans les rapports $b':c'$, $c':a'$, $a':b'$ aux points D et D′, E et E′, F et F′ et décrivons trois circonférences sur les segments DD′, EE′, FF′ comme diamètres. Les triples (D, E, F′), (F, E, D′), (F, D, E′), (D′, E′, F′) sont collinéaires et déterminent un quadrilatère complet dont ABC est le triangle diagonal. Les centres ω_a, ω_b, ω_c des trois circonférences, d'après un théorème connu, vérifient les égalités

$$\frac{\omega_a B}{\omega_a C}=\frac{b'^2}{c'^2}\quad,\qquad\frac{\omega_b C}{\omega_b A}=\frac{c'^2}{a'^2}\quad,\qquad\frac{\omega_c A}{\omega_c B}=\frac{a'^2}{b'^2};$$

ces centres sont donc en ligne droite, et les circonférences ont même axe radical. Elles se coupent par conséquent en un autre point W, pour lequel

$$WA:WB:WC=a':b':c', \tag{2}$$

dont le triangle podaire $X'_1Y'_1Z'_1$, par rapport à ABC, est semblable au triangle associé au quadrangle ABCV. Le cercle O circonscrit à ABC divise harmoniquement les diamètres des cercles ω_a, ω_b, ω_c dirigés suivant BC, CA, AB et le cercle O coupe orthogonalement ω_a, ω_b, ω_c. L'axe radical VW passe au centre O, et $OV.OW \quad R^2_v$(¹).

V et W sont confondus sur la circonférence O quand $OV \quad OW$, c'est-à-dire lorsque le quadrangle ABCV est inscriptible.

3. On peut exprimer simplement la condition d'existence de deux points V, W satisfaisant aux égalités (1) et (2), a', b', c' étant des coefficients donnés, en disant que les cercles ω_a, ω_b, ω_c se coupent ou ne se coupent pas, suivant qu'on peut ou non former

---

(¹) Ces résultats et d'autres sont connus. (Voir par ex. J. Neuberg, MATHESIS, 1902, p. 86).

un triangle MNP avec les longueurs *aa'*, *bb'*, *cc'*. Ces cercles se touchent si le triangle des côtés *aa'*, *bb'*, *cc'* est un triangle *aplati*.

Cette condition découle de la proposition suivante :

Sur les côtés d'un triangle ABC *on construit extérieurement et intérieurement les triangles* BD_1C, BD'_1C, CD_2A, CD'_2A, AD_3B, AD'_3B *semblables au triangle de côtés* aa', bb', cc' ; *les droites* AD_1, BD_2, CD_3 *et* AD'_1, BD'_2, CD'_3 *concourent en deux points* V_1 *et* W_1 *conjugués isogonaux de* V *et* W *par rapport à* ABC.

Soient en effet les triangles antipodaires $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ des points V_1, W_1, par rapport à ABC. Les sommets de ces triangles appartiennent aux circonférences circonscrites aux triangles BD_1C, CD_2A, AD_3B et BD'_1C, CD'_2A, AD'_3B, dont les centres sont les milieux de $V_1\alpha_1$,..., et $W_1\alpha_1$,.... Par conséquent, leurs angles sont égaux à ceux du triangle MNP. Les triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $X_1Y_1Z_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $X'_1Y'_1Z'_1$ constituent donc deux couples de triangles *semblables*, directement et symétriquement (¹).

Lorsque le triangle de côtés *aa'*, *bb'*, *cc'* est aplati, il en est de même des triangles podaires de V, W. Ces points sont alors confondus sur le cercle O circonscrit à ABC. Les cercles ω_a, ω_b, ω_c se touchent en V et la droite des centres ω_a, ω_b, ω_c est tangente à O en V.

4. Il y a un rapport simple entre les aires des triangles podaires $X_1Y_1Z_1$, $X'_1Y'_1Z'_1$ de V et W. D'après une relation connue,

$$\frac{X_1Y_1Z_1}{ABC} = \frac{R_v^2 - OV^2}{4R_v^2}; \qquad \frac{X'_1Y'_1Z_1'}{ABC} = \frac{R_v^2 - \overline{OW}^2}{4R_v^2}$$

et

$$\frac{X_1Y_1Z_1}{X'_1Y'_1Z'_1} = \frac{R_v^2 - OV^2}{R_v^2 - OW^2} = \frac{\overline{OV}(OW - \overline{OV})}{\overline{OW}(\overline{OV} - OW)} = -\frac{\overline{OV}}{OW}.$$

(¹) Ces triangles sont même directement et inversement *homothétiques*, car les isogonales de V_1A, V_1B, V_1C, W_1A, W_1B, W_1C dans les angles A, B, C du triangle ABC se coupent aux points dont les triangles podaires, par rapport à ABC, ont leurs côtés respectivement perpendiculaires à V_1A, V_1B, V_1C, W_1A, W_1B, W_1C. Or il n'existe que deux points du plan ABC dont les triangles podaires sont semblables à un triangle MNP; ces points sont donc nécessairement V_1 et W_1.

5. Les centres ω_a, ω_b, ω_c partagent BC, CA, AB dans les rapports $b'^2 : c'^2$, $c'^2 : a'^2$, $a'^2 : b'^2$. Si l'on désigne par ρ_a, ρ_b, ρ_c les rayons de ces cercles, que nous supposons affectés des mêmes signes que les segments DD', EE', FF', les sens positifs des côtés de ABC étant BC, CA, AB, on obtient facilement :

$$\rho_a = \frac{ab'c'}{b'^2 - c'^2}, \qquad \rho_b = \frac{bc'a'}{c'^2 - a'^2}, \qquad \rho_c = \frac{ca'b'}{a'^2 - b'^2},$$

et cette relation remarquable :

$$\frac{aa'}{\rho_a} + \frac{bb'}{\rho_b} + \frac{cc'}{\rho_c} = 0.$$

En appliquant le théorème de Stewart aux points A, B, C, D, puis A, B, C, D' et remplaçant DB, D'B par leurs valeurs

$$\overline{DB} = \frac{ac'}{b' + c'} \quad \text{et} \quad \overline{D'B} = \frac{ac'}{b' - c'},$$

il vient, en remarquant que

$$\overline{AD}^2 + \overline{AD'}^2 = 2(\overline{A\omega_a}^2 + \rho_a^2),$$

$$\overline{A\omega_a}^2 - \rho_a^2 = \frac{b^2b'^2 - c^2c'^2}{b'^2 - c'^2}.$$

Les puissances de chacun des sommets A, B, C *du triangle* ABC, *par rapport aux cercles* ω_a, ω_b, ω_c, *sont donc respectivement indépendantes des côtés opposés* a, b, c.

6. Des points V, W on voit les côtés BC, CA, AB sous les angles respectifs (A + M), (B + N), (C + P), A, B, C et M, N, P étant les angles du triangle ABC et du triangle associé au quadrangle opposés aux côtés de mesure aa', bb', cc'.

BC, CA, AB sont vus des conjugués isogonaux V_1, W_1 de V, W, par rapport à ABC, sous des angles égaux à $(\pi - M)$, $(\pi - N)$, $(\pi - P)$.

Les coordonnées normales de V, W peuvent s'exprimer :

$$\frac{\sin(A + M)}{\sin M}, \quad \frac{\sin(B + N)}{\sin N}, \quad \frac{\sin(C + P)}{\sin P};$$

$$\frac{\sin(A - M)}{\sin M}, \quad \frac{\sin(B - N)}{\sin N}, \quad \frac{\sin(C - P)}{\sin P}.$$

D'après ce qui précède, si l'on considère le triangle ABC de côtés a, b, c et trois quantités a', b', c' qui vérifient la relation $-aa' + bb' + cc' = 0$, il existe un seul point V du plan tel que

$$\mathrm{VA} : \mathrm{VB} : \mathrm{VC} = a' : b' : c' ;$$

ce point est situé sur le cercle ABC et ses coordonnées normales, par rapport à ABC, sont proportionnelles à $-\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}$.

Ce cas particulier conduit à un quadrilatère complet assez curieux (¹). Le quadrilatère complet déterminé par les droites DEF', FED', FDE', D'E'F' a pour droite de Newton $\omega_a\omega_b\omega_c$; cette droite qui touche le cercle ABC en V est divisée par les centres ω_a, ω_b, ω_c en trois segments tels que

$$\overline{\omega_a\omega_b} = \overline{\rho_a} + \overline{\rho_b} ; \quad \overline{\omega_b\omega_c} = \overline{\rho_b} + \overline{\rho_c} ; \quad \overline{\omega_c\omega_a} = \overline{\rho_c} + \overline{\rho_a}.$$

La relation $-aa' + bb' + cc' = 0$, mise sous la forme

$$b \cdot \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FA}} + c \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AE}} + a, \text{(²)}$$

montre que la droite FDE' contient le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Pareillement, les droites DEF', FED', D'E'F' passent respectivement aux centres des cercles exinscrits à ABC.

7. La droite VW étant un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC, il est naturel de considérer son orthopôle par rapport à ce triangle.

D'après des propriétés connues, l'orthopôle ψ du diamètre VW est le centre de l'hyperbole équilatère (H_1), inverse triangulaire de ce diamètre. De plus, les cercles podaires de tous les points de ce diamètre ont un point commun ψ, centre de la conique (H_1). En particulier, les cercles ω et ω' circonscrits aux triangles $\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1\mathrm{Z}_1$ et $\mathrm{X'}_1\mathrm{Y'}_1\mathrm{X'}_1$, triangles podaires de V, W, se coupent en ψ. Ce point, orthopôle de VW, n'est autre que le *point double* relatif aux triangles $\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1\mathrm{Z}_1$, $\mathrm{X'}_1\mathrm{Y'}_1\mathrm{Z'}_1$ (³).

(¹) V. Thébault, Nouvelles Annales de Mathématiques, 1919, p. 239, question 2415 et Journal de Vuibert, 1921, p. 60, question 9529.

(²) V. Thébault, 1913, p. 86, question 7709.

(³) J. Neuberg, *The modern Geometry of the triangle*, par W. Gallatly, 1re éd., p. 53.

En joignant les conjugués isogonaux V_1, W_1 de V, W aux sommets de ABC, on détermine deux faisceaux symétriques $V_1(ABC)$, $W_1(ABC)$. V_1 et W_1, qui appartiennent à l'hyperbole (H_1), sont par suite les extrémités d'un diamètre de cette conique (^{1}), et *l'orthopôle* ψ *de* VW, *par rapport au triangle* ABC, *est le milieu du segment* V_1W_1.

V et V_1, W et W_1 sont respectivement les foyers de deux coniques, une ellipse et une hyperbole, inscrites au triangle ABC. Les cercles principaux de ces coniques sont les cercles podaires de V, W. Comme leurs centres ω, ω' sont les milieux des segments VV_1, WW_1.

$$\overline{\omega\psi} = \frac{\overline{VW_1}}{2}, \qquad \overline{\omega'\psi} = \frac{\overline{WV_1}}{2}.$$

Le petit axe 2B de l'ellipse est tel que

$$4B^2 = \overline{VW_1}^2 - \overline{VV_1}^2 = 2\overline{V_1W_1} \,.\, \overline{VK}.$$

De même pour l'axe non transverse 2B' de l'hyperbole de foyers W, W_1,

$$4B'^2 = WV_1^2 - \overline{WW_1}^2 = 2\overline{V_1W_1} \,.\, WK',$$

K et K' étant les projections orthogonales de V, W sur V_1W_1.

Les points V *et* V_1, W *et* W_1 *sont donc respectivement les foyers d'une ellipse et d'une hyperbole inscrites au triangle* ABC. *Les grands axes de ces coniques ont pour mesures celles des segments* VW_1 *et* WV_1 (^{2}).

8. Remarquons que les cosinus des angles α, β, γ que forme le diamètre OVW avec BC, CA, AB sont proportionnels aux segments compris entre les milieux des côtés et les projections orthogonales de V sur ces côtés, c'est-à-dire proportionnels à

$$\frac{b'^2 - c'^2}{a}, \quad \frac{c'^2 - a'^2}{b}, \quad \frac{a'^2 - b'^2}{c}. \tag{3}$$

Désignons par ψ l'orthopôle du diamètre OVW, G le centre de gravité du triangle ABC, ψ_1 le point où OG recoupe le cercle des

---

(^{1}) J. Neuberg, *Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe.* Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1890.

(^{2}) Nous avons énoncé ce théorème dans le cas particulier du quadrangle isodynamique (Mathesis, 1922, p. 76, question 2061).

neuf points, δ le diamètre du cercle O dont ψ_1 est l'orthopôle, A_1, B_1, C_1 les milieux de BC, CA, AB.

On a d'abord :

$$\psi A_1 : \psi B_1 : \psi C_1 = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma \text{ (}^1\text{)}.$$

Considérons ensuite le triangle $A_2B_2C_2$ formé par les perpendiculaires en B sur BC, en C sur CA, en A sur AB ; ce triangle est semblable à ABC, le rapport de similitude étant la cotangente de l'angle de Brocard θ du triangle ABC. Envisageons maintenant le point P dont les distances à C_2A_2, A_2B_2, B_2C_2 sont proportionnelles à aa'^2, bb'^2, cc'^2.

Nous allons prouver que OP n'est autre que le diamètre δ. Si α', β', γ' sont les angles de OP avec BC, CA, AB, on aura :

$$\frac{\cos\alpha'}{\frac{a}{2} - kaa'^2} = \frac{\cos\beta'}{\frac{b}{2} - kbb'^2} = \frac{\cos\gamma'}{\frac{c}{2} - kcc'^2}, \tag{5}$$

où k représente l'expression $\frac{2S\cot\theta}{aa'^2 + bb'^2 + cc'^2}$.

Or, ψ' désignant l'orthopôle de OP,

$$\psi' A_1 : \psi' B_1 : \psi' C_1 = \cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma',$$

et, par suite, eu égard à (4),

$$\frac{\psi A_1 \,.\, \psi' A_1}{\frac{a}{2}\cos\sigma - kaa'^2\cos\alpha} = \frac{\psi B_1 \,.\, \psi B_1}{\frac{b}{2}\cos\beta - kbb'^2\cos\beta} = \frac{\psi C_1 \,.\, \psi C_1}{\frac{c}{2}\cos\gamma - kcc'^2\cos\gamma}.$$

Puisque $\qquad a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 0,$

et qu'en vertu des expressions (3),

$$aa'^2\cos\alpha + bb'^2\cos\beta + cc'^2\cos\gamma = 0,$$
$$\psi A_1 \,.\, \psi' A_1 + \psi B_1 \,.\, \psi' B_1 + \psi C_1 \,.\, \psi' C_1 = 0.$$

Les triangles $\psi\psi' A_1$, $\psi\psi' B_1$, $\psi\psi' C_1$ étant inscrits dans le même cercle (cercle des neuf points de ABC), la relation précédente

---

(1) R. Goormaghtigh, MATHESIS, 1914, p. 192.

exprime que la somme algébrique des distances de A_1, B_1, C_1 à $\psi\psi'$ est nulle, c'est-à-dire que la droite $\psi\psi'$ passe en G. On a donc $\psi' \equiv \psi_1$, $OP \equiv \delta$.

Pour préciser la position du diamètre OP, remarquons enfin que les éléments homologues des triangles $A_2B_2C_2$ et ABC sont perpendiculaires ; OP est donc perpendiculaire à la droite qui joint le point de Lemoine de ABC au point qui a pour coordonnées normales, par rapport à ce triangle, aa'^2, bb'^2, cc'^2. D'où ce théorème :

La droite qui joint le centre de gravité du triangle ABC *à l'orthopôle de* VW *passe par l'orthopôle du diamètre du cercle circonscrit qui est perpendiculaire à la droite joignant le point de Lemoine au point de coordonnées normales* aa'^2, bb'^2, cc'^2.

Il est évident que cette dernière droite d'équation

$$\sum \frac{x}{a}(b'^2 - c'^2) = 0,$$

passe aussi par le point de coordonnées normales

$$a(b'^2 + c'^2),\ b(c'^2 + a'^2),\ c(a'^2 + b'^2).$$

Cas particuliers. — 1° $a' : b' : c' = a : b : c$. — La droite VW coïncide alors avec la droite d'Euler du triangle, et le point de coordonnées normales a^3, b^3, c^3 est le pôle de la droite de Brocard par rapport au cercle de Brocard. On a donc cette proposition :

La droite qui joint l'orthopôle de la droite d'Euler au centre de gravité du triangle passe par l'orthopôle du diamètre du cercle circonscrit qui est parallèle à la droite de Brocard.

2° $a' : b' : c' = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}$. — VW est la droite des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle, et

La droite qui joint le centre de gravité à l'orthopôle du diamètre du cercle circonscrit qui est perpendiculaire à la droite joignant le point de Lemoine au centre du cercle inscrit, passe par le point de Feuerbach (¹).

(¹) Les résultats contenus dans ce paragraphe nous ont été communiqués par M. R. Goormaghtigh à la suite de recherches communes sur le quadrangle complet.

3° $a' = 0$, $b' = c'$. — VW est ici la médiatrice relative au côté BC et le point ψ coïncide avec A_1.

Les points où les médianes rencontrent le cercle des neuf points sont les orthopôles des diamètres du cercle circonscrit qui sont perpendiculaires aux symédianes (¹).

9. Le théorème de M. Goormaghtigh suggère quelques propriétés intéressantes relatives à des triangles spéciaux. Le point de Lemoine d'un triangle ABC et le point de coordonnées normales (aa'^2, bb'^2, cc'^2), (ou de coordonnées barycentriques $a^2a'^2$, $b^2b'^2$, $c^2c'^2$), par rapport à ce triangle, sont situés sur une parallèle à l'un des côtés, BC par exemple, lorsque

$$\frac{a^2a'^2}{b^2b'^2 + c^2c'^2} = \frac{a^2}{b^2 + c^2}, \text{ ou } a'^2(b^2 + c^2) = b^2b'^2 + c^2c'^2. \qquad (6)$$

Dans ce cas, *l'orthopôle du diamètre* OVW *correspondant appartient à la médiane* AA_1, *issue de* A.

Si l'on a $a' : b' : c' = a : b : c$, la relation (6) devient :

$$a^2(b^2 + c^2) = b^4 + c^4.$$

L'orthopôle de la droite d'Euler de ce triangle appartient à la médiane AA_1 (²).

$$\text{Si} \quad a' : b' : c' = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}, \quad a(b + c) = b^2 + c^2.$$

Le point de Feuerbach de ce triangle est situé sur la médiane issue de A (³).

10. Dans le quadrangle complet ABCV désignons par x, y, z les coordonnées normales *absolues* de V, par rapport au triangle ABC, et par $X_1Y_1Z_1$ le triangle podaire de V. Voici des expressions simples des cosinus des angles α, β, γ du diamètre OV avec BC, CA, AB.

Tout d'abord

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{\overline{VB}^2 - \overline{VC}^2}{a} : \frac{\overline{VC}^2 - \overline{VA}^2}{b} : \frac{\overline{VA}^2 - \overline{VB}^2}{c}.$$

(¹) V. Thébault, THE TOHOKU MATHEMATICAL JOURNAL, 1921, vol 19, p. 27.

(²) Id., IBID., 1921, p. 29.

(³) V. Thébault, MATHESIS, 1915, p. 164.

Si l'on observe que

$$\mathrm{VA} = \mathrm{Y_1Z_1} : \sin \mathrm{A}, \quad \mathrm{VB} = \mathrm{Z_1X_1} : \sin \mathrm{B}, \quad \mathrm{VC} = \mathrm{X_1Y_1} : \sin \mathrm{C},$$

$$\overline{\mathrm{X_1Y_1}}^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \mathrm{C}, \quad \overline{\mathrm{Y_1Z_1}}^2 = y^2 + z^2 + 2yz \cos \mathrm{A},$$

$$\overline{\mathrm{Z_1X_1}}^2 = x^2 + z^2 + 2xz \cos \mathrm{B},$$

on obtient :

$$\cos \alpha = \frac{(c^2 - b^2)x + a(cz - by)}{a^2b^2c^2}, \cos \beta = \frac{(a^2 - c^2)y + b(ax - cz)}{a^2b^2c^2},$$

$$\cos \gamma = \frac{(b^2 - a^2)z + c(by - ax)}{a^2b^2c^2},$$

et

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = [(c^2 - b^2)x + a(cz - by)] :$$

$$[(a^2 - c^2)y + b(ax - cz)] : [(b^2 - a^2)z + c(by - ax)]$$

Cette relation laisse apparaître la suivante, déjà connue, entre les angles d'un diamètre quelconque du cercle circonscrit avec les côtés d'un triangle,

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0.$$

Cas particuliers. — 1° $x : y : z = 1 : 1 : 1$. — V est le centre du cercle inscrit au triangle ABC,

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = (b - c) : (c - a) : (a - b);$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

2° $x : y : z = a : b : c$. — V est le point de Lemoine du triangle ABC et

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = \frac{b^2 - c^2}{bc} : \frac{c^2 - a^2}{ca} : \frac{a^2 - b^2}{ab}. \qquad (7)$$

Dans un tétraèdre isodynamique ABCD dont les arêtes sont $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{DA} = a'$; $\mathrm{CA} = b$, $\mathrm{DB} = b'$; $\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{DC} = c'$; $aa' =$

---

(1) V. Thébault, JOURNAL DE VUIBERT, 1911, p. 176, question 7434.

$bb' = cc' = K$. Le pied D' de la hauteur DD' est tel que

$$\overline{D'B}^2 - \overline{D'C}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{DC}^2 = b'^2 - c'^2 = K^2.\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) = K^2.\frac{(b^2 - c^2)}{b^2c^2}.$$

En comparant à (7) on a cette propriété :

Dans un tétraèdre isodynamique, les pieds des hauteurs sont situés sur les diamètres de Brocard des faces.

3° $x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. — V est le centre de gravité du triangle ABC. Alors

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = (b^2 - c^2) : (c^2 - a^2) : (a^2 - b^2).$$

Le pied D' de la hauteur DD' d'un tétraèdre équifacial ABCD d'arêtes BC = a, CA = b, AB = c, donne :

$$\overline{D'B}^2 - \overline{D'C}^2 = \overline{DB}^2 \quad \overline{DC}^2 = b^2 - c^2,$$

et *les pieds des hauteurs d'un tétraèdre équifacial appartiennent aux droites d'Euler des faces.*

M. Neuberg fait parvenir à la Section le travail ci-après : *Sur les polygones podaires d'un quadrilatère plan.*

Le présent travail, dont la première rédaction remonte à 1915, nous a été suggéré par les *Grundlagen einer Isogonalzentrik von J. Schick* (1). Cet écrit n'étant pas mentionné dans la *Bibliographie de la Géométrie du triangle* (2), nos développements trouveraient déjà dans cette omission une raison suffisante ; d'ailleurs ils amplifient les n^{os} 11-15, 68, 97, 100 et 101 des *Grundlagen* et y apportent souvent une plus grande précision.

---

(1) Les *Grundlagen* ont d'abord paru en 1886 dans un périodique scolaire, ensuite en 1889 en brochure de 91 pages in 8° (Tübingen, Franz Füss).

Voici d'autres écrits du même auteur sur la Géométrie du triangle : *Barytomik* (1907) et *Isomorphopolzentrik* (1908) (Munich et Leipzig, Franzscher Verlag) ; *Beziehungen zwischen Isogonalzentrik und Invariantentheorie* (Académie de Munich, 1900).

Certains lieux géométriques traités par M. Schick font l'objet de questions que nous avons proposées dans MATHESIS, 1894, p. 280, et 1896, p. 209, avant de connaître les *Grundlagen*.

(2) Publiée dans les ANNUAIRES DE L'ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES, années 1885, 1889, 1895 et 1906, et en Supplément à MATHESIS, années 1886, 1890, 1896 et 1906.

Le Tôhoku Mathematical Journal, vol. 17, 1 et 2, contient un article de M. V. Thébault, intitulé *Sur les polygones podaires d'un polygone plan*. L'auteur s'y occupe des polygones isopodaires en général et, en particulier, de ceux du quadrilatère plan ; sa méthode diffère de la nôtre.

Préliminaires.

a. Soient : A, B, C, S les angles et l'aire d'un triangle ABC ; O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit ; A', B' C' les projections orthogonales d'un point quelconque M du plan ABC sur les côtés BC, CA, AB ; S' l'aire du triangle podaire A'B'C' de M, considérée comme positive, nulle ou négative suivant que M est intérieur au cercle ABC, situé sur la conférence ou extérieur au cercle.

D'après une formule connue,

$$(1) \qquad S' = \frac{1}{2}(R^2 - \rho^2) \sin A \sin B \sin C,$$

ρ désignant la distance OM.

b. Soient A', B', C', D' les projections orthogonales d'un point quelconque M sur les côtés *a*, *b*, *c* d'un triangle ABC et sur une transversale *d* qui coupe ces côtés en A_1, B_1, C_1 ; pour fixer les idées, nous situons C_1 entre A et B, B_1 entre A et C, A_1 sur le prolongement de BC au delà de C.

Les droites *a, b, c, d*, d'après l'ordre dans lequel on les prend, forment trois quadrilatères simples : le quadrilatère convexe BCB_1C_1B ou *abdc*, le quadrilatère concave BA_1B_1AB ou *adbc*, et le quadrilatère croisé CA_1C_1AC ou *adbc*. En suivant le même ordre pour les projections de M, on aura pour les quadrilatères podaires correspondants : A'B'D'C'A', A'D'B'C'A', A'D'C'B'A'. Ceux-ci, suivant la position du point M, peuvent être convexes, concaves, croisés, avoir deux sommets confondus, avoir trois ou quatre sommets collinéaires.

c. Soient $L_1L_2\ldots L_nL_1$ un contour rectiligne quelconque, et K un point quelconque de son plan. L'expression d'aires

$$KL_1L_2 + KL_2L_3 + \ldots + KL_{n-1}L_n + KL_nL_1$$

est indépendante de la position du point K, pourvu que l'on applique la règle des signes des triangles coplanaires ; elle *définit l'aire* $L_1L_2\ldots L_nL_1$. Dans le cas de $n = 4$, si on place K en L_1 ou L_2, on trouve :

$$\textit{aire}\ L_1L_2L_3L_4L_1 = L_1L_3L_4 - L_1L_3L_2 = L_2L_4L_1 - L_2L_4L_3.$$

D'après cela, en sous-entendant le mot *aire* :

$$\begin{aligned}
&(2) \qquad A'B'D'C'A' = A'D'C - A'D'B' = B'C'A' - B'C'D',\\
&(3) \qquad A'D'B'C'A' = A'B'C' - A'B'D' = D'C'A' - D'C'B',\\
&(4) \qquad A'D'C'B'A' = A'C'B' - A'C'D' = D'B'A' - D'B'C'.
\end{aligned}$$

d. Désignons par O_a, O_b, O_c, O_d les centres et par R_a, R_b, R_c, R_d les rayons des circonférences circonscrites aux triangles *bcd* (AB_1C_1), *cda* (A_1BC_1), *dab* (A_1B_1C), *abc* (ABC). On sait que ces circonférences ont un point commun P (¹) ; leurs centres et le point P sont situés sur une même circonférence, et les projections de P sur les droites *a, b, c, d* sont situées sur une même droite *p*.

Désignons les distances O_aM, O_bM, O_cM, O_dM par ρ_a, ρ_b, ρ_c, ρ_d.

Les lignes des centres O_aO_d, O_bO_c, perpendiculaires sur les milieux des cordes communes PA, PA_1, se coupent au centre E_a de la circonférence passant par les points P, A, A_1. Semblablement, les droites O_aO_c, O_bO_d se rencontrent au centre E_b de la circonférence PBB_1, et les droites O_aO_b, O_cO_d au centre E_c de la circonférence PCC_1.

Soient : F_a, F'_a les conjugués harmoniques du point E_a par rapport aux couples de points O_aO_d, O_bO_c ; F_b, F'_b ceux de E_b par

---

(¹) Dans les *Grundlagen*, P porte le nom de *point homopériphérique* du quadrilatère *abcd* ; S. Kantor appelle P *point de Miquel*, et le cercle $O_aO_bO_cO_d$ P *cercle de Miquel*, dénomination qui est ordinairement appliquée à un cercle dérivé d'un pentagone.

P est le foyer de la parabole touchant les quatre droites *a*, *b*, *c*, *d* et ayant pour tangente au sommet la droite *p*.

rapport aux couples O_bO_d, O_cO_a ; F_c, F'_c ceux de E_c par rapport aux couples O_cO_b, O_cO_d. Les droites $F_aF'_a$, $F_bF'_b$, $F_cF'_c$ coïncident respectivement avec les droites E_bE_c, E_cE_a, E_aE_b.

La figure précédente subit des modifications lorsque les droites *a* et *d* sont parallèles entre elles ou antiparallèles par rapport aux droites *b* et *c*.

e. Soient H, H′ deux points fixes, et p, p', U des quantités données. Si l'on prend pour axes la droite HH′ et une perpendiculaire, le lieu des points M vérifiant l'égalité

$$p.\,\overline{MH}^2 + p'.\,\overline{MH'}^2 = U$$

a une équation de la forme

$$p\,[(x-h)^2 + y^2] + p'\,[(x-h')^2 + y^2] = U.$$

L'hypothèse $p + p'$ 0 donne une perpendiculaire à HH′. Dans les autres cas, l'équation précédente se ramène à

$$(5)\quad \left(x - \frac{ph + p'h'}{p + p'}\right)^2 + y^2 = \frac{U}{p + p'} - \frac{pp'}{(p + p')^2}\,\overline{HH'}^2.$$

D'après cela, si p, p', U sont des quantités positives, le lieu de M est une circonférence dont le centre divise le segment HH′ additivement dans le rapport $p' : p$. Cette circonférence se réduit à son centre, si $U = \frac{pp'}{p + p'}\,\overline{HH'}^2$, valeur de U qui est un minimum.

Supposons ensuite $p > o$, $p' < o$. Alors M décrit une circonférence dont le centre divise le segment HH′ soustractivement dans le rapport $-p' : p$. La valeur $U = \frac{pp'}{p+p'}\,\overline{HH'}^2$, qui réduit la circonférence à son centre, est un maximum ou un minimum suivant que $p + p' < o$ ou $> o$.

POLYGONES PODAIRES D'UN QUADRILATÈRE CONVEXE

a. Appliquons la formule (1) aux triangles podaires du point M par rapport aux triangles BCA et C_1B_1A qui sont de même sens ; nous aurons :

$$(6)\quad \begin{cases} 2B'C'A' = (R^2_d - \rho^2_d) \sin A \sin B \sin C, \\ 2B'C'D' = (R^2_a - \rho^2_a) \sin A \sin B_1 \sin C_1. \end{cases}$$

Avec les notations

$$\lambda_a = \sin B \sin C, \quad \lambda'_a = \sin B_1 \sin C_1,$$
$$L_a = \lambda_a R^2_d + \lambda'_a R^2_a, \quad L'_a = \lambda_a R^2_d - \lambda'_a R^2_a,$$

les équations (6) donnent par addition et par soustraction :

$$(7) \qquad \lambda_a \rho^2_d + \lambda'_a \rho^2_a = L_a - 2(B'C'A' + B'C'D') \text{ cosée } A,$$

$$(8) \qquad \lambda_a \rho^2_d - \lambda'_a \rho^2_a = L'_a - 2(B'C'A' - B'C'D') \text{ cosée } A.$$

Semblablement, si l'on pose :

$$\nu_a = \sin B \sin C_1, \quad \nu'_a = \sin B_1 \sin C,$$
$$N_a = \nu_a R^2_b + \nu'_a R^2_c, \quad N'_a = \nu_a R^2_b - \nu'_a R^2_c,$$

les triangles podaires des triangles C_1BA et B_1CA_1 donnent :

$$(9) \qquad \nu_a \rho^2_b + \nu'_a \rho^2_c = N_a - 2(A'D'C' + A'D'B') \text{ cosée } A,$$

$$(10) \qquad \nu_a \rho^2_b - \nu'_a \rho^2_c = N'_a - 2(A'D'C' - A'D'B') \text{ cosée } A.$$

b. Les hypothèses $\lambda_a = \lambda'_a$, $\nu_a = \nu'_a$ seront examinées plus tard ; elles se rapportent au cas où BCB_1C_1 est un trapèze ou un quadrilatère cyclique.

D'après l'égalité (2), chacune des équations (8) et (10) représente le lieu des points M dont le polygone podaire A'B'D'C'A' a une même aire. Ce lieu est donc une circonférence dont le centre est le point de rencontre E_a des droites O_aO_d, O_cO_b et divise celles-ci dans les rapports $\lambda_a : \lambda'_a$, $\nu_a : \nu'_a$. On a pour le rayon r de cette circonférence :

$$(11) \quad r^2 = \frac{L'_a - 2(B'C'A' - B'C'D') \text{ cosée } A}{\lambda_a - \lambda'_a} - \frac{\lambda_a \lambda'_a}{(\lambda_a - \lambda'_a)^2} \overline{O_aO_d}^2.$$

La quantité B'C'A' — B'C'D' étant nulle en P, A, A_1, c'est-à-dire lorsque M coïncide avec l'un des points P, A, A_1, tout point de la circonférence PAA_1 jouit de la même propriété, de sorte que les droites B'C' et A'D' sont parallèles entre elles. Si r_a désigne le rayon de cette circonférence, on déduit de l'équation (11)

$$r^2_a = \frac{L'_a}{\lambda_a - \lambda'_a} - \frac{\lambda_a \lambda'_a}{(\lambda_a - \lambda'_a)^2} \overline{O_aO_d}^2,$$

$$r^2 = r^2_a - 2\frac{B'C'A' - B'C'D'}{(\lambda_a - \lambda'_a) \sin A}.$$

Il résulte de là que $B'C'A' - B'C'D'$ admet en E_a un maximum si $\lambda_a - \lambda'_a > 0$, et un minimum si $\lambda_a - \lambda'_a < 0$.

La valeur absolue de $B'C'A' - B'C'D'$ représente la surface d'un quadrilatère convexe si M est intérieur à l'un des cercles O_a, O_d et extérieur à l'autre ; elle représente la surface d'un quadrilatère concave si M est intérieur ou extérieur à ces deux cercles à la fois et que l'un des triangles $B'C'A'$, $B'C'D'$ est intérieur à l'autre.

c. De l'équation (7) on conclut qu'en tout point d'une circonférence de centre F_a la somme $B'C'A' + B'C'D'$ a la même valeur. Soient σ_a le rayon d'une telle circonférence et σ'_a la distance F_aP ; on trouve facilement :

$$\sigma^2_a = \sigma'^2_a - 2\,\frac{B'C'A' + B'C'D'}{(\lambda_a + \lambda'_a)\sin A}.$$

La quantité $B'C'A' + B'C'D'$ étant nulle en P l'est en tout point de la circonférence de centre F_a et passant par P ; un minimum de cette quantité a lieu en F_a.

L'équation (9) admet des conclusions analogues. Par exemple, en tout point de la circonférence de centre F'_a et passant par P la droite $A'D'$ passe par le milieu de la droite $B'C'$.

Voici une application de ce qui précède :

Les circonférences de centres F_a et F'_a qui passent par le point P se recoupent en un point P_a dont le polygone podaire $A'B'D'C'A'$ est un parallélogramme. Ce point étant symétrique de P par rapport à la droite E_bE_c est également situé sur les circonférences E_bBB_1 et E_cCC_1.

POLYGONES PODAIRES D'UN QUADRILATÈRE CONCAVE

a. On a trouvé pour le polygone podaire du quadrilatère concave ABA_1B_1A

$$A'D'B'C'A' = A'B'C' - A'B'D' \qquad D'C'A' - D'C'B'.$$

Les triangles ABC, B_1CA_1, BA_1C_1, C_1B_1A étant de même sens, on a pour leurs triangles podaires :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} 2A'B'C' &= (R^2_a - \rho^2_d)\sin A \sin B \sin C,\\ -\,2A'B'D' &= (R^2_c - \rho^2_c)\sin A_1 \sin B_1 \sin C,\\ 2D'C'A' &= (R^2_b - \rho^2_b)\sin A_1 \sin B \sin C_1,\\ -\,2D'C'B' &= (R^2_a - \rho^2_a)\sin A \sin B_1 \sin C_1.\end{aligned}\right.$$

Posons :

$$\lambda_c = \sin A \sin B, \quad \lambda'_c = \sin A_1 \sin B_1,$$
$$\nu_c = \sin A_1 \sin B, \quad \nu'_c = \sin A \sin C_1 ;$$

les équations (11) donneront :

$$\lambda_c\rho^2_d + \lambda'_c\rho^2_c = L_c - 2(A'B'C' - A'B'D') \operatorname{coséc} C, \tag{12}$$

$$\lambda_c\rho^2_d - \lambda'_c\rho^2_c = L'_c - 2(A'B'C' + A'B'D') \operatorname{coséc} C, \tag{13}$$

$$\nu_c\rho^2_b + \nu'_c\rho^2_a = N_c - 2(D'C'A' - D'C'B') \operatorname{coséc} C_1, \tag{14}$$

$$\nu_c\rho^2_b - \nu'_c\rho^2_a = N'_c - 2(D'C'A' + D'C'B') \operatorname{coséc} C_1, \tag{15}$$

où L_c, L'_c, N_c, N'_c représentent des fonctions de R_d, R_c, R_b. R_a.

Chacune des équations (12) et (14) représente le lieu d'un point M dont le polygone podaire a une même aire ; ce lieu est une circonférence de centre E_c. En tout point de la circonférence PCC_1 les triangles A'B'C' et A'B'D' ont même surface et même sens ; donc les droites A'B' et C'D' sont parallèles entre elles.

L'aire A'D'B'C'A' passe par un maximum en E_c.

b. Si $\lambda_c \gtrless \lambda'_c$, on conclut de l'équation (13) qu'en tout point d'une circonférence de centre F_c la somme A'B'C' + A'B'D' reste constante, et qu'en tout point de la circonférence de centre F_c et passant par P la droite A'B' passe par le milieu de la droite C'D'.

Des conclusions semblables se déduisent de l'équation (15).

c. L'égalité $\lambda_c = \lambda'_c$ peut s'écrire :

$$\sin A : \sin B_1 = \sin A_1 : \sin B, \qquad \text{ou} \qquad C_1B_1 : AC_1 = C_1B : C_1A_1,$$

de sorte que $C_1B_1 = \frac{AC_1 \cdot C_1B}{C_1A_1}$. Par suite, si la droite A_1C_1 recoupe la circonférence ABA_1 en J, on a $C_1B_1 = JC_1$. De là résulte un moyen de construire la droite AC quand on donne les points A, B, A_1, C_1. En particulier, si la droite A_1C_1 est perpendiculaire à AB, B_1 est l'orthocentre du triangle ABA_1.

D'après l'équation 13), le lieu d'un point M tel que la somme A'B'C' + A'B'D' est constante, est une perpendiculaire à la droite O_dO_c.

L'égalité $\nu_c = \nu'_c$ donne lieu à des résultats analogues.

POLYGONES PODAIRES D'UN QUADRILATÈRE ÉTOILÉ

On a trouvé pour le quadrilatère CA_1C_1AC

$$A'D'C'B'A' = A'C'B' - A'C'D' = D'B'A' - D'B'C'.$$

a. Les triangles podaires des triangles ABC, C_1BA_1, B_1CA_1, AC_1B_1 donnent :

$$\begin{aligned} -2A'C'B' &= (R^2_d - \rho^2_d)\sin A \sin B \sin C,\\ -2A'C'D' &= (R^2_b - \rho^2_b)\sin A_1 \sin B \sin C_1,\\ 2D'B'A' &= (R^2_c - \rho^2_c)\sin A_1 \sin B_1 \sin C,\\ 2D'B'C' &= (R^2_a - \rho^2_a)\sin A \sin B_1 \sin C_1. \end{aligned}$$

De ces égalités on déduit :

$$(16) \qquad \lambda_b\rho^2_d + \lambda'_b\rho^2_b = L_b + 2(A'C'B' + A'C'D')\,\text{coséc}\,B,$$

$$(17) \qquad \lambda_b\rho^2_d - \lambda'_b\rho^2_b = L'_b + 2(A'C'B' - A'C'D')\,\text{coséc}\,B,$$

$$(18) \qquad \nu_b\rho^2_c + \nu'_b\rho^2_a = N_b - 2(D'B'A' + D'B'C')\,\text{coséc}\,B_1,$$

$$(19) \qquad \nu_b\rho^2_c - \nu'_b\rho^2_a = N'_b - 2(D'B'A' - D'B'C')\,\text{coséc}\,B_1,$$

où

$$\lambda_b = \sin A \sin C,\ \lambda'_b = \sin A_1 \sin C_1,\ \nu_b = \sin A_1 \sin C, \text{ etc.}$$

Il est facile de voir que les égalités $\lambda_b = \lambda'_b$, $\nu_b = \nu'_b$ supposent les points A, A_1, C, C_1 concycliques. Ce cas étant écarté, les équations (17) et (19) montrent qu'en tout point d'une circonférence de centre E_b l'aire $A'D'C'B'A'$ a la même valeur ; en tout point de la circonférence PBB_1 elle est nulle et les droites $A'C'$, $B'D'$ sont parallèles entre elles.

b. De l'équation (16) on conclut que la somme $A'C'B' + A'C'D'$ reste constante quand le point M parcourt une circonférence de centre F_b ; elle est nulle si cette circonférence passe par P, la droite $A'C'$ passe alors par le milieu de la droite $B'D'$.

On verrait de même qu'en tout point de la circonférence de centre F'_b et passant par P la droite $B'D'$ passe par le milieu de la droite $A'C'$.

Une communication ultérieure pourra compléter les présents développements.

Deuxième Section

Il est d'abord procédé au renouvellement du Bureau. Sont élus :

Président : M. M. de Broglie.
Vice-Président : M. de Hemptinne.
R. P. V. Schaffers.
Secrétaire : R. P. Lucas.

On convient de formuler comme suit la Question de concours : On demande une contribution, théorique ou expérimentale, à l'étude des *isotopes*.

M. le D^r Étienne Henrard, qui a bien voulu offrir une aimable hospitalité à la Section, présente l'*Ionomètre du D^r Solomon*.

Les appareils employés jusqu'à ce jour pour le dosage des rayons X ne donnaient point toute satisfaction. Je ne rappellerai que les plus répandus, l'étincelle équivalente de Beclère, le radiochronomètre de Benoist, le quantitomètre d'Holtzknecht, la pastille de Sabouraud-Noiré (effet Villard), le chromoradiomètre de Bordier, le dispositif de Holtzknecht employant également l'effet Villard. Dans l'appréciation des virages du réactif, il entre un gros élément subjectif.

Aujourd'hui le D^r Solomon de Paris nous présente un appareil basé sur un principe rationnel et qui semble appelé à un grand succès. L'ionomètre radiologique est constitué essentiellement par un électroscope à feuille relié à une chambre d'ionisation par l'intermédiaire d'un conducteur, souple aux deux extrémités. L'électroscope et le conducteur de liaison sont recouverts d'une gaine métallique à la terre ; seule, la chambre d'ionisation est soumise à l'action des rayons X et, eu égard à ses petites dimensions, peut même être introduite dans les cavités naturelles.

La chute de la feuille d'un certain nombre de divisions, disons de 60 à 10, correspond à un travail d'ionisation bien défini rapporté au Radium élément et mesure la quantité d'énergie reçue par la chambre d'ionisation sous forme de rayonnement total, direct et secondaire.

La capacité du système, électroscope et chambre d'ionisation, peut être décuplée par la simple manœuvre d'une tige et, ainsi, commodément adaptée à la mesure des doses modérées ou massives, à volonté.

Le secrétaire donne lecture du résumé que M. Ariès joint au Mémoire qu'il envoie *Sur les propriétés des fluides au voisinage de l'état critique*. La Section vote l'impression de ce Mémoire dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ.

Le P. V. Schaffers, S. J., communique une *Deuxième note sur le Bouillant de Franklin* (¹).

1. J'ai fait construire des bouillants plus grands que le modèle ordinaire, et contenant de l'alcool méthylique. En plongeant une des boules dans de l'eau de température connue, j'ai pu aisément vérifier que les dénivellations obtenues sont bien celles qui correspondent aux différences de tension maximum de la vapeur saturante aux températures de la boule chauffée et de la boule froide.

Par exemple, la température initiale étant de 14°, un de mes appareils me donnait 27 cm de dénivellation avec une de ses boules portée à 17°,7 ; un autre 41 cm à 19°. Ce sont, à peu de chose près, les valeurs qu'on peut déduire des Tables du RECUEIL DE CONSTANTES DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE.

2. Pour contrôler l'hypothèse de la *sursaturation,* j'avais fait munir une des boules d'un de mes nouveaux appareils de deux électrodes en aluminium entre lesquelles on pouvait faire passer des étincelles ou des effluves, afin de produire ainsi des ions pour empêcher la sursaturation. Or, on ne constatait aucune différence avant et après le passage des décharges électriques. On n'en obtenait pas davantage en soumettant la boule d'un autre de mes appareils, avant de la chauffer, à un puissant faisceau de rayons X. L'explication des phénomènes basée sur la sursaturation doit donc être rejetée.

3. Il nous faut donc conclure que, dans le cas qui nous occupe, la tension de la vapeur saturante n'est pas celle qui correspond à la température la plus basse de la paroi. Cette conclusion semble

---

(¹) Voir ANNALES, t. XXXIX, 1^re^ partie, pp. 224-228.

en contradiction avec le principe de la paroi froide. Penons, par exemple, le cas où on applique la main au sommet de la boule, en évitant soigneusement de toucher le verre là où il est en contact avec le liquide. La dénivellation commence immédiatement et s'élève instantanément à 2 ou 3 cm ; elle croît ensuite plus lentement et peut atteindre des valeurs considérables, avant que la température du liquide lui-même ait pu subir une modification notable. Donc, la tension de vapeur saturante est et demeure très nettement supérieure à celle qui correspond à la température la plus basse, qui est ici celle de la plus grande partie de la surface de paroi.

On peut bien dire, et ce serait une erreur impardonnable de l'oublier, que dans les conditions de l'expérience la paroi est mouillée et que dès lors le principe ne s'applique pas, vu qu'il suppose que tout le liquide est passé, par distillation ou autrement, sur la paroi froide. Mais le principe a une seconde partie qui s'applique précisément à la période de distillation, et d'après laquelle (voir Chwolson, par exemple) la différence des tensions « est en tout cas extrêmement petite », à moins que les points à température différente ne soient reliés par des tubes longs et étroits. Il est évident que dans notre expérience nous sommes aux antipodes de cette condition, et par conséquent nous ne pourrons guère échapper à la conclusion que la différence des tensions de vapeur respectivement devant les parties froides et chaudes d'une même paroi, loin d'être toujours extrêmement petite, peut être, au contraire, très notable.

Si l'on se rappelle, d'autre part, que certains liquides, l'eau en particulier, ont pour le verre une adhérence telle qu'il est fort difficile de s'en débarrasser complètement, il en résulte que les déterminations de tension maximum de vapeur faites à basse température dans des tubes de verre d'après la méthode de Gay-Lussac, c'est-à-dire, en ne refroidissant pas la totalité du tube qui contient la vapeur, sont très sujettes à caution.

Telles sont, notamment, les valeurs qu'on trouve dans les tables de constantes pour la vapeur d'eau au voisinage de 0°.

4. Terminons par quelques remarques sur les utilisations possibles du bouillant de Franklin.

On peut d'abord l'utiliser comme thermomètre différentiel. Il suffit pour cela d'allonger les branches verticales. De fait, les thermomètres différentiels fournis par certains constructeurs sont construits d'après ce principe. D'autres ne se donnent pas la peine de faire le vide au-dessus du liquide, et alors leurs appareils sont des thermomètres à air, dont la sensibilité, comme nous l'avons vu dans notre première note, est beaucoup moins grande.

Avec les boules remplies, au contraire, de vapeur saturante d'alcool ou mieux encore d'éther, la sensibilité est excellente, et permet de suppléer la pile thermo-électrique pour un bon nombre d'expériences qualitatives sur le rayonnement, sur la conductibilité des liquides et des gaz, etc. S'il s'agit d'expériences quantitatives, il faut toujours mesurer la hauteur de la colonne liquide dans les deux branches verticales et en prendre la différence ; car la distillation qui a lieu dans l'appareil peut faire varier les volumes de vapeur contenus dans les boules, sans changement corrélatif de la pression.

On peut aussi s'en servir pour illustrer certaines lois de l'ébullition. Dans les anciens traités de physique, le phénomène obtenu en chauffant une des boules à la main est souvent cité comme un exemple d'ébullition sous pression réduite. Mais cette interprétation est loin d'être certaine. L'agitation qui se manifeste dans la seconde boule s'explique suffisamment par le passage des bulles de vapeur et d'air chassées de la boule chauffée.

Voici une expérience plus simple et plus instructive. Couchons l'appareil sur la table, après l'avoir secoué de manière qu'il reste une bulle dans le long tube de communication horizontal. Si petite que soit cette bulle, si nous appliquons le bout du doigt sur le tube à l'endroit où elle le touche, nous la verrons se développer rapidement. Appliquons alors plusieurs doigts sur le tube horizontal : la bulle atteindra bientôt de part et d'autre la partie recourbée à angle droit et y détachera une bulle plus petite qui remontera dans la boule, où elle se condensera. Il s'établira ainsi un mouvement pulsatoire régulier.

C'est l'image exacte de ce qui se passe dans l'ébullition. La source de chaleur appliquée au liquide privé d'air n'y développe pas de vapeur (le doigt, ou la main tout entière, appliqué au tube n'y produit rien), mais s'il s'y trouve une bulle gazeuse, si petite qu'elle soit, aussitôt la vapeur s'y développe, la petite atmosphère grossit, détache des bulles qui montent à la surface, et s'entretient constamment par la formation de nouvelles vapeurs.

M. l'abbé De Smedt expose les résultats de ses recherches sur *Les figures d'interférences des rayons X produites par les liquides.*

Cette note contient un résumé des expériences faites, en collaboration avec le Prof. W. H. Keesom, et publiées dans les VERSLAGEN DER KON. AK. VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

P. Ehrenfest, Debye et Scherrer avaient montré la possibilité d'obtenir une figure de diffraction de rayons X en irradiant un ensemble de systèmes de deux points diffractants, orientés complètement au hasard. Un liquide biatomique répond à ces conditions, chacun des atomes étant considéré comme un centre de diffraction. L'angle φ sous lequel on obtient une interférence favorable permettrait de calculer la distance des deux atomes dans la molécule biatomique, au moyen de la formule :

$$a = \frac{7.72\lambda}{4\pi \sin\frac{\varphi}{2}} \quad (\lambda = \text{longueur d'onde employée}).$$

A cet effet a été prise la figure de diffraction de l'oxygène liquide, avec la radiation CuK_α.

L'appareil employé consiste en un verre de Dewar dont la paroi interne est terminée par un tube de verre de quelques millimètres de long ; 2 mm de diamètre et une épaisseur de 0,002 à 0,01 mm. A la partie inférieure de la paroi externe est fixée une chambre photographique. Celle-ci n'est autre chose qu'une boîte cylindrique dont le mince tube de verre occupe l'axe. Un diaphragme permet d'envoyer normalement au tube un mince faisceau de rayons X. Les rayons diffractés par le liquide impressionnent un film fixé contre la paroi cylindrique de la chambre.

Le röntgenogramme de l'oxygène liquide porte un anneau nettement délimité correspondant à un angle de réflexion φ de 27°.

Cette valeur de φ donne pour a la valeur 4Å.

On arrive ainsi à une distance des deux atomes dans la molécule O_2 difficilement admissible, tellement elle est grande.

Aussi les considérations suivantes permettent d'affirmer que la figure d'interférence obtenue ne provient pas des atomes comme centres de diffraction, mais bien des molécules. De la sorte le facteur *a* doit être interprété comme la distance moyenne des molécules dans le liquide.

En effet, le liquide monoatomique argon a donné un anneau de diffraction semblable à celui de l'oxygène.

D'autre part voici un tableau donnant, pour différents liquides, respectivement l'angle de réflexion mesuré sur les films, la valeur *a* qui s'en déduit et la distance moyenne des molécules dans la supposition qu'elles remplissent l'espace aussi bien que possible.

Liquide	φ	a	$1.33\sqrt[3]{\frac{M}{d}}$
Oxygène	27°	4.0Å	4.0Å
Argon	27	4.0	4.1
Benzol	18	6.0^5	5.9
Eau	29	3.7^5	3.6
Alcool éthylique	22	4.9	5.2
Ether éthylique	19	5.7	6.2
Acide formique	24	4.5	4.5

(M = poids moléculaire ; d = densité).

Le röntgenogramme de l'eau porte en outre une particularité intéressante. L'anneau est entouré d'un noircissement uniforme qui finit assez brusquement vers 46°.

Ce noircissement serait dû au nombre relativement grand des molécules qui se trouvent à une distance moindre que la distance moyenne. La limite 46° correspondrait alors à la distance minimum à laquelle deux molécules peuvent se rapprocher. Cette valeur serait 2.4Å.

Par contre, les figures d'oxygène et d'argon portent entre l'anneau intense un second anneau plus faible d'ouverture 46° pour l'oxygène et 49° pour l'argon. Ces anneaux indiqueraient que dans ces liquides il y a un faible pourcentage de molécules associées qui se trouvent à une distance 2.4Å pour l'oxygène et 2.3Å pour l'argon.

Troisième Section

Sur le rapport favorable de MM. Fritz Carpentier et P. Debaisieux, la Section vote l'insertion aux C. R. des séances de la Société scientifique du travail suivant : *Contribution à la Faune Diptérologique de Belgique (Dolichopodides)*, par l'abbé O. Parent.

Grâce à la complaisance de M. Séverin, j'ai pu examiner la collection de Dolichopodides du Musée Royal d'Histoire Naturelle de Bruxelles et la Collection Jacobs conservée dans le même établissement. D'autre part, M. Tonnoir, les Docteurs Guillaume et Goetghebuer ont bien voulu me confier l'étude de leurs captures dans ce groupe.

Cet ensemble déjà imposant de matériaux, m'a permis de faire le relevé des Dolichopodides observés en Belgique.

Je n'ai pas tenu compte dans cette note, des listes antérieurement parues : Lameere, *Faune de Belgique*, t. III, pp. 471 à 481 ; — Fernand Meunier, *Chasses Diptérologiques aux environs de Bruxelles*, 1898; *Contributions à la Faune Diptérologique des environs d'Anvers*, 1905, 1908, 1910, dans ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Je m'en suis tenu strictement, pour mon travail, aux matériaux que j'ai eus sous les yeux.

A la suite des espèces observées en Belgique, j'ai cru bon de citer celles que je connais, des deux départements français du Nord et du Pas-de-Calais et que je n'ai pas constatées dans les collections citées plus haut. J'ai voulu par là attirer l'attention sur des espèces qui pourraient fort bien se rencontrer aussi en Belgique.

Il serait désirable, mais il paraît encore prématuré, pour moi tout au moins, d'esquisser la distribution géographique des espèces d'après les divisions naturelles du sol belge. C'est un travail qui demanderait, pour être sérieux, des observations multiples et prolongées. Tout au plus peut-on signaler quelques espèces propres au littoral, et quelques-unes paraissant cantonnées dans la région de Hockaï. Pour me garder de généralisations trop hâtives, au lieu de citer les différentes zones je me contenterai de signaler quelques localités pour les espèces les plus remarquables.

Une fois établie la distribution géographique des espèces, il resterait au biologiste à en discerner les facteurs. C'est une tâche difficile, car nous ignorons presque tout des mœurs, du régime et de la vie larvaire de ces Diptères.

Pour abréger, les différentes collections : Musée Royal de Bruxelles, Tonnoir, Guillaume, Goetghebuer et Jacobs, lorsqu'elles seront citées, seront désignées respectivement, dans la liste qui suit, par les lettres M, T, G, Ggb, J. Les espèces inconnues du Nord de la France sont marquées d'un astérisque, celles non encore trouvées en Belgique sont placées entre crochets.

[ACHALCUS flavicollis, Meig. Arras — Aire sur la Lys].
ANEPSIOMYIA flaviventris, Meig. (T, J.)
ARGYRA argentina Meig.
    argyria Meig.
    atriceps Loew.
    * auricollis, Meig. (T, G. Ggb).
    confinis Ztt.
    diaphana Fab
    * Hoffmeisteri Fall. Westermael (M)
    [grata Lw. Arras, Cambrai, Lille]
    [elongata Ztt. Aire]

CAMPSICNEMUS curvipes Fall
    scambus Fall
    *umbripennis Lw. Env. de Nieuport (J)
    [loripes Hal. littoral, Paris-Plage.]
    [picticornis Ztt. Lille, Paris-Plage.]

C. umbripennis Lw., habite de préférence les régions montagneuses. Sa présence à Nieuport me paraît remarquable.

CHRYSOTIMUS molliculus Fall
    * concinnus Ztt. Capelle-au-Bois (J)

C. concinnus est une espèce rare, ou tout au moins peu remarquée, peut-être confondue avec *C. molliculus*. C'est ainsi que Jacobs, dans sa collection, avait réuni les deux espèces sous la même étiquette. Signalé d'Angleterre, inconnu de France Septentrionale.

CHRYSOTUS cilipes Meig.
    cupreus Macq

CHRYSOTUS fermoratus Ztt
lœsus Wied
microcerus Kow
monochœtus Kow
neglectus Wied
suavis Lw.
[angulicornis Kow. Lille]
[blepharosceles Kow. Angre, Paris-Plage]
[gramineus Fall. Lille, Arras]
[palustris Verrall. Paris-Plage]
[pulchellus Kow. Paris-Plage]
[pulvillatus Parent = varians Kow. Arras, Lille]

Ayant pu confronter mon espèce (BULL. DU MUSEUM d'H. N., Paris, 1920) avec le type de Kowarz, entre les mains de M. Collin de Newmarket, j'ai dû conclure à l'identité des deux espèces.

DIAPHORUS * Jacobsi mihi, sp. nov. Enghien (J)
[merlimontensis mihi nov. spec.]
* nigricans Meig.
oculatus Fall
* tripilus Lw. Vinderhaute (Ggb)
Winthemi Meig. (J)

Je donne à la fin de l'article, la description de *D. Jacobsi*, nov. spec.

[**DOLICHOPHORUS** Kerteszi Lichtw. Lille, Aire]
DOLICHOPUS acuticornis Wied (Ggb, J)
* agilis Meig. Hoogstraeten, Watermael (M)
* atratus Meig. Hockai, Stoumont (M. Ggb)
atripes Meig. Francorchamps, Genck (M)
brevipennis Meig.
campestris Meig.
claviger Stann
confusus Ztt
discifer Stann
festivus Hal
griscipennis Stann
latelimbatus Macq
* lepidus Stoeg. Hockai (M)
linearis Meig.
longicornis Stann
longitarsis Stann
* melanopus Meig. Carlsbourg (M)
nitidus Fall
nubilus Meig.
pennatus Meig.

Dolichopus picipes Meig. Diepenbeck, Virton
* planitarsis Fall. Campenhout (J)
populаris Wied.
plumipes Scop
sabinus Hal, Nieuport (J)
signatus Meig.
simplex Meig.
tanythrix Lw. Hockai
trivialis Hal
ungulatus Lin
urbanus Meig.
* vitripennis Meig. Hockai (M. J)
[argyrotarsis Wahlb., Angre]
[cilifemoratus Macq. Frétin]
[clavipes Hal, Paris-Plage]
[excisus Lw. Arras, Lille, Aire]
[notabilis Ztt. Zuydcoote]
[parvicaudatus Ztt. Env. de Lille]
[signifer Hal, Lille]
[virgultorum Wlk. Paris-Plage]
[Wahlbergi Ztt. Env. de Cambrai]

Eutarsus aulicus Meig.
Gymnopternus œrosus Fall.
brevicornis Stoeg.
celer Meig.
chalybeus Wied. Basse Hormalle (M. T)
cupreus Fall
[assimilis Stoeg. Lille]
[metallicus Stann. Arras-Aire]

Hercostomus chrysozygos Wied.
* cretifer Walk. (M)
germanus Wied. Vinderhaute
gracilis Stann
nanus Macq.
nigripennis Fall. Francorchamps
plagiatus Lw.
rusticus Lw.
[atrovirens Lw. Lille, Arras-Aire]
[marginatus Lichtw.]
[nigriplantis Stann. Dunkerque]
[parvilamellatus Macq. Arras-Aire]

Hydrophorus balticus Meig.
* bipunctatus Lehm. Forêt de Soignes (T)
bisetus Lw. I de Saaftingen

Hydrophorus * litoreus Fall. Campenhout (J)
* nebulosus Fall. Hockai (M)
prœcox Lehm. Overmeire (Ggb)
* viridis Meig. Hekelgem (J)

Hygroceleuthus diadema Hal
Hypophyllus obscurellus Fall.
* discipes Ahr. Spa. (Ggb)
[crinipes Ztt. Arras]

[Lamprochromus elegans Meig. Aire]
Leucostola vestita Wied.
* Liancalus virens Scop

Machœrium maritimœ Hal. I. de Saaftingen
Medeterus ambiguus Ztt (M)
apicalis Ztt
dendrobœnus Kow
diadema Lin
jaculus Fall
* muralis Meig. Campenhout (J)
pallipes Ztt
truncorum Meig.
[flavipes Meig. Paris-Plage]
[signaticornis Lw. For. de Raismes (M)]

Micromorphus albipes Ztt
[Nematoproctus distendens Meig. Lille-Aire]
Neurigona Erichsoni Ztt
pallida Fall
quadrifasciata Fab

Oligochoetus * micaceus Lw. (J). Sans localité
* plumbellus Meig. Blucivald

Poecilobothrus nobilitatus Lin
* regalis Meig. Ruysbroeck (J)
[ducalis Lw. Paris-Plage]
[principalis Lw. Aire. Paris-Plage]

Porphyrops communis Meig
crassipes Meig.
nemorum Meig.
* nigribarbata Beck. Etterbeek (M)
* riparia Meig.
[consobrina Ztt Paris-Plage]
[micans Meig. Paris-Plage]

Raphium * longicorne Fall. Hockai Genck (M)
Scellus notatus Fab

[Schoenophilus versutus Walk. Aire. Lille]
Sciapus * albifrons Meig. Ruaet (J)
contristans Wied.
longulus Fall. Hoogstraeten (M)
* nervosus Lehm. Enghien (J)
* pallens Wied. Villers-la-Ville (J)
platypterus Fab
Wiedemanni Fall
[Villeneuvei mihi, nov. spec. Paris-Plage]

Voir plus loin la description de cette nouvelle espèce.

Sybistroma nodicornis Meig
Sympycnus annulipes Meig.
Syntormon pallipes Fab.
pumilus Meig.
* tarsatus Fall. Louette-St-Pierre (M)

Tachytrechus ammobates Wlk.
* ripicola Lw.
[insignis Stann. Paris-Plage]
[notatus Stann. Paris-Plage]

Teuchophorus calcaratus Macq.
signatus Ztt
spinigerellus Ztt
[monacanthus Lw.]
[simplex Mik.]

Thinophilus flavipalpis Ztt.
[ruficornis Hal]

Thrypticus bellus Lw.
[smaragdinus Gerst. Lille. Aire]

Xanthochlorus ornatus Hal
tenellus Wied.

Xiphandrium * albifrons Ztt (T)
appendiculatum Ztt
* auctum Lw. (T)
caliginosum Meig.
fasciatum Meig. (T, J, Ggb)
* monotrichum Lw. Bruxelles (T, J)
quadrispinosum Strobl (T)

La famille des Dolichopodides comprend actuellement environ 600 espèces paléarctiques connues. La liste précédente en compte 136 relevées en Belgique. Nul doute, étant données la variété des régions naturelles de ce pays et l'activité de mes aimables correspondants, qu'elle ne s'enrichisse considérablement au cours des années qui suivront.

M. le curé Claerhout s'occupe de l'*Origine des Slaves.*

Magog désigne un peuple japhétide dans la Genèse (¹). Dans une célèbre prophétie d'Ezéchiel (²), on voit ce même peuple assaillir le peuple de Dieu redevenu prospère après la captivité de Babylone. Dans l'Apocalypse le même vocable revient (³). On comprend que ce n'est plus ici un nom ethnique ; c'est un nom figuré qui désigne les ennemis de Dieu et de son Église. « ... Satan sera relâché de sa prison et sortira, et il séduira les nations, qui sont aux quatre coins du monde, Gog et Magog, et il les assemblera au combat, eux dont le nombre est comme le sable de la mer ... ». On pourrait peut-être aussi interpréter ce verset comme suit : Satan assemblera toutes les nations et entre autres τον μαγογ...

Quel est ce peuple qui apparaît dans la Genèse et dont nous retrouvons encore une fois le nom, soit au propre, soit au figuré, à la fin de l'Écriture sainte ?

C'est le peuple des Scythes qui habitaient les steppes de la Russie méridionale.

Les Sémites ont toujours donné le nom de Magog aux Scythes et nous n'avons aucun motif pour récuser leur témoignage et rejeter les traditions des Juifs et des Arabes au sujet des Scythes (⁴).

Hérodote (⁵) qui visita les côtes septentrionales de la Mer Noire détermine leur habitat limité par le Danube, la Mer Noire, la Mer d'Azof et le Don et il décrit leurs mœurs et leurs coutumes.

Les artistes grecs, qui habitaient les mêmes régions, décoraient leurs parures, leurs colliers et leurs vases de cerfs et d'autres animaux et de représentations de Scythes et les produits de cet

---

(¹) *Gen.* X, 2.

(²) *Ezech.* XXXVIII, XXXIX, passim.

(³) *Apocal.* XX, 7.

(⁴) C. Van Ongeval, *Liber Genesis.* Gand, 1902, p. 121. — L. B. Drach, *Catholicum Lexicon hebraicum et chaldaicum. Hoc est Guillelmi Gesenii Lexicon ordine alphabetico digestum.* Paris, 1848, p. 328.

(⁵) G. Dottin, *Les anciens Peuples de l'Europe.* Paris, 1916, p. 173.

art se retrouvent dans les tumulus ou kourganes scythes des époques de Hallstatt et de La Tène (¹).

Avec le Dictionnaire encyclopédique russe, nous regardons les Scythes comme les ancêtres des Slaves (²).

M. Cuno avait déjà défendu la même thèse en 1871 (³).

M. Carnoy (⁴), dans le paragraphe qui traite du groupement indo-européen des Slaves, ne signale comme ancien peuple slave que la tribu des Wantes, établie dans la région du haut Dniéper qu'il regarde avec M. Müllenhoff (⁵) comme le centre de dispersion des Slaves. Mais l'écrivain goth Jordanès ne mentionne cette tribu slave que vers l'an 550 de l'ère chrétienne, ce qui est de nulle importance dans la question qui nous occupe.

M. Hirt (⁶) ne nous renseigne pas non plus sur l'origine des Slaves dans le livre important qu'il a consacré aux Indo-Européens. Sans y insister, il indique comme les ancêtres des Slaves, les Neures, dont on retrouve peut-être le souvenir dans le nom de la ville de Nurz, arrosée par le Boug. Les *Neuroi* habitaient au nord des Scythes ; ils avaient les mêmes usages que les Scythes et à ce titre on peut les regarder comme des Scythes (⁷).

M. Zaborowski identifie les anciens Slaves aux Vénètes.

Les Vénètes ont habité l'Europe centrale des rives de la Baltique aux rives de l'Adriatique. Quand ils ont quitté les rives de la Baltique pour descendre vers l'Adriatique, les Slaves qui après eux ont occupé les régions de l'est de l'Allemagne et qui sont

---

(¹) D. N. Anutschin, *Russland in archäologischer Beziehung*. Dans CENTRALBLATT FÜR ANTHROPOLOGIE, t. VIII, 1903. Stettin, pp. 65 et 129. Article traduit du russe et paru dans le t. XXVII du DICTIONNAIRE ENCYCLOPÉDIQUE RUSSE. Petrograd, 1900. M. J. Dechelette a traduit le même article pour l'ANTHROPOLOGIE, t. XV. Paris, 1904, p. 351.

(²) D. N. Anutschin, *op citat.*, p. 129 de la trad. allem.

(³) J. G. Cuno, *Forschungen im Gebiete der alten Völkerkunde*. Erster Teil. *Die Scythen*. Berlin, 1871.

(⁴) A. Carnoy, *Les Indo-Européens*. Bruxelles, 1921, p. 47.

(⁵) Müllenhoff, *Deutsche Altertumskunde*, t. II, p. 89.

(⁶) H. Hirt, *Die Indogermanen*. Erster Band. Strassburg, 1905, p. 121.

(⁷) O. Bremer, *Ethnographie der germanischen Stämme*. Strassburg, 1900, p. 47. M. Bremer présume que les *Neuroi* sont des Celtes. Il nie que ce soient des Scythes, sans fournir le moindre argument.

encore actuellement fixés dans la Lusace, ont reçu le nom de Vénètes qu'ils ne se sont jamais donné à eux-mêmes et qu'ils n'ont reçu que par hasard. Les Vénètes, dont on possède plusieurs inscriptions que l'on est parvenu à interpréter, sont des Illyriens et c'est bien à tort qu'à la SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE PARIS M. Zaborowski les a regardés comme des Slaves et comme les ancêtres des Slaves (1).

On peut faire valoir contre notre opinion une objection des plus graves. On rattache les Scythes à la souche ethnique des Iraniens. Ils ne peuvent donc être les ancêtres des Slaves.

Voici comment nous répondons brièvement à cette difficulté :

Sur quoi se base-t-on pour ranger les Scythes parmi les peuples iraniens ? Sur quelques noms propres scythes qui ont un cachet iranien et qui s'expliquent par les dialectes persans. Mais l'Iran n'est pas si loin du Caucase. Les Scythes ont fait de fréquentes incursions en Asie et ils peuvent avoir emprunté quelques noms aux Iraniens. Ce qu'il faudrait pour déterminer avec certitude la souche ethnique des Scythes, ce serait, comme s'exprime M. Dottin (2) dans son récent ouvrage sur les anciens peuples de l'Europe, « quelques lignes bien conservées de scythe authentique ».

Le slave a emprunté plusieurs mots à l'indo-iranien; de tous les groupements indo-européens de l'Europe, le slave est le plus rapproché de l'indo-iranien et il est, comme l'indo-iranien, très archaïque dans ses déclinaisons. C'est précisément à ces traits iraniens que nous présentent les Scythes, les ancêtres des Slaves, que nous croyons pouvoir attribuer cette ressemblance entre le slave et l'indo-iranien.

---

(1) M. Zaborowski, *Origine des Slaves*. Dans BULL. ET MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE PARIS. Année 1904, pp. 671-720. — H. Hirt, *Die Indogermanen*. Zweiter Band. Strassburg, 1907, pp. 604 et suiv. — H. Hirt, *Die Deutung der germanischen Völkernamen*. Dans BEITRAGE ZUR GESCHICHTE DER DEUTSCHEN SPRACHE UND LITERATUR. XVIII, Band. Halle a. S. 1894. *Venetoi*, p. 513. — A. Carnoy, *op. laudat.*, p. 36 : « Le nom des Vénètes se retrouve dans celui des Wendes ou Slaves de l'Allemagne de l'Est, mais c'est un hasard dû peut-être au fait que ces derniers sont allés occuper des régions que les Vénètes avaient quittées pour descendre vers l'Adriatique. »

(2) G. Dottin, *op. laudat.*, p. 178.

M. Hirt (¹) s'exprime comme suit : La similitude entre le slave et l'iranien résulte du contact des anciens Slaves et des Iraniens. La différence entre les deux groupes linguistiques provient du fait de l'interruption de ce contact.

Tout s'explique : les Scythes ont eu de fréquents rapports avec les Iraniens : de là la ressemblance entre les deux groupes linguistiques. Les Scythes ont décliné. Ils sont retombés dans la barbarie et le contact a été interrompu.

Ainsi l'objection faite pour ruiner notre thèse, tend au contraire à la confirmer.

Il est donné communication d'un mémoire de M. Pierre Pruvost sur *Les Arachnides fossiles du Houiller de Belgique.*

Après une discussion à laquelle prennent part M. A. Renier, Bᵒⁿ de Dorlodot, M. l'abbé Delépine et M. E. De Wildeman, la Section vote l'impression du travail.

Au cours de la révision de la faune du terrain houiller de Belgique, dont m'a chargé la Direction du Musée Royal d'Histoire Naturelle de Bruxelles, j'ai eu l'occasion d'examiner un certain nombre d'empreintes appartenant au groupe des Arachnides. Outre de très intéressants spécimens conservés dans les galeries du Musée Royal, d'autres fossiles se rapportant à cette classe d'animaux m'ont été fort obligeamment confiés par des collègues (²). Grâce à eux, j'ai pu dresser une liste aussi complète que possible des types d'Arachnides exhumés jusqu'à ce jour du terrain westphalien en Belgique.

Voici cette liste avec quelques observations sur la structure des types les plus intéressants et leur gisement. Elle comprend six espèces différentes, se répartissant en deux ordres, quatre familles et cinq genres distincts.

(¹) H. Hirt, *Die Indogermanen,* t. I, p. 119.

(²) J'adresse ici mes très vifs remerciements à ces précieux auxiliaires, en particulier à M. le baron Jean de Dorlodot, qui a mis à ma disposition les fossiles découverts par lui et conservés au Musée houiller de Louvain, à M. J. Cornet qui m'a soumis ses échantillons de l'École des Mines de Mons, à M. F. Denuit, ingénieur à Morlanwelz, à qui je dois communication d'une intéressante forme nouvelle, décrite plus loin.

ORDRE DES PEDIPALPI (S. O. des AMBLYPYGI).
Famille des Tarantulidae Karsch.
Genre *Protophrynus* Petrunk.

1. Protophrynus carbonarius Petrunk. — Ce genre et cette espèce sont connus d'après un seul échantillon du terrain houiller de l'Illinois qu'a décrit M. A. Petrunkevitch (¹), et caractérisés par un céphalothorax plus large que long, réniforme, portant deux paires d'yeux : l'une médiane sur une éminence près du bord antérieur, l'autre de position plus latérale.

M. J. de Dorlodot a découvert en Belgique le second représentant connu dans ce type intéressant (²). Il a été trouvé au cours d'une exploration entreprise à Grisœil par M. A. Renier et par lui-même. Il s'agit d'une empreinte de céphalothorax qui montre, très bien conservées, les deux paires d'yeux, et une structure générale tout à fait semblable à celle du céphalothorax de *Protophrynus*. Je n'hésite pas à rapporter cette empreinte à ce genre, et je ne vois aucun caractère qui permette de la distinguer du *P. carbonarius* Petrunk. Il faudrait avoir l'abdomen et les pattes pour être tout à fait certain de l'identité du type belge avec l'espèce américaine. En attendant, rien n'autorise à l'ériger en type spécifique différent.

Gisement : toit de Veine n° 6 des Charbonnages Belges (puits n° 10, à Grisœil, profondeur 1050 m.). Coll. Musée houiller de Louvain, n° 8.265. L'empreinte négative a été déposée par M. A. Renier dans les collections du Service Géologique de Belgique.

ORDRE DES ANTHRACOMARTI Karsch.
Famille des Eophrynidae Karsch.
Genre *Trigonomartus* Petrunk (³).

(¹) A. Petrunkevitch, *A Monogr. of the terrestr. palaeoz. Arachnida of N. America.* TRANS. CONNECTIC. ACAD. OF SCIENCES, vol. 18, 1913, p. 69, pl. VI, fig. 30-31, texte fig. 32-33.

(²) J. de Dorlodot, Découv. de *Graeophonus anglicus* dans le Couchant de Mons, ANN. SOC. GÉOL. BELG., t. LI, p. 252. — Le genre *Graeophonus* auquel il l'a rapporté provisoirement est, en effet, très voisin de *Protophrynus*, mais n'a qu'une paire d'yeux.

(³) A. Petrunkevitch, *op. cit.*, pp. 102-105.

2. Trigonomartus Villeti Pruvost. — J'ai fait connaître cette espèce en 1912 et l'ai classée dans le genre *Trigonomartus* en 1919 (¹) d'après un échantillon du terrain houiller du Pas-de-Calais. En même temps je signalai la présence d'un représentant de cette espèce dans le bassin de Mons (²) d'après une empreinte conservée au Musée Royal d'Histoire Naturelle. Il s'agit d'un abdomen dont la seule différence avec le type français réside dans la taille presque de moitié plus petite, différence sur laquelle je n'oserais fonder de distinction spécifique.

Gisement : Levant du Flénu, puits n° 19. Assise du Flénu, zone inférieure. Coll. Musée R. Hist. Nat. I. G. 3.598. (Coll. Persenaire).

Famille des Brachypygidae Pocock (³).
Genre *Brachypyge* H. Woodw. (= *Maiocercus* Pocock.)

3. Brachypyge carbonis H. Woodw. — Ce type est le premier Arachnide découvert dans le houiller belge. L'empreinte, décrite en 1878 par P. Woodward, qui la prit d'abord pour un abdomen de crabe, a fait l'objet de nombreux mémoires et a été figurée maintes fois (⁴).

Un examen du type conservé au Musée Royal m'a convaincu que ces descriptions et figures étaient toutes entachées d'erreur du fait que l'on avait superposé aux traits structuraux de la face dorsale de l'abdomen, ceux de la face ventrale, et interprété comme des plis longitudinaux de la carapace de simples accidents de fossilisation. Je donne ici (fig. 1) deux croquis représentant la face dorsale et la face ventrale de l'abdomen séparées et débarrassées de ces accidents.

(¹) P. Pruvost, *La faune contin. du t. h. du N. de la France.* MÉM. EXPL. CARTE GÉOL. FRANCE, p. 348 et sq. (1911).

(²) P. Pruvost, ANN. SOC. GÉOL. NORD. T. XLI, p. 92.

(³) J'ai indiqué (*op. cit.*, 1919, p. 357), d'après les documents découverts dans les bassins français, comment cette famille était nettement caractérisée par son céphalothorax segmenté et le contour festonné de l'abdomen.

(⁴) On trouvera sa synonymie et la liste bibliographique la concernant dans R. Pocock, *A Monogr. of the terrestr. Carbon. Arachnida of Great Britain.* PALAEONT. SOC., p. 59 (1911).

Il résulte de cette reconstitution :

1°) que l'abdomen de *Brachypyge* est de structure beaucoup moins compliquée qu'on ne l'avait admis jusqu'ici ;

2°) que le genre *Maiocercus* créé postérieurement par M. Pocock [1] ne peut être distingué de *Brachypyge*.

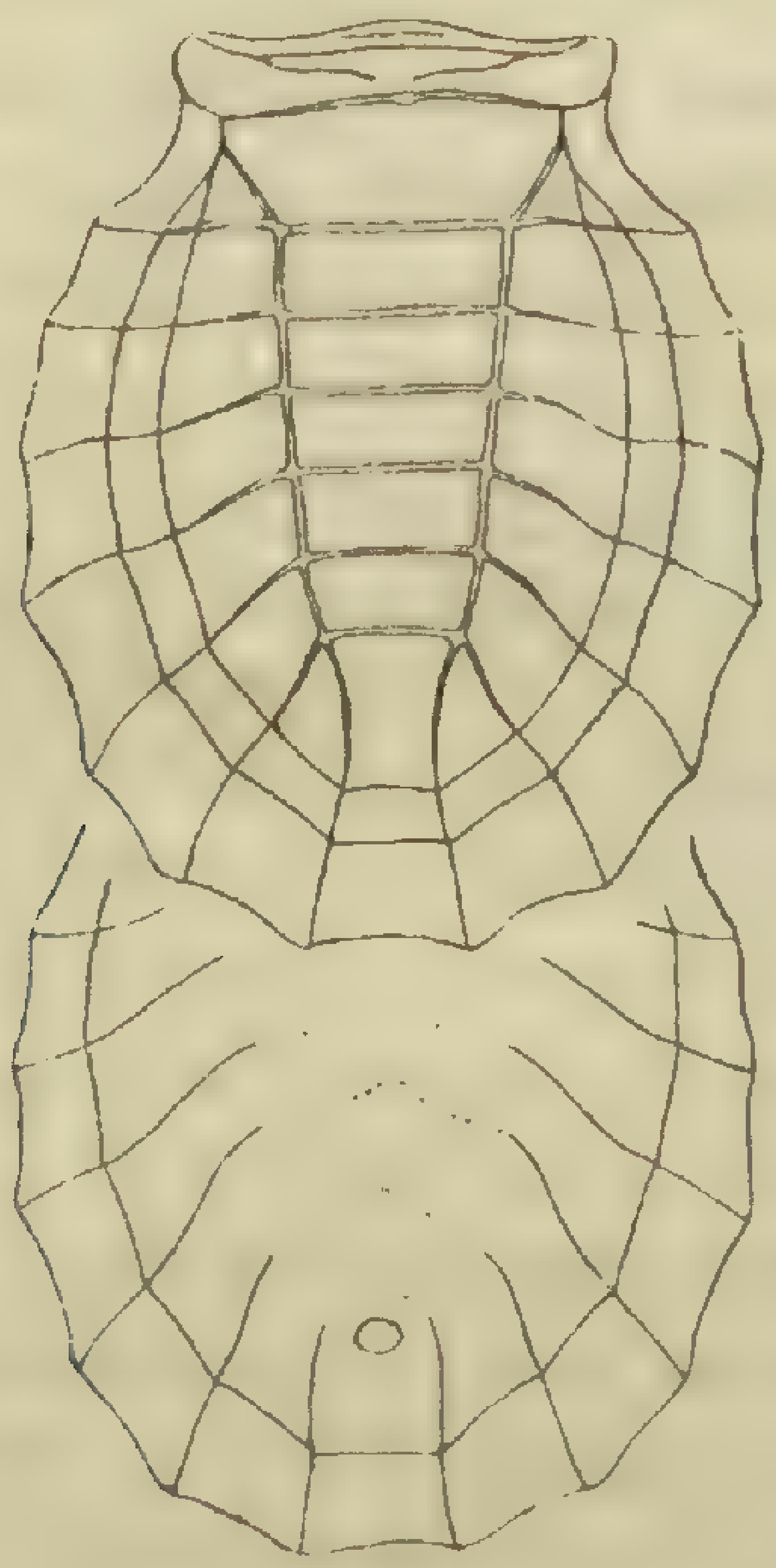


FIG. 1. — ***Brachypyge carbonis*** Woodw. Restauration nouvelle de l'abdomen face dorsale et face ventrale, d'après le type Charb. de Belle-et-Bonne (gr. = 3).

Les tubercules et ornements de la carapace n'ont pas été représentés sur ce croquis.

Un second échantillon de *Brachypyge carbonis*, mieux conservé, et que m'a communiqué M. J. Cornet, confirme en tous points la nouvelle reconstitution que j'en donne.

Gisement. Deux individus connus : 1°) Type : Charb. de Belle-et-Bonne, mai 1875. Assise du Flénu. Coll. Musée Royal, I. G. 3.598. (Coll. Persenaire).

2°) Toit de Veine aux Layes, puits S^te^ Henriette, niveau de 530, charb. de Mariemont. (Récolte de M. Hector Deltenre.) Coll. École des Mines de Mons.

---

[1] R. Pocock, *op. cit.*, p. 60. — P. Pruvost, *op. cit.* (1919), p. 359.

4. Brachypyge (Maiocercus) orbicularis Gill. — M. J. de Dorlodot a découvert dans un schiste à *Nevropteris heterophylla* de Bascoup (¹), une très belle empreinte absolument identique à l'espèce de L. Gill (²). Je n'hésite pas à l'y rapporter. Il s'agit d'un abdomen bien conservé. D'après ce qui précède, il faut classer cette espèce dans le genre *Brachypyge,* mais elle se distingue de la précédente par l'allure circulaire, plus large que longue, de l'abdomen et la largeur des plaques tergales.

B. orbicularis est connu dans le terrain houiller du Lancashire, d'Anzin et d'Aniche, où il se trouve au sommet de l'Assise de Vicoigne. L'exemplaire belge est le quatrième cité de cette espèce.

Gisement : Charb. de Bascoup, niveau inconnu, Coll. Musée houiller de Louvain, n° 8490.

Famille des Anthracomartidae Haase.
Genre *Anthracomartus* Karsch.

5. Anthracomartus Denuiti nov. sp. — L'échantillon holotype de cette espèce que je dédie à M. F. Denuit, ingénieur aux charbonnages de Mariemont-Bascoup, est une empreinte montrant le céphalothorax et l'abdomen très bien conservés et quelques débris de pattes. J'en donne (fig. 2) un dessin. Cette espèce se distingue de tous les *Anthracomartus* connus par la très grande largeur du limbe, c'est-à dire de ses lames pleurales externes, et par la longueur de son céphalothorax.

Le type le plus voisin est celui que H. Woodward a décrit en 1907 (³), sous le nom d'*Anthr. trilobitus* Scud., mais qui n'appartient certainement pas à l'espèce de Scudder. Cet échantillon anglais qui provient des Middle Coal Measures de Sparth (Lancashire) est peut-être un représentant de notre espèce.

(¹) J. de Dorlodot, Ann. Soc. géol. Belg. t. XLIII, p. 170.

(²) L. Gill, Geol. Magaz., déc. V, vol. VIII (1911), p. 395- fig. 1-2 et P. Pruvost, *op cit.* (1919), p. 360.

(³) H. Woodward, Geol. Magaz., déc. V, vol. IV, p. 548, fig. 5.

Gisement : *A. Denuiti* provient du toit de grande Veine du Parc, au charbonnage de Mariemont-Bascoup. Il y a été découvert par M. Denuit. Coll. F. Denuit.

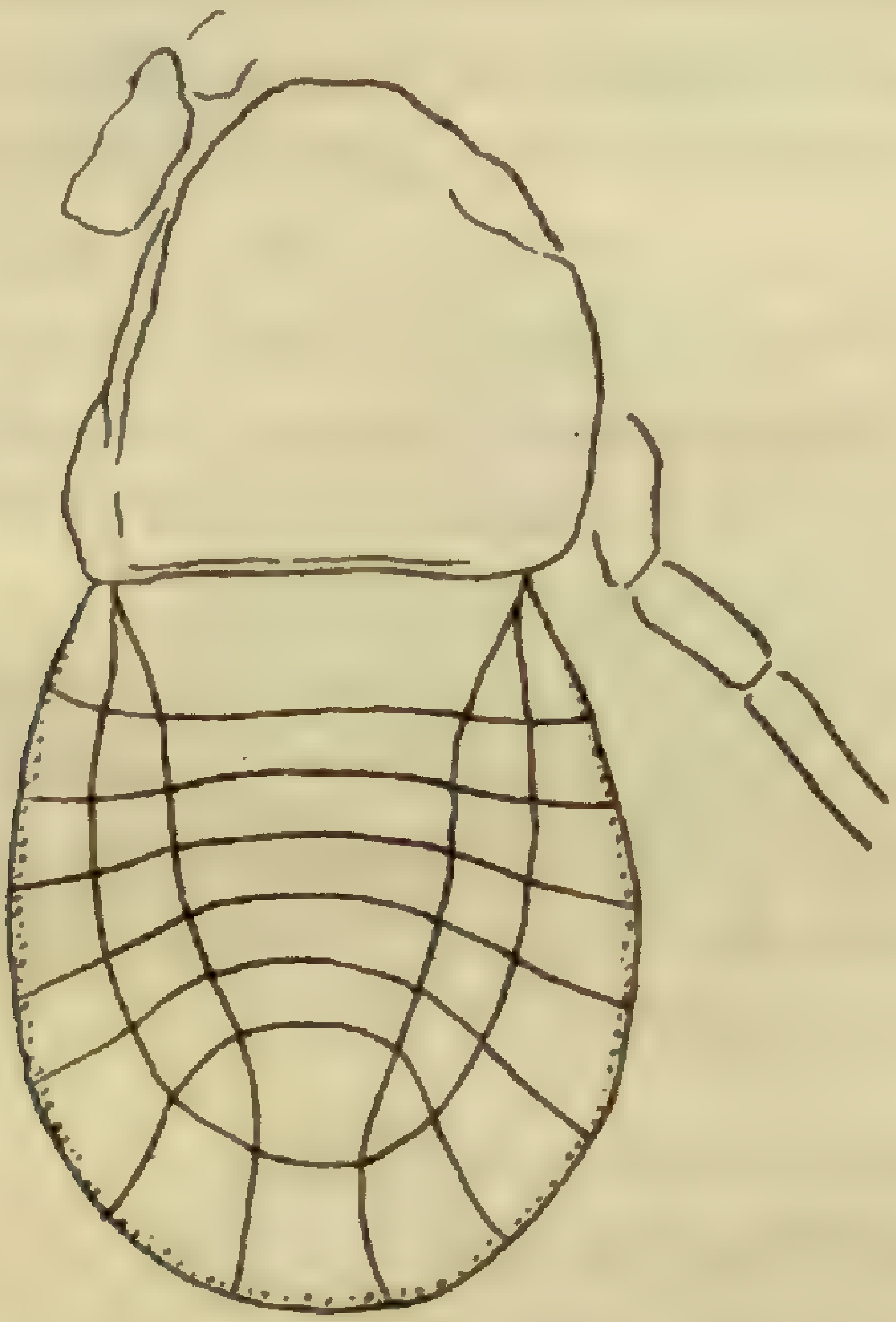


FIG. 2. — *Anthracomartus Denuiti* nov. sp. Face dorsale (gr. = 3). Grande veine du Parc. Charb de Mariemont-Bascoup.

6. Anthracomartus Volkelianus Karsch (¹). — Enfin M. J. Fraipont a signalé une empreinte de cette espèce dont le type est du houiller de Silésie (²). N'ayant pas eu l'occasion d'examiner ce fossile, je me borne à le mentionner ici, d'après l'autorité de mon savant collègue.

Gisement : L'empreinte en question provient du toit de Dure-Veine, au siège Banneux du Charbonnage de Bonne-fin.

En résumé, sur les six espèces d'Arachnides signalées ci-dessus, deux (*Br. carbonis* et *Anthr. Denuiti*) sont spéciales aux bassins belges. Les autres sont connues d'autre part, soit dans le Nord de la France (*Trig. Villeti, Br. orbicularis*), soit en Silésie (*Ant. Volkelianus*), soit en Grande-Bretagne (*Br. orbicularis*). Une

---

(¹) J. Fraipont, ANN. SOC. GÉOL. BELG., t. XXXIV, p. B. 77.

(²) Karsch, ZEITSCHR. DEUTSCH. GEOL. GESELLS., vol. 34 (1882), p. 556.

autre enfin est signalée seulement en Amérique du Nord et en Belgique *(Prot. carbonarius).* Cette dernière observation fournit un nouveau trait de ressemblance (fait sur lequel j'ai plusieurs fois insisté) entre la faune continentale houillère du bassin franco-belge et celle des bassins américains de même âge.

Au point de vue stratigraphique ces six espèces se répartissent ainsi : l'une provient de l'Assise du Flénu : *Trigonomartus Villeti;* une autre, *Brachypyge carbonis,* est commune aux assises du Flénu et de Charleroi, les autres ont été recueillies dans l'Assise de Charleroi.

Pour ce qui concerne celles de ces espèces dont on connaît en dehors de la Belgique le niveau stratigraphique très précis, nous sommes amenés à constater qu'elles se maintiennent rigoureusement à ce niveau dans le bassin belge; ainsi *Trig. Villeti,* qui provient de l'Assise du Flénu, était connue à Lens à la base de l'Assise de Bruay (Veine Arago) qui est son équivalent ; de même *Brachyp. orbicularis* se maintient en Belgique, comme dans le Nord de la France, dans le faisceau de couches immédiatement subordonné au niveau marin de Petit Naviron-Poissonnière (sommet de l'Assise de Vicoigne, zone inférieure de l'Assise de Charleroi). On voit que ces fossiles très rares paraissent suivre la règle observée chez d'autres formes plus communes du houiller, celle d'une distribution verticale assez limitée et toujours la même.

M. l'abbé J.-J. Kieffer s'occupe de *Nouveaux Chironomides à larves aquatiques.*

Les Diptères mentionnés ici ont été obtenus d'éclosion par M. le D^{r} Thienemann (Sleswig-Holstein) et M. Harnisch (Silésie). Leurs larves ou nymphes ont été recueillies dans des lacs ou des ruisseaux de Pologne, de Silésie, du Sleswig-Holstein. Les abréviations R, Cu, D, P, et T, pour les nervures, signifient : Radiale, Cubitale, Discoïdale, Posticale et Transversale.

I. CERATOPOGONINAE

Bezzia chrysocoma **n. sp.** ♂. Brun noir. Yeux séparés du demi-diamètre du scape. Bouche égalant la demi-hauteur de la tête, formée de 2 pièces blanchâtres et de 3 pièces chitineuses et brunes, non dentelées. Article 1er du palpe ressortant après le tiers basal sous forme de dent obtuse, 2^{e} subcylindrique, à peine plus long que le 1er, 3^{e} et 4^{e} plus courts que le 1er, plus de deux fois aussi longs que gros. Antennes et panache jaune clair, scape noir, trois derniers articles et extrémité du 11^{e} bruns, 2-10 ensemble d'un tiers plus longs que 11-14 réunis, 3^{e} un peu plus long que gros, un peu plus court que le 2^{e}, 3-10 graduellement plus longs, 10^{e} de moitié plus long que le 9^{e}, 11^{e} égalant les deux suivants réunis, 12^{e} aussi long que le 10^{e}, 12-14 égaux, cylindriques, à poils épars, le 11^{e} portant, comme 2-10, des poils du panache, ceux-ci disposés sans ordre sur les 2/3 distaux des articles, appliqués, dépassant peu l'extrémité du 11^{e} article, à environ 20 sur un côté. Thorax noir, mat, à poils assez longs ; scutellum roux ; balanciers blancs. Aile blanchâtre, à soies microscopiques, nervures très pâles, Cu un peu plus de moitié plus longue que R, séparée de la pointe alaire de sa longueur, bifurcation de D sous T, celle de P distale du double de la longueur de T. Pattes jaunes, hanches, anneau avant et après le genou antérieur, extrémité du tibia antérieur, quart proximal et distal des quatre fémurs postérieurs et des quatre tibias postérieurs, extrémité distale des articles tarsaux 1-3 et les deux derniers noirs, fémur antérieur à trois spinules, les autres inermes, 4^{e} article tarsal cordiforme, crochets petits. Pince noire ; articles terminaux gros, à poils latéraux assez longs, moitié distale un peu amincie et arquée faiblement ; lamelle supérieure bilobée, les lobes arrondis, atteignant le milieu des articles terminaux, à poils longs ; lamelle inférieure triangulaire dans sa moitié basale, puis amincie en une pointe linéaire atteignant l'extrémité des articles basaux ; entre ces deux lamelles se trouve un stylet brun, large comme la pointe de la lamelle inférieure et atteignant l'extrémité des articles basaux. L. 3 mm. — Silésie.

II. CHIRONOMARIAE

Kribiobius plœnensis **n. sp.** ♀. Jaune brunâtre. Une ligne enfoncée noire traverse le front jusqu'au clypeus, qui est brun noir. Yeux séparés de 2 1/2 fois leur largeur terminale, partie mince deux fois aussi longue que large. Article 4^{e} des palpes le plus long, 2^e^ et 3^e^ égaux. Antenne brunâtre, 6^e^ article plus de deux fois aussi long que le 2^e^, poils du verticille atteignant presque l'extrémité de l'article, à quatre comme sur les quatre articles précédents, ceux-ci graduellement amincis en col dans leur moitié distale, avec trois soies sensorielles. Thorax pruineux de gris, trois bandes raccourcies du mesonotum, metanotum et mesosternum noirs, balanciers blancs. T et base de Cu noires, Cu de 2/3 plus longue que R, plus près de la pointe alaire que D, bifurcation sous T. Pattes blanchâtres, hanches, fémurs, tibia antérieur, et 5^e^ article des tarses bruns, métatarse antérieur d'un tiers plus long que le tibia, celui-ci sans éperon ; pulvilles réticulés, un peu plus courts que les crochets, quatre tibias postérieurs à deux éperons courts et à peignes confluents. L. 7,5 mm. — Grand lac de Ploen, Sleswig-Holstein.

Paratendipes albitibia **n. sp.** ♂. Tête jaune brunâtre. Yeux séparés de 1 1/2 fois leur largeur terminale, partie mince de moitié plus longue que large. Palpes longs, pâles, 2^e^ article presque trois fois le 1^er^, égal au 3^e^, 4^e^ de moitié plus long que le 3^e^ ; antenne et panache brun noir, 14^e^ article presque de 2/3 plus long que 2-13 réunis, 2^e^ double du 3^e^, 3^e^ et 4^e^ à peine transversaux, 5-13 au moins aussi longs que gros. Thorax roussâtre, trois bandes raccourcies, metanotum et mesosternum noirs et un peu luisants ; balanciers blancs, scutellum gris blanchâtre. Aile hyaline, Cu deux fois R, T non assombrie, bifurcation peu distale. Pattes jaune brunâtre, tibias et tarses blancs, tibia antérieur un peu plus court que le fémur, à écaille terminée par un éperon hyalin, métatarse antérieur d'un cinquième plus long que le tibia, double du 2^e^, 4^e^ deux fois le 5^e^, à peine plus court que le 3^e^, tarse non barbu, empodium et pulvilles très courts, quatre tibias postérieurs à 2 éperons courts, peignes confluents. Abdomen brun jaunâtre, très mince, tergites 2-7 très longs. Pince assez semblable à celle de **albimanus**, mais appendices supérieurs non amincis proximalement, leur tiers distal très mince et arqué fortement. L. 4,5 mm. — Petit lac de Ploen.

Chironomus insolitus **n. sp.** Diffère de tous par la pince du ♂, qui est comme chez **Ch. latidens** Gœtgh. et les antennes de la ♀

à articles sans col. Thorax et abdomen du ♂ noirs, tibia antérieur barbu longuement ; thorax de la ♀ jaune en partie. L. ♂ 6 mm., ♀ 5 mm. — Holstein.

Cryptochironomus baciliger **n. sp.** Blanc ou vert, sans taches ni bandes, 5ᵉ article tarsal, flagellum du ♂, 6ᵉ article antennaire de la ♀, bruns. Yeux séparés du quart (♂) ou de la moitié (♀) de leur longueur, partie mince plus de deux fois aussi longue que large (♂). Article 4ᵉ des palpes le plus long. Panache gris ; 12ᵉ article 2 1/2 fois aussi long que 2-11 réunis, 2ᵉ double du 3ᵉ, 3-11 moins de deux fois aussi gros que longs. Article 6ᵉ des antennes de la ♀ de moitié plus long que le 5ᵉ, aminci distalement, 3-5 à tiers distal aminci et presque en col, verticilles à six poils, dont deux courts. Cu et R à soies alignées et denses, moitié distale de D à soies espacées, Cu de 2/3 plus longue que R, à peine plus loin de la pointe alaire que D, bifurcation à peine distale. Tarse antérieur non barbu, métatarse d'un tiers plus long que le tibia, dont l'écaille est allongée et obtuse, 2-4 graduellement raccourcis, 4ᵉ double du 5ᵉ, pulvilles réticulés. Abdomen du ♂ très mince. Articles terminaux de la pince longs, grêles, arqués, un peu amincis vers le milieu ; appendices supérieurs en forme de bâtonnets, atteignant le milieu des articles terminaux, leur extrémité élargie latéralement et très brièvement trilobée, les deux lobes médiaux les plus courts, en forme de grosse verrue, portant chacun une courte soie ; appendices inférieurs atrophiés ; pointe de la lamelle très longue et mince. L. ♂ 4,5 mm., ♀ 3 mm. — Étang Woltersteich, Sleswig-Holstein.

Polypedilum heptastictum **n. sp.** ♂. Tête brun noir. Yeux séparés de deux fois leur largeur terminale, partie mince deux fois aussi longue que large. Palpes très longs, articles graduellement plus longs. Antenne et panache bruns, scape noir, 14ᵉ article de moitié plus long que 2-13 réunis, 10-13 au moins aussi longs que gros. Thorax noir, très brillant ; scutellum roux brun ; balanciers brunâtres, tige plus claire. Aile blanchâtre, à sept taches grises, dont 1 allongée, occupant la base de la cellule cubitale, 1 allongée au milieu de cette cellule, 1 à l'extrémité de chaque rameau de P, 1 à la base de la cellule posticale, 1 au milieu de la cellule anale, 1 à l'extrémité de cette cellule, contre le milieu du rameau proximal de P. Pattes blanchâtres, fémurs un peu brunâtres, métatarse antérieur de moitié plus long que le tibia, celui-ci à écaille portant un éperon brun, les quatre pulvilles minces, quatre tibias postérieurs à éperon unique et long. Abdomen brun sombre, comme la pince, dont les articles terminaux sont droits et graduellement amincis dans la moitié distale ; appendices supérieurs glabres, courbés à angle droit au milieu, moitié basale droite, plus large que la moitié distale, ayant à l'endroit de la courbure une soie longue et droite ; appendices inférieurs ne dépassant pas le tiers basal des articles terminaux, extrémité portant à l'angle latéral une soie droite et très longue, les autres soies dorsales longues et arquées ; lamelle avec une longue pointe. L. 4,5 mm. — Silésie.

Polypedilum nympha K. **var.** *plœnensis* **n. var.** ♂. Diffère du type comme il suit : trois bandes raccourcies du mesonotum, metanotum et mesosternum brun noir et brillants, tergites brunâtres. Yeux séparés seulement de leur largeur terminale, partie mince à peine plus longue que large. Scape brun noir, flagellum blanc sale ou brunâtre, panache gris, 14^e article de moitié plus long que 2-13 réunis, 3-13 aussi longs que gros. Bifurcation de P très distale, des 2/3 de son rameau proximal. Pince exactement comme chez le type. L. 4,5 mm. — Grand lac de Ploen.

***Phaenopsectra superatum* n. sp.** ♀. Jaune roussâtre, puis gris. Yeux courbés presque à angle droit, partie mince un peu élargie à l'extrémité, presque deux fois aussi longue que large. Antennes jaunes, 6^e article brun, presque deux fois aussi long que le 5^e, avec quatre poils terminaux aussi longs que tout l'article, 2^e article rétréci au milieu, col de moitié plus long que gros, 3^e et 4^e avec un col aussi long que la nodosité ou trois fois aussi long que gros, 5^e graduellement aminci dans sa moitié distale, mais sans col ; verticilles à sept longs poils. Metanotum, trois bandes raccourcies peu distinctes et mesosternum jaune roussâtre et luisants ; scutellum blanchâtre ; balanciers blancs, massue brune à l'extrémité.

Cu dépassée par la costale du double de T, celle-ci non assombrie, plus grosse que Cu et presque perpendiculaire sur elle ; surface poilue. Pattes blanchâtres, fémur antérieur d'un quart plus long que le tibia, dont l'écaille est allongée, avec un éperon noir, métatarse presque de moitié plus long que le tibia, 2-4 graduellement raccourcis, 4^e un peu plus de deux fois le 5^e, pulvilles latéraux avec 4 ou 5 rameaux médians, les deux autres aussi minces que l'empodium ; peignes des quatre tibias postérieurs confluents, à dents obtuses ou tronquées, grand peigne inerme, le petit à long éperon. Abdomen brun, bord postérieur des tergites et cerci blanchâtres. L. 3 mm. — Grand lac de Ploen.

Remarque. **P. superatum**, **P. connectens** et **Microchironomus superatus** sont les seuls représentants des **Chironomariae** ayant Cu dépassée par la costale.

Lenzia albiventris **n. sp.** Jaune brunâtre. Vertex brun, bouche jaune clair. Yeux séparés de 1 1/2 fois leur largeur terminale, partie mince linéaire et deux fois aussi longue que large (♂), ou de moitié plus longue que large (♀). Palpe long, blanchâtre, 4^e article le plus long. Antenne du ♂ brun noir, panache gris, scape noir, 14^e article deux fois aussi long que 2-13 réunis, 3-13 à peine transversaux. Antenne de la ♀ jaune, scape noir, 2^e article rétréci au milieu, col un peu plus long que gros, 3-5 à col presque trois fois aussi long que gros, verticille à sept longs poils, 6^e article presque deux fois le 5^e, avec deux poils terminaux aussi longs que lui. Mesonotum brillant, quatre bandes, dont les latérales raccourcies, les médianes percurrentes, metanotum et mesosternum brun noir ; scutellum blanc, balanciers blanc pur. Aile poilue, dépassant beaucoup l'abdomen chez la ♀, lobe à angle droit, nervures jaunes, Cu de 2/3 plus longue que R, aussi proche de la pointe alaire que D, bifurcation à peine distale, T comme chez **Chironomus**. Pattes blanches ; écaille du tibia antérieur avec un éperon court et hyalin, en outre, près de l'extrémité, avec une soie unique, grosse, appliquée et extrêmement longue, tarse brisé chez le ♂ ; métatarse de la ♀ de moitié plus long que le tibia ; quatre tibias postérieurs avec deux éperons, l'un droit, l'autre incurvé et pâle, peignes confluents, les deux pulvilles aussi longs que l'empodium, un peu plus courts que les crochets, avec huit rameaux médiaux. Abdomen du ♂ blanc, 8^e segment et articles basaux de la pince blanc sale, reste de la pince blanc pur. Abdomen de la ♀ blanc, avec les côtés bruns. Articles terminaux de la pince amincis à la base, côté médial cilié de poils courts et denses avant l'extrémité, qui porte une courte soie ; appendices supérieurs linéaires, droits, minces, tiers distal incurvé et graduellement aminci, avec une longue soie latérale à la courbure ; appendices inférieurs larges, linéaires, ne dépassant pas le tiers basal des articles terminaux, extrémité et côté médial distal munis de soies grosses, longues et arquées ; pointe de la lamelle longue, élargie à l'extrémité. L. ♂ 4,5 mm., ♀ 2,8 mm. — Lac de Behl.

Tanytarsus bipunctatus **n. sp.** ♀. Jaune roussâtre. Yeux glabres, échancrés, séparés presque de leur longueur. Palpes très longs, 2^e article au moins double du 1er, un peu plus court que le 3^e, 4^e au moins égal à 2-3 réunis. Antennes de cinq articles, le 5^e et le milieu de 2-4 bruns, 2^e rétréci au milieu, 3^e et 4^e fusiformes, verticilles à 5 ou 6 poils, 5^e article de deux tiers plus long que le 4^e, à verticille deux fois plus long que l'article. Balanciers bruns, tige blanchâtre. Aile poilue, sans lobe ni T ; Cu double de R, bien plus loin de la pointe alaire que D, bifurcation de P un peu distale. Pattes blanchâtres, quart distal des fémurs et extrémité des tibias noirs, fémur antérieur presque deux fois aussi long que le tibia, un peu grossi distalement, métatarse plus de deux fois le tibia, tarse très mince, 4^e article au moins deux fois aussi long que le 5^e, empodium atteignant à peine le milieu des crochets ; quatre tibias postérieurs à peignes courts et séparés, dont l'un à éperon droit et court, l'autre à éperon plus long et incurvé. L. 1,5 mm. — Silésie.

Lenziella bicornuta **n. g.** et **n. sp.** ♂. Jaune ou vert ; 3 bandes raccourcies du mesonotum, metanotum et mesosternum fauves, balanciers blancs, pattes blanchâtres. Lobes frontaux situés chacun sur un mamelon hémisphérique. Antenne de 12 articles, dont le 12^e est plus court que 2-11 réunis, pas de panache. Aile glabre, pointillée, sans lobe, bifurcation très distale. Tibias sans peigne ni éperon, extrémité des 4 postérieurs un peu proéminente sur un côté et munie, à cet endroit, d'une touffe de poils, empodium court. Articles basaux de la pince avec 3 appendices, comme chez **Tanytarsus**, mais les poils de la brosse sont rameux. L. 2 mm. — Holstein.

III. TANYPODINAE

Potthastia longimanus **n. g.** et **n. sp.** ♂. Brun. Yeux glabres, à peine arqués, séparés de plus de leur longueur. Palpes longs, 3^e^ article au moins égal au 4^e^. Panache gris, scape noir, 14^e^ article de 2/3 plus long que 2-13, ceux-ci un peu transversaux. Thorax mat, balanciers blanc sale. Aile blanche, nue, Cu de 2/3 plus longue que R, peu dépassée, T antérieure presque double de T postérieure, très oblique, semblant être la base de D, T postérieure touchant l'antérieure, atteignant P^1 près de la bifurcation. Pattes brunes, quatre tarses postérieurs et le tibia postérieur un peu plus clairs, tibia antérieur un peu plus court que le métatarse, 4^e article obconique, un peu cordiforme, plus court que le 5^e, crochets assez grands, égalant presque la demi-longueur de l'article, à extrémité obtuse et dentelée, empodium très court, éperon du tibia antérieur simple, bien plus long que la grosseur du tibia, grand éperon du tibia postérieur un peu plus long que la grosseur, avec quelques dents latérales peu distinctes, peigne à spinules nombreuses et denses. Pince comme chez **Orthocladius** ; articles terminaux peu longs, stylet noir, perpendiculaire au grand axe de l'article. L. 4 mm. — Lac Dicksee, Sleswig-Holstein.

Procladius K. Les espèces nouvelles à rapporter ici se distinguent comme il suit :

1. Les deux T pâles — 2.
— T antérieure noire, T postérieure pâle ; ♂ — 3 ; ♀ — 4.
2. Panache noir. ♂. Blanchâtre. Yeux séparés du tiers de leur longueur, partie mince deux fois aussi longue que large. Palpe long, brunâtre, 1er article de moitié plus long que gros, 2^e de moitié plus long que le 1er, égalant les 2/3 du 3^e, 4^e égal à 2-3

réunis. Antenne brune, scape noir, 2ᵉ article un peu transversal, 3ᵉ très transversal, 4-13 moins fortement transversaux que le 3ᵉ, 14ᵉ deux fois aussi long que 2-13 réunis, 15ᵉ noir, à stylet. Balanciers et scutellum blancs. Metanotum, 4 bandes raccourcies du mesonotum et mesosternum bruns. Aile glabre, densément pointillée, lobée fortement, sans tache, nervures toutes pâles, tige de P égalant le rameau proximal, T antérieure oblique, touchant presque l'inférieure qui est perpendiculaire et plus courte, Cu longuement dépassée, de plus de la longueur de la T antérieure, à peine plus loin de la pointe alaire que D, les deux rameaux de R égaux. Extrémité des tibias et 2 ou 3 derniers articles tarsaux assombris ; tibia antérieur un peu plus long que le fémur, de moitié plus long que le métatarse, son éperon plus long que sa grosseur, crochets gros, noirs, à trois soies basales, empodium atteignant le milieu des crochets, 4ᵉ article tarsal plus long que le 5ᵉ. Articles terminaux de la pince un peu brunâtres, arqués basalement, extrémité graduellement amincie en un stylet noir. L. 4 mm. — Grand lac de Ploen. *P. bathyphilus* **n. sp.**

— Panache blanc jaunâtre. ♂. Yeux séparés de deux tiers de leur longueur, partie amincie très étroite, plus de deux fois aussi longue que large, n'ayant que deux facettes de front, ce qui distingue cette espèce de toutes les autres. Blanchâtre. Palpes pâles, longs, 1ᵉʳ article de moitié plus long que gros, 2ᵉ à peine plus long que le 1ᵉʳ, 4ᵉ de moitié plus long que le 3ᵉ. Antenne blanchâtre, scapes se touchant, bruns comme le 15ᵉ article, 14ᵉ de moitié plus long que 2-13 réunis, 2ᵉ égalant le 3ᵉ et le 4ᵉ réunis, 3ᵉ plus court que le 4ᵉ, 4-13 plus de deux fois aussi gros que longs. Mesonotum mat, 4 bandes raccourcies, dont les médianes divergentes en arrière, metanotum et mesosternum brun noir. Aile blanchâtre, lobe grand, arrondi, dirigé un peu vers la base, les T pâles comme les autres nervures, Cu longuement dépassée, rameau inférieur de R un peu plus court que le supérieur. Tergites à point brun à chaque angle antérieur ; sternites 3-7 à deux bandes longitudinales brunes, minces, séparées de leur largeur. Articles terminaux de la pince non arqués à leur base, mais offrant à cet endroit une bosselette pubescente. L. 3,5 mm. — Lac de Pologne.

P. leucocoma **n. sp.**

3. Thorax noir, mat, sans bandes. Yeux séparés de leur demi-longueur, partie mince de moitié plus longue que large. Face jaune brunâtre. Palpes brun noir, 4e article blanc, égalant 2 et 3 réunis, 2e de moitié plus que le 1er, qui est presque deux fois aussi long que gros, 3e de moitié plus long que le 2e. Antennes brunes, panache et 15e article brun noir, scapes noirs, séparés du tiers de leur diamètre, 14e article deux fois aussi long que 2-13 réunis, 2e égalant le 3e et le 4e réunis, 4-13 trois fois aussi gros que longs. Balanciers blancs. Aile blanchâtre, T antérieure et base de Cu noires, mais non bordées de brun, les autres nervures pâles, Cu dépassée de plus de la longueur de la grande T, qui touche la T postérieure, rameau inférieur de R plus court que l'antérieur. Pattes brun noir ; tibia antérieur presque de moitié plus long que le métatarse, 4e article un peu plus long que le 5e, crochets et empodium comme chez l'espèce précédente. Abdomen noir, bord postérieur des tergites 6 et 7 blanchâtre. Pince brun noir ; articles terminaux arqués à la base, sans pli transversal et oblique, partie distale graduellement amincie et terminée par un stylet noir. L. 4 mm. — Lac de Sleswig-Holstein.
P. imicola **var.** *nigriventris* **n. var.**

— Même couleur, mais abdomen blanchâtre, sternites 2-7 traversés par une large bande longitudinale brune qui, sur 2-4, est divisée par une ligne médiane ; tergites noirs sauf le bord postérieur ; pattes brunâtres ; yeux séparés de 2/3 ou de 3/4 de leur longueur, partie mince au moins deux fois aussi longue que large. L. 3,5-5 mm. Différents lacs de Pologne, Sleswig-Holstein et Mecklembourg. *P. imicola* **n. sp.** ♂

— Thorax brun roussâtre, 4 bandes très rapprochées et raccourcies du mesonotum, metanotum et mesosternum noirs, les 2 bandes médianes divergentes au tiers postérieur, scutellum roux, balanciers blancs. Yeux séparés de 2/3 de leur longueur, partie mince de moitié plus longue que large. Scapes noirs, se touchant, flagellum et panache brun noir, 15e article noir, stylet court, article 3e plus court que le 4e, 4-13 trois fois aussi gros que longs, 14e deux fois aussi long que 2-13 réunis. Aile hyaline, T antérieure et base de Cu noires, autres nervures pâles, les

deux T se touchant, rameau postérieur de R ponctiforme, Cu longuement dépassée. Pattes brunes, tibia antérieur de moitié plus long que le métatarse, 4ᵉ article un peu plus long que le 5ᵉ, 2-4 à poils 2-3 fois aussi longs que la grosseur du tarse. Abdomen brun noir, plus clair dessous. Articles terminaux de la pince ayant à leur base un pli transversal et oblique, partie distale subitement très amincie, glabre et terminée en un stylet noir. L. 4 mm. — Lacs de Pologne, du Sleswig-Holstein et du Mecklembourg.
P. latifrons **n. sp.** ♂

4. Antenne de 13 articles — 5.

— Antenne de 14 articles. Blanchâtre ; clypeus, palpes, antennes, 4 bandes raccourcies du mesonotum, dont les médianes divergentes en arrière, et bande transversale sur les tergites et les sternites, bruns, ces bandes laissant libres les côtés et un large bord postérieur. Yeux échancrés, séparés de leur longueur, partie supérieure graduellement amincie et moins longue que large. Palpes bruns, 1ᵉʳ article deux fois aussi long que gros, un peu plus court que le 2ᵉ, 3ᵉ de moitié plus long que le 2ᵉ, 4ᵉ un peu plus court que 2 et 3 réunis. Scape plus pâle que le flagellum, 2ᵉ article aussi long que 3 et 4 réunis, 3ᵉ un peu transversal, 3-13 graduellement plus longs, poils des verticilles à quatre, au maximum deux fois aussi longs que la grosseur des articles, quatre soies sensorielles courtes, 13ᵉ article presque de moitié plus long que gros, 14ᵉ égalant les trois précédents réunis, avec verticille et stylet. Scutellum jaunâtre. T antérieure et base de Cu noires, T postérieure blanchâtre, les deux se touchant, rameau inférieur de R aboutissant à la 2ᵉ longitudinale qui est bien marquée, Cu longuement dépassée. Pattes jaune brunâtre ; les quatre fémurs postérieurs, extrémité du fémur antérieur, base des tibias et tous les tarses bruns, tibia antérieur de 2,3 plus long que le métatarse, 4ᵉ un peu plus long que le 5ᵉ, empodium et crochets comme chez les espèces précédentes. L. 3,5-4 mm. — Lac du Kellersee, 2 ♀.
P. heterocerus **n. sp.**

5. Rameau postérieur de R bien plus court que l'antérieur ; yeux séparés de leur longueur, échancrés, peu amincis, cette partie moins longue que large. Antenne brun noir, scapes séparés

de deux fois leur diamètre, 2^e article presque deux fois aussi long que le 3^e, 3-12 graduellement un peu plus longs, le 3^e transversal, le 12^e de moitié plus long que gros, 13^e égalant les trois précédents réunis, avec verticille et stylet ; verticilles et les quatre soies sensorielles comme chez l'espèce précédente. Le reste comme chez le ♂. L. 3,5 mm. *P. latifrons* ♀

— Rameau postérieur de R au moins aussi long que l'antérieur. Couleur différente de celle du ♂ ; jaune blanchâtre, 4 bandes du mesonotum raccourcies et divergentes en arrière, metanotum, mesosternum, tergites et sternites, sauf le bord postérieur, bruns. Yeux et antennes comme chez le précédent, sauf que les verticilles ont cinq poils et que le 2^e article est plus de deux fois aussi long que le 3^e. Le reste comme chez le ♂. L. 3 mm.
P. imicola ♀

Trichotanypus rivicola **n. sp.** ♂. Jaune, mat. Yeux séparés du tiers de leur longueur, partie mince deux fois aussi longue que large. Scape noir, flagellum manque. Metanotum, 4 bandes raccourcies du mesonotum, dont les deux médianes divergent en arrière, et mesosternum noirs. Aile poilue seulement dans leur moitié distale, sans tache, les deux T pâles comme les autres nervures, se touchant, Cu longuement dépassée. Pattes blanchâtres, 5^e article tarsal brun. Tergites à deux taches brunes, presque confluentes sur le 2^e, graduellement plus distantes sur les suivants. Pince jaune ; articles terminaux à lobe basal obtus et de deux tiers plus long que gros, le grand lobe terminé en un stylet noir. L. 4 mm. — Source au Sleswig-Holstein.

Tanypus ciconia **n. sp.** ♂. Entièrement blanc, sauf le flagellum un peu brunâtre et le panache jaune. Yeux séparés de deux fois leur largeur terminale, partie mince presque à angle droit avec la partie large, élargie au tiers terminal. Bouche très longue, au moins aussi longue que la hauteur de la tête, rétrécie après le milieu. Palpes très longs. Scape jaune, 14^e article deux fois aussi long que 2-13 réunis, 15^e un peu aminci en stylet terminal. Mesonotum à trace de quatre bandes jaunâtres. Aile sans tache, Cu non dépassée. Pattes à éperons noirs, grand éperon postérieur un peu plus long que la grosseur du tibia, élargi dans un peu moins de la moitié basale et portant de chaque côté huit dents obliques, serrées et pointues, petit éperon semblable au grand, sauf qu'il est plus court. Articles basaux de la pince très gros, ovoïdaux et se touchant, concaves ventralement ; articles terminaux aussi longs que les basaux, glabres, ayant la forme du cou et de la tête de la cigogne, la partie distale imitant le long bec, noire au bout ; à la base de l'hypopygium, ventralement, se trouvent deux appendices pubescents, soudés proximalement, puis très amincis, cette partie amincie linéaire, subitement incurvée latéralement à son extrémité, qui se termine en un long faisceau de poils agglomérés, dirigé obliquement vers la base ; à l'origine de ces deux appendices se trouve de chaque côté un rameau pubescent et formant un angle droit avec le grand axe des appendices. L. 4 mm. — Source au Sleswig-Holstein.

M. A. Renier présente une note intitulée : *Glanes de paléontologie houillère.*

De toutes les formations sédimentaires qui se rencontrent en Belgique, celle que, depuis 1828 et à l'exemple de d'Omalius, on désigne couramment sous le nom de terrain houiller, donne lieu aux travaux de fouille les plus vastes et les plus continus qui soient sur le territoire national.

Cependant nous sommes loin de posséder à son sujet des listes paléontologiques un peu complètes. Rares ont longtemps été les chercheurs, car la plupart d'entre nous, voyant chaque jour creuser puits et galeries de toute sorte, s'y sont accoutumés au point de n'y plus prêter attention. D'ailleurs le monde des houillères est toujours quelque peu fermé.

Dans ces conditions, il ne serait peut-être pas inutile de signaler de temps à autre, de façon spéciale, les découvertes d'espèces nouvelles ou rares. Ce serait pour nous-mêmes comme un encouragement à persévérer.

1. **Calamites pseudogermarianus** Kidston et Jongmans. — J'ai recueilli au toit de la couche Espérance au siège n° 2 des charbonnages de Fontaine-l'Évêque, c'est-à-dire dans la zone

supérieure de l'assise de Charleroi, et j'ai déposé dans les collections nationales du Musée royal d'Histoire naturelle, un grand lambeau d'écorce de *Calamites* présentant trois verticilles de cicatrices raméales, de forme régulière, légèrement elliptiques transverses, disposées jointivement et situées vers le tiers inférieur de l'entrenœud, les articles pourvus de cicatrices raméales étant séparés par un seul article dépourvu de semblables cicatrices.

Cette forme très spéciale ne me paraît pouvoir être rapportée qu'à l'espèce que MM. Kidston et Jongmans ont distinguée sous le nom de *Calamites pseudogermarianus* et dont ils ont figuré les quatre échantillons connus, recueillis en Angleterre, en Haute-Silésie, en Basse-Silésie et en Tchéco-Slovaquie (Pilsen). [R. Kidston et W. Jongmans, *A Monograph of the Calamites of Western Europa*. Mededeel. Rijksopsporing Delfstoffen, n° 7, 1917, p. 85].

Bien que de plus grande taille et surtout de meilleure conservation, l'échantillon belge se rapproche surtout de celui figuré par MM. Kidston et Jongmans pl. 68, fig. 4, et qui provient de l'Obere Muldengruppe du bassin de Haute-Silésie, c'est-à-dire de l'équivalent de la zone moyenne de l'assise de Charleroi, d'après les parallélisations établies par M. Gothan *(Die Oberschlesische Steinkohlenflora*. Abhand. preussisch. geolog. Landesanstalt. Neue Folge. Heft 75, p. 256).

L'espèce étant encore considérée par ses auteurs comme provisoire, car elle n'est fondée que sur la connaissance de fragments d'écorce, je me bornerai à faire remarquer que sa découverte paraît, en tout cas, constituer une addition à la liste des *Calamites* du Westphalien supérieur de la Belgique. D'après les révisions de MM. Kidston et Jongmans *(op. laud.)*, cette liste serait en effet la suivante :

Calamites Brittsii, D. White. Assises du Flénu et de Charleroi (z. moyenne).
— *carinatus* Sternberg = *C. ramosus* Artis. Ass. Flénu-Charleroi-Chatelet.
— *Cisti* Brongniart. Assises du Flénu, de Charleroi, de Chatelet.
— *cruciatus* Sternberg. Assise du Flénu.
— *Deltenrei* Kidston et Jongmans. Assise de Charleroi.
— *discifer* Weiss. Assise de Charleroi.
— *germarianus* Goeppert. Assise de Charleroi.
— *Goepperti* Ettinghausen. Assises du Flénu et de Charleroi.

Calamites paleaceus Stur. Assises du Flénu et de Charleroi.
— *Sachsei* Stur. Assises de Charleroi (et du Flénu ?).
— *Schutzeiformis* Kidston et Jongmans, *forma typica*. Ass. Charleroi.
— — — *intermedia*. Ass. Flénu ?
— — — *Waldenburgensis*. Ass. du Flénu et de Charleroi.
— *semicircularis* Weiss. Assise de Charleroi.
— *Suckowi* Brongniart. Assises du Flénu, de Charleroi et de Chatelet.
— *undulatus* Sternberg. Ass. du Flénu, de Charleroi et de Chatelet.
— *Wedekindi* Weiss. Assise de Charleroi.

De ces 18 formes, trois ou quatre sont fréquentes et d'ailleurs banales : *Calamites carinatus* (*C. ramosus*), *C. undulatus*, *C. Suckowi* et *C. Cisti*. Cette dernière est toutefois d'une détermination délicate ; il n'est pas rare que l'on y rapporte abusivement des rhizômes de *C. Suckowi*, qui, ainsi que l'a indiqué M. Jongmans, présentent une costulation assez différente de celle des tiges.

Pour avoir une liste complète des *Calamites* du Westphalien de Belgique, il faudrait y incorporer les formes des assises d'Andenne et de Chokier, dont je n'ai pas encore terminé l'étude.

2. **Cingularia typica** Weiss. — D'une conformation assez spéciale, mais qui se rattache intimement à celle des Equisetinées, ces épis ont été considérés durant longtemps comme caractéristiques d'une espèce cantonnée dans le bassin de la Sarre.

M. R. Kidston qui, dans la suite, a encore découvert et décrit cette espèce en Angleterre, dans le bassin du Shropshire [*The Forest of Wyre and the Titterstone Clee Hill Coal Fields*. TRANS. ROYAL SOC. EDINBURGH, vol. LI, part IV (n° 27), 1917, p. 1042, pl. I, fig. 1 et 2], a, le premier, signalé l'existence de *Cingularia typica* parmi des matériaux belges [cf. R. Kidston : *Les végétaux houillers recueillis dans le Hainaut belge et se trouvant dans les collections du Musée royal d'Histoire naturelle, à Bruxelles*. MÉM. MUS. ROY. HISTOIRE NATUR. BELGIQUE, t. IV, 1911, p. 128].

Toutefois, comme il s'agissait de collections anciennes, il pouvait y avoir doute sur la provenance.

Nous avons donc été heureux, MM. P. Bertrand, W. Jongmans et moi, de recueillir, en juin 1920, *Cingularia typica* en assez grande abondance dans des blocs de schiste prélevés au toit de la couche

Cédixée au puits n° 15 du charbonnage du Levant du Flénu, à Cuesmes.

L'extension verticale de l'espèce dans la zone inférieure de l'assise du Flénu résulte 1° de ce que la couche Cédixée n'a été découverte qu'au cours de ces dernières années au charbonnage du Levant du Flénu, alors qu'un échantillon ancien provenant de la fosse n° 19 (sans plus) figure dans les collections du Musée royal d'Histoire naturelle, et 2° du fait que l'ancienne houillère de Belle et Bonne, d'où proviennent d'autres échantillons anciens du Musée royal d'Histoire naturelle, n'a, comme on le sait, exploité qu'un petit nombre de couches situées au beau milieu de l'assise du Flénu, de Grande Belle et Bonne à Cossette, en passant par les Houbarte et Bechée. (Cf. par ex. J. Jacquet, *Tableau général des concessions minières*. Ann. Mines Belgique, t. XXI, 1920, p. 1437 et A. Renier, *Les gisements houillers de la Belgique*. Ann. Mines Belgique, t. XVIII, 1913, pl. III.) Il convient d'ailleurs de remarquer que, dans les concessions en question, surtout dans la seconde, le gisement est en allure normale et d'inclinaison faible, de telle sorte que *Cingularia typica* s'étend au moins, vers le haut, jusqu'à la couche Belle et Bonne, qui, ailleurs, m'a fourni *Asolanus camptotaenia*, forme caractéristique (¹).

3. **Cordaicladus Schnorri** Geinitz sp. — Si les restes de *Cordaites* sont relativement fréquents dans le terrain houiller et, souvent même, si abondants qu'il est permis de conclure que leur enfouissement a eu lieu à proximité d'une forêt de *Cordaites*, il est cependant remarquable que, dans ces gisements sensiblement autochtones, on ne rencontre presque toujours que des feuilles *(Cordaites)*, des inflorescences *(Cordaianthus)* et de nombreuses graines *(Samaropsis)*.

L'un de nos collectionneurs les plus émérites, mon ami et collaborateur Hector Deltenre, a cependant recueilli et figuré [in A. Renier, *Documents pour l'étude de la paléontologie du terrain houiller*. Liége, Vaillant-Carmanne, 1910, pl. 114] un fragment

---

(¹) Tout récemment, j'ai noté la présence d'*Asolanus* dans le toit de la couche Cédixée au puits n° 18 du charbonnage des Produits. *(Note ajoutée pendant l'impression).*

d'écorce de *Cordaites*. En le déterminant *Cordaicladus Schnorri*, M. Deltenre avait d'ailleurs, pour la première fois, si mes données sont exactes, rectifié la position systématique d'une espèce dénommée *Palaeopteris Schnorriana* par Geinitz (*Die Versteinerungen der Steinkohlenformation in Sachsen*. Leipzig, 1885, p. 32; pl. 35, fig. 8) et fondée sur une série de fragments d'écorces, provenant probablement d'un seul et même axe. Étant donnée la forme des cicatrices, il paraît de prime d'abord peu vraisemblable que ce soit là l'ultime trace d'un tronc de fougère arborescente. J'ignore cependant par quelle voie Deltenre fut amené à rectifier l'opinion de Geinitz. En tout cas, la comparaison des documents iconographiques ne me laisse pas de doute sur l'identité spécifique des échantillons saxon et belge.

Tout récemment, j'ai récolté dans le toit schisteux de la couche nº 18 à l'étage de 570 m. du siège de l'Espérance des charbonnages du Hainaut, à Douvrain (Jemappes), un fragment d'écorce de moitié plus petit que celui figuré par Deltenre et qui me paraît devoir être également rapporté à *Cordaicladus Schnorri*. C'est donc le second exemplaire de cette espèce que, à ma connaissance, nous possédons du bassin franco-belge. Et même, la collection Deltenre se trouvant aujourd'hui au Musée houiller, à Louvain, l'échantillon de Douvrain est le seul représentant d'écorce de *Cordaites*, qui figure actuellement dans les collections du Musée royal d'Histoire naturelle.

L'examen de l'échantillon de Douvrain donne lieu à quelques remarques. Au point de vue systématique, il justifie bien l'attribution faite par Deltenre de *Palaeopteris Schnorriana* au genre *Cordaicladus*, encore que, contrairement à ce qu'a indiqué Deltenre, l'échantillon de Mariemont soit non pas un positif, c'est-à-dire vu de l'extérieur, mais un négatif, c'est-à-dire vu de l'intérieur. Provenant d'un rameau un peu plus jeune que celui de Mariemont, et surtout conservé, non pas à l'état de moulage, mais sous forme de lame charbonneuse, l'échantillon de Douvrain établit la transition entre celui de Mariemont et un rameau de diamètre beaucoup plus faible décrit et figuré par M. Kidston sous le nom de *Cordaites principalis* Germar sp., d'après un autre échantillon montrant la connexion des feuilles avec ces rameaux.

(*On the fossil plants of the Kilmarnoch, Galston and Kilwinning Coal Fields, Ayshire.* Trans. Roy. Soc. Edinburgh, vol. XXXVI, 1891, p. 852, pl. IV, fig. 17 ; *The flora of the Carboniferous Period.* Proceed. Yorkshire geolog. polytechn. Soc., vol. XIV, part III, 1902, p. 363, pl. LIII, fig. 1). Le toit de la couche n° 18 renfermait d'ailleurs, à l'endroit même où a été récolté ce fragment d'écorce de *Cordaites*, de nombreuses feuilles de *Cordaites* cf. *principalis* Germar sp. et des débris de *Cordaianthus.*

En ce qui concerne la stratigraphie, j'ajouterais que, tout comme la Veine de Derrière de Mariemont, où Deltenre a récolté son échantillon, la couche n° 18, à l'étage de 507 m. de Douvrain, se trouve vers le haut du tiers inférieur de l'assise de Charleroi, légèrement au-dessous du niveau à faune marine de la couche n° 21 de Ghlin.

En terminant, je ferai observer que la dénomination de *Cordaicladus Schnorri* est évidemment provisoire, si même on désire maintenir une dénomination spéciale pour les rameaux. Il conviendrait notamment de rechercher jusqu'à quel point cette forme de *Cordaicladus* est autre que celle distinguée sous le nom de *Knorria taxina* par Lindley et Hutton [*The fossil Flora of Great Britain,* London, 1833, vol. II, pp. 37-38, pl. 95] et que M. Kidston a identifiée avec *Cordaites principalis* [cf. *Notes on the Palaeozoic Species mentioned in Lindley and Hutton's Fossil Flora.* Proceed. Physic. Soc. Edinburgh, vol. X, 1891, p. 367 et *On the fossil plants of Kilmarnoch... Op. cit.*, p. 353].

Les communications de MM. Pruvost et Renier donnent lieu à l'émission du vœu suivant qui sera transmis au Conseil de la *Société scientifique* aux fins de le faire parvenir, avec son appui, à la *Fédération des Sociétés savantes de Belgique.*

Considérant que des collections d'histoire naturelle d'incontestable valeur sont, faute de soins ou d'initiative, vouées à une perte prochaine dans le pays ; que les établissements universitaires, qui ont, pour fonction primordiale, l'enseignement, ne sont pas toujours convenablement outillés pour assurer la conservation ou l'entretien de pièces rares ou uniques ; que la manipulation de ces dernières, par des mains parfois inexpertes, présente au surplus un véritable danger ; considérant enfin qu'une meilleure coordination s'impose du labeur scientifique se rapportant aux sciences naturelles, notamment aux sciences biologiques et minérales ; la IIIe Section de la Société scientifique de Bruxelles, en sa séance du 26 avril 1922, émet le vœu que la conservation des spécimens holotypes soit mieux assurée à l'avenir, et confiée exclusivement à cette fin à des instituts spécialement équipés, tels le Musée Royal d'histoire naturelle et le Jardin Botanique de l'État à Bruxelles, qui feraient ainsi l'office de *conservatoires*.

La IIIe Section, toujours désireuse de travailler à la diffusion de la science et de l'enseignement, exprime également le vœu que les conservatoires centraux disposant de doubles en nombre suffisant, en assurent, sur demande, la répartition et la distribution entre les établissements d'enseignement.

Séance du 27 avril 1922

La Section propose comme questions de concours :

α) *Une contribution à l'étude anatomique des plantes fossiles de la Belgique.*

β) *Une description monographique d'une famille nouvelle ou peu connue, actuelle ou paléontologique, de la flore ou de la faune de la Belgique ou d'une région voisine.*

Les membres de la Section désignés pour constituer le bureau sont :

Président : M. le Comte de Limburg-Stirum.
Vice-Présidents : M. le curé Claerhout.
M. Asselbergs.
Secrétaire : M. F. Van Ortroy.

M. É. De Wildeman attire l'attention *sur quelques espèces du genre Garcinia.*

La revision de quelques plantes du genre *Garcinia*, contenues dans l'Herbier du Congo, à Bruxelles, nous a amené à la création de quatre espèces nouvelles dont une se présente sous deux formes : mâle et femelle. Nous avons tenu à décrire les deux plantes séparément, car nous ne pouvons certifier que ces deux états sont bien à rapporter à un même type.

Nous avons décrit antérieurement, dans d'autres publications, certaines espèces de ce genre, et nous nous proposions de reprendre le projet de clef analytique établi par le Prof. Engler, — devenu incomplet, — dans lequel, comme nous l'avons indiqué ailleurs, s'est glissée une petite erreur ; mais nous sommes forcé de remettre la publication de ce travail à plus tard.

Garcinia Claessensi *De Wild.* nov. sp. (¹).

Arbre ou arbuste à rameaux grêles, glabres, à écorce se fendillant longitudinalement ; feuilles pétiolées, elliptiques ou obovales-elliptiques, plus ou moins longuement cunéiformes à la base, plus ou moins brusquement et longuement acuminées au sommet, glabres sur les deux faces, un peu plus mates au-dessous qu'au-dessus, nervures latérales légèrement obliques, assez rapprochées, visibles sur les deux faces, pétiole plus ou moins fortement canaliculé atteignant env. 1 cm. de long ; limbe de 6,5 à 12,5 cm. de long, acumen, pouvant atteindre plus de 1 cm. de long, compris, et de 2 à 4 cm. de large. Fleurs en fascicules axillaires, opposés, formant de petites masses pouvant atteindre 2 cm. de diamètre ne dépassant pas les pétioles, pédicelles atteignant 5 mm. de long, glabres ; sépales externes orbiculaires, concaves, d'environ 1 mm. de long, les internes arrondis, concaves, glabres extérieurement, atteignant 3 mm. de long ; pétales obovales d'env. 3 mm. de long et 2 mm. de large, plus ou moins onguiculés à la base ; étamines réunies en quatre phalanges plus ou moins trifides jusqu'au delà de la moitié de leur longueur, à anthères réduites ; disque à quatre lobes irrégulièrement ondulés, alternant avec les phalanges staminales.

Katako-Kombe, janvier 1910 (J. Claessens, n° 369) ; Sankuru, janvier 1898 (Éd. Luja).

(¹) *Garcinia Claessensi* : Arbor vel arbusculus, ramis gracilibus, glabris, cortice longitudinaliter fissurato ; foliis petiolatis, lamina elliptica vel obovato-elliptica, basi plus minus longe cuneata, apice plus minus abrupte et longe acuminata, supra et infra glabra ; petiolo plus minus canaliculato ; floribus fasciculatis, axillaribus, inflorescentiis usque 2 cm. latis, pedicellis usque 5 mm. longis, glabris, sepalis externis orbicularibus, concavis, internis majoribus usque 3 mm. longis ; petalis obovatis, basi plus minus unguiculatis ; staminibus coalitis, phalangiis 4, plus minus profunde 3-fidis ; disco 4-lobato.

Obs. — Cette espèce est voisine de la plante que nous avons appelée *G. Pynaertii* et qui provenait de la région d'Eala ; la plante que nous considérons comme nouvelle a des feuilles plus colorées sur la face inférieure et des fleurs beaucoup plus longuement pédicellées, ce qui donne aux rameaux florifères un aspect tout à fait particulier.

Garcinia Dandi *De Wild.* nov. sp. (¹).

Arbre à bois dur, à rameaux glabres, à entre-nœuds, de 3,5-4 cm. de long ; feuilles opposées ou subopposées, pétiolées, à pétiole canaliculé atteignant 5-8 mm. de long, à limbe elliptique, cunéiforme à la base, acuminé au sommet, à acumen étroit de 7,5 mm. de long ; limbe de 3-6,5 cm. de long, acumen non compris, et 15-35 mm. de large, nervures principales nombreuses de chaque côté de la nervure médiane, étalées, peu proéminentes sur les deux faces, anastomosées vers le bord de la feuille en une nervure marginale, nervures secondaires peu apparentes ; fleurs généralement axillaires ou terminales, solitaires ou paucifasciculées, courtement pédicellées, à pédicelle de 2-3 mm. de long. Fleurs mâles à calice à sépales de 2 à 4 mm. de long ; pétales obovales-elliptiques, d'env. 5 mm. de long et 2,5 mm. de large, étamines en quatre phalanges d'env. 2 mm. de long, portant au sommet, serrées les unes contre les autres, env. 6-7 anthères, ovaire rudimentaire ; fleurs femelles (coll. Solheid) à calice et corolle environ de même grandeur, à étamines nulles, à ovaire subglobuleux-aplati d'env. 1 mm. de haut.

Dundusana, octobre 1913 (Mortehan, n° 569. — Nom vern. : *Dandi.* — Arbre de la forêt à bois dur, bon pour la construction) ; Dundusana, février 1913 (F. Reygaert, n° 96. — Nom ind. : *Bilica.* — Arbre de la forêt. Bois de construction) ; Env. de Yambuya, 1906 (J. Solheid).

(¹) *Garcinia Dandi* : Arbor ; ramis glabris, internodiis variabilis ; foliis oppositis vel suboppositis ; petiolo canaliculato usque 8 mm. longo ; lamina elliptica, basi cuneata, apice acuminata, nervis lateralibus 1 utrinque numerosis ; floribus axillaribus vel terminalibus, solitaribus vel paucifasciculatis, breviter pedicellatis ; floribus masculis : sepalis 2-4 mm. longis, petalis obovato-ellipticis circ. 5 mm. longis, phalangiis 4, antheris 6-7 ; ovario subnullo ; floribus femineis : phalangiis nullis, ovario subgloboloso circ. 1 mm. alto.

Obs. — Nous réunissons ces spécimens ; les fleurs mâles ont été décrites sur les échantillons des récoltes de M. Mortehan, les fleurs femelles sur ceux de M. J. Solheid. Cette plante se rapproche indiscutablement de notre *G. Lujai,* mais s'en différencie à première vue par la petitesse de ses fleurs.

Garcinia Lujai *De Wild.* nov. spec.
— — f. **feminea** *De Wild* (¹).

Arbre de 6-10 m. de haut, à rameaux glabres, à entre-nœuds atteignant parfois 2 cm. seulement de long ; feuilles opposées ou sub-opposées, pétiolées, à pétiole glabre de 8-10 mm. de long, à limbe elliptique-oblong ou longuement obovale, assez longuement acuminé au sommet, à acumen subarrondi, atteignant 12-15 mm. de long ; limbe, acumen compris, de 7-15 cm. de long et 2,5-5 cm. de large, nervures principales latérales nombreuses, à plus de 12 de chaque côté de la nervure médiane, peu proéminentes sur les deux faces, anastomosées vers le bord de la feuille en une nervure intramarginale, très visible, à env. 1 mm. du bord, nervures secondaires réticulées ; fleurs femelles axillaires, jaunes, à calice de quatre sépales elliptiques d'env. 4 mm. de long, glabres, quatre pétales d'env. 6 mm. de long et 3-4 mm. de large ; étamines nulles ; ovaire ovoïde, tronqué au sommet, de 3 mm. de haut, obscurément 4-lobulé au sommet.

Sankuru, mai 1904 (Éd. Luja, nº 185).

Obs. — Cette forme est indiscutablement très voisine de celle que nous décrivons ci-dessous, mais nous n'avons osé les réunir complètement, par suite du sexe différent de leurs fleurs. Dans la dimension des fleurs il y a aussi une note différencielle.

(¹) *Garcinia Lujai* f. *feminea.* Arbor 6-10 m. alt.; ramis glabris, internodiis variabilis, foliis oppositis vel suboppositis, petiolo glabro, 8-10 mm. longo ; lamina elliptico-oblonga vel longe obovata, basi plus minus longe cuneata, apice longe acuminata, nervis lateralibus 1 utrinque ultra 12 ; floribus axillaribus ; luteolis, 4-sepalis, glabris, petalis 4, circ. 6 mm. longis, staminibus nullis ; ovario ovoideo, apice truncato, obscure 4-lobulato.

— — **f. mascula** *De Wild.* (¹).

Arbre de 8-12 m. de haut, à rameaux glabres, à entre-nœuds n'atteignant parfois que 1 cm. de long; feuilles opposées, pétiolées, à pétiole glabre, canaliculé, subailé, de 7-10 mm. de long, à limbe ovale ou elliptique, largement cunéiforme à la base, acuminé brusquement et longuement au sommet, à acumen subarrondi de 13-15 mm. de long ; limbe de 5,5-13 cm. de long et 2-6 cm. de large, nervures latérales principales assez nombreuses, à plus de 12 de chaque côté de la nervure médiane, peu proéminentes sur les deux faces, anastomosées régulièrement vers le bord de la feuille, formant une nervure intramarginale bien visible, distante du bord d'env. 1 mm., nervures secondaires réticulées. Fleurs mâles axillaires ou terminales, d'un jaune crème, odorantes, pauci-fasciculées, pédicellées, à pédicelle glabre, de 3-4 mm. de long, à calice à quatre sépales verts, glabres, les deux externes les plus petits, de 3-5 mm. de long et 3-4, 5 mm. de large, pétales elliptiques de 8-9 mm. de long et 4-5 mm. de large ; étamines en quatre phalanges d'env. 4-5 mm. de long et 2 mm. de large portant au sommet, serrées les unes contre les autres, env. 12 anthères. Ovaire rudimentaire, orangé, très gluant.

Bena-Dibele, 23 avril 1899 (Éd. Luja, nº 263. — Arbre à fleurs jaune-crème, odorantes, assez répandues dans la forêt).

Obs. — Cette espèce avait été considérée par nous comme appartenant au *G. Mannii ;* la revision de quelques types nous a fait voir qu'il fallait considérer le *G. Mannii* comme une espèce à fleurs relativement longuement pédicellées.

Le projet de clef analytique proposé par M. le Prof. Engler (cf. Jahrb. XL, p. 507) nous amènerait plutôt à ranger notre plante dans le groupe A *a*.

(¹) *Garcinia Lujai* f. *mascula*. Arbor 8-12 m. alt.; ramis glabris, internodiis brevibus, foliis oppositis, petiolatis, petiolo glabro, canaliculato, subalato, lamina ovata vel elliptica, basi late cuneata, apice abrupte et longe acuminata, acumine subrotundato, nervis lateralibus 1 utrinque ultra 12 ; floribus axillaribus vel terminalibus, odoratis, paucifasciculatis, pedicellatis, pedicello glabro, sepalis viridibus, glabris, externis 3-5 mm. circ. longis, petalis ellipticis, phalangiis circ. 4-5 mm. longis et 2 mm. latis, antheris circ. 12 ; ovario subnullo, viscido.

Nous ne pouvons approfondir pour le moment la question, n'ayant pas à notre disposition des types en suffisance. Nous tenons cependant à déclarer que le caractère tiré de la largeur du limbe par rapport à sa longueur, tout en étant de valeur dans bien des cas, semble en avoir ici relativement peu, car les fractions 1/2, 2/5, 1/4 et 1/3 sont très voisines.

Comme nous l'avons dit à propos du *G. sordido-luteola*, cette espèce et le *G. Lujai* sont à première vue très affines, mais il y a dans la nervation un caractère particulier qui nous amène, du moins pour le moment, en l'absence de renseignements plus précis, à différencier ces deux plantes.

Nous réunissons sous le même nom spécifique une plante mâle et une plante femelle bien que, si l'on compare leurs deux diagnoses, on trouve dans certains caractères des dissemblances sur lesquelles nous n'oserions beaucoup insister. Cependant nous ne pouvons non plus, sans indications tout à fait probantes, laisser sous un nom commun une plante mâle et une plante femelle qui pourraient fort bien, si nous avions des documents plus nombreux, appartenir à des espèces très différentes.

Garcinia Sapini *De Wild.* nov. sp. (1).

Plante atteignant jusqu'env. 30 cm. de haut, à rameaux glabres, opposés ou subopposés, à entre-nœuds de 3-10 cm. de long, feuilles opposées ou subopposées, rétrécies en un pétiole canaliculé atteignant au maximum 2 mm. de long, à limbe elliptique, cunéiforme à la base, cunéiforme au sommet, obtus ou subobtus, de 3-11 cm. de long et 1-2, 5 cm. de large, nervures principales au nombre de 6 env. de chaque côté de la nervure médiane, plus ou moins proéminentes sur les deux faces, anastomosées vers le bord de la feuille, nervures secondaires réticulées ; fleurs généralement terminales, solitaires ou paucifasciculées terminant des rameaux feuillés ou des ramifications courtes privées de feuilles et partant de la souche. Fleurs mâles à calice à quatre sépales, les deux extérieurs plus petits que les intérieurs, d'env. 5 mm. de long, pétales au nombre de 4, de 8 mm. env. de long et 3-4 mm. de large, étamines en quatre phalanges de 4-5 mm. de long et 1 mm. de large portant au sommet, serrées les unes contre les autres, environ une dizaine d'anthères. Ovaire rudimentaire. Fleurs femelles à calice et corolle semblables à ceux des fleurs mâles, à étamines nulles, à ovaire obovoïde d'env. 3 mm. de haut, à stigmate élargi de 3-4 mm. de large. Fruits subglobuleux, comestibles, atteignant 2 cm. de diamètre.

---

(1) *Garcinia Sapini.* Planta usque 30 cm. alta ; ramis glabris, oppositis ve suboppositis, internodiis 3-10 cm. longis ; foliis oppositis vel suboppositis basi in petiolum breve contractis, lamina elliptica, basi et apice cuneata, apice obtusa vel subobtusa ; nervis lateralibus 1 utrinque circ. 6 ; floribus terminalibus solitaribus vel paucifasciculatis ; floribus masculis 4-sepalis, internis majoribus circ. 5 mm. longis, petalis 4 circ. 8 mm. longis ; staminibus coalitis, phalangiis 4, antheris circ. 10 ; ovario rudimentario ; floribus femineis 4-sepalis et 4-petalis ; ovario obovoideo, stigmate circ. 3-4 mm. lato ; fructibus subglobulosis circ. 2 cm. latis.

Bondo, septembre 1907 (A. Sapin. — Plante de la brousse) ; Bienge, octobre 1907 (A. Sapin. — Plante de la plaine, à fruits comestibles. — Nom ind. : *Majondo*).

Obs. — Si nous tenons compte du projet de clef analytique inséré par M. le Prof. Engler dans les BOT. JAHRB. XXIV (1908), pp. 555 et suiv., notre espèce se rangerait dans la section *Tagmanthera* Pierre et devrait se classer dans le voisinage du *G. huillensis* Welw. dont les feuilles atteindraient 7,5 cm. de long et 3,5 cm. de large, des dimensions totalement différentes de celles de notre plante.

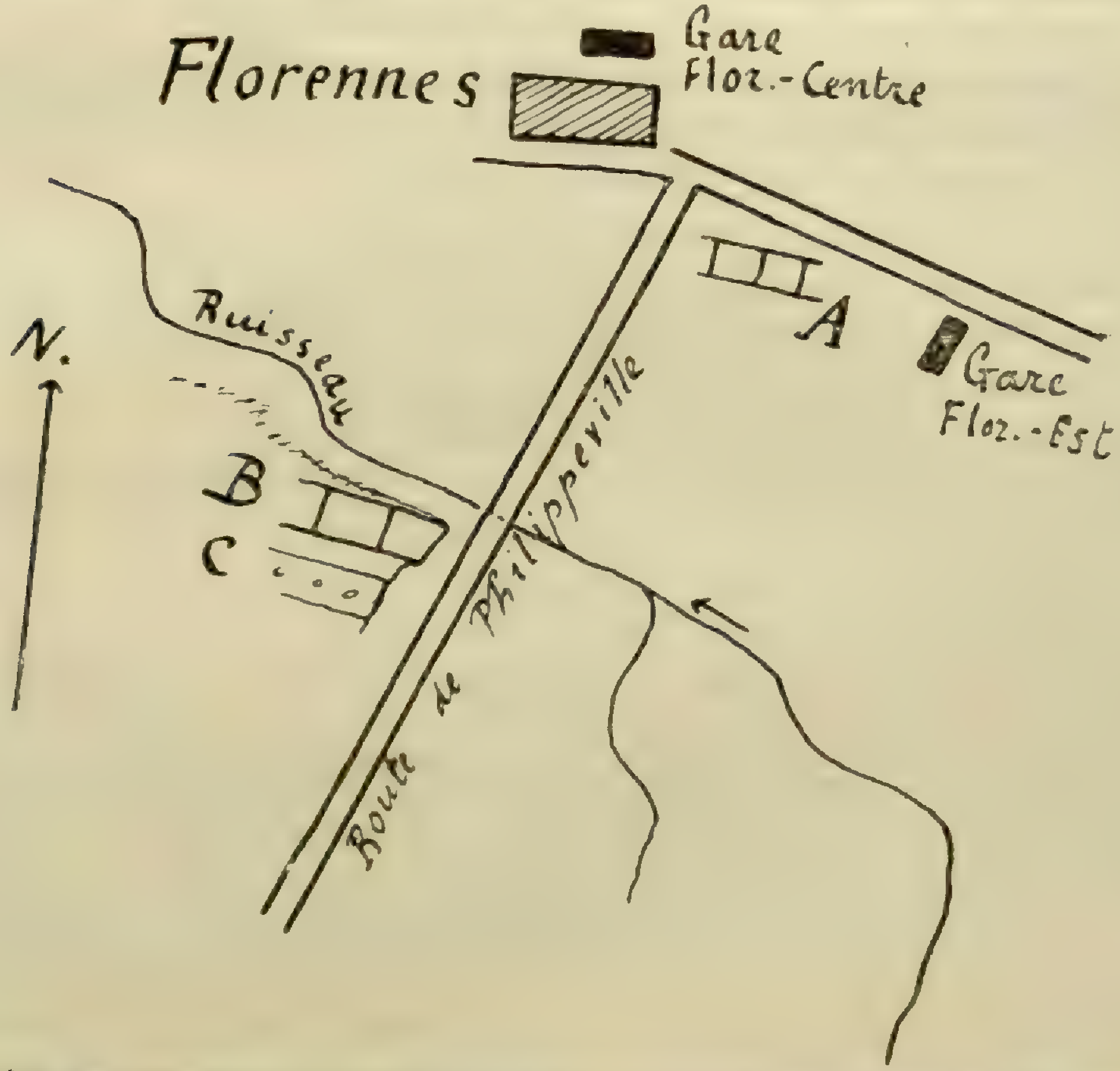
Nouvelles observations sur la faune des calcaires à Daviesiella llangollensis à Florennes et à Sovet (Belgique), par G. Delépine.

Dans une note antérieure parue dans ces ANNALES (1), nous avons signalé l'existence à Florennes dans un calcaire blanc massif, noté *v2a* sur la carte géologique au 1/40.000^e (fig. A), de bancs extrêmement riches en *Daviesiella llangollensis* Dav. Nous en avons conclu que ces bancs appartenaient au Viséen inférieur, au sommet de la zone C_2 ou à la zone S_1 de A. Vaughan. Cette conclusion concordait avec celle de M. A. Salée s'appuyant sur la présence et l'état d'évolution d'un polypier, *Dorlodotia Briarti* Sal. provenant des mêmes bancs (¹).

---

(1) 39^e année, pp. 133-139, 27 nov. 1919.

Ces mêmes calcaires reparaissent au bord sud du synclinal carbonifère de Florennes ; ils y forment une bande continue que l'on peut suivre d'E. en W. en longeant la rive gauche d'un vallon où



Position des affleurements du Calcaire à *Daviesiella llangollensis* à Florennes.
A et B : calcaire blanc massif.
A : bancs riches en *Dav. llangollensis.*
C : calcaire pâle à grandes crinoïdes.

coule un ruisseau se dirigeant vers S^t^-Aubin ; ils sont particulièrement accessibles et fossilifères au bord de la route de Philippeville (fig., en B) à 1200 m. au sud de Florennes. Cette roche massive, de teinte gris clair, en gros bancs redressés, est elle-même adossée en ce point à des calcaires pâles à grosses encrines, qu'on peut voir à quelques mètres plus loin (fig., en C). Le R. P. H. Der-

---

(¹) **Annales**, 39ᵉ année, p. 153.

ville a bien voulu explorer méthodiquement l'affleurement situé en B sur la carte ci-jointe (¹) ; il y a fait une abondante récolte qui, jointe à ce que nous avions nous-même recueilli au même endroit, permet de dresser aujourd'hui une liste de fossiles de ce calcaire massif assez complète pour en dégager quelques observations ayant une portée générale.

LISTE DES FOSSILES TROUVÉS A FLORENNES :

1) Affleurement C, calcaire pâle à grandes encrines (*v1b* sur la carte) :
Spirifer duplicicosta Phill.
Cyathophyllum Φ Vaugh. (²)

2) Affleurement B, calcaire blanc massif (*v2a* sur la carte) (³) :
Productus pustulosus Phill. *c*
» *fimbriatus* Sow. *ac.*
» *Cora* d'Orb. *1 ex.*
» *plicatilis* Sow. *c.*
Schellwienella cf. *crenistria* Phill. *c*
Schizophoria resupinata Mart. *c*

(¹) Nous adressons ici au R. P H. Derville nos remerciements pour ce nouveau service ; c'est lui-même qui, en 1919, nous avait déjà signalé la carrière à *Dav. llangollensis*.

(²) Je garde cette désignation tant que n'aura pas été faite la révision de *Cyathophyllum murchisoni* M. E. et H. — A. Vaughan et E. J. Garwood s'accordent pour éviter de confondre avec cette espèce, malgré leurs affinités avec elle, les formes de *Cyathophyllum* qu'ils ont trouvées, en Angleterre dans les zones C_2 et S_1. — A. Vaughan a voulu réserver entièrement la question en adoptant pour ces formes la désignation *Cyathoph.* Φ. E. J. Garwood a appelé *Cyathoph. multilamellatum* Mc Coy celles qu'il a trouvées dans le N. W. de l'Angleterre. En Belgique j'ai trouvé ce fossile en de nombreux points dans le calcaire à *Prod. sublaevis* du Bassin de Namur. L'exemplaire que j'ai recueilli au sud de Florennes, en C, ressemble tout à fait à celui que E. J. Garwood a figuré comme étant le type de *Cyath. multilamellatum* Mc Coy (Q. J. G. S., vol. 68, pl. L, fig. 5, 1912) ; celui qui provient des bancs à *Dav. llangollensis* (affleurement A) est le même que celui figuré par ce même auteur (*ibid.*, fig. 7), provenant d'Arnside ; c'est bien la forme que A. Vaughan englobe dans *Cyath.* Φ « parvenu à son plein développement » (Q. J. G. S., vol. 71, p. 17, 1915)

(³) Dans cette liste, *c* = commun, *ac* = assez commun.

Spirifer bisulcatus Sow. *c*
Reticularia lineata Mart. *c*
» » var. *elliptica* Phill. *1 ex.*
Martinia glabra Mart. *ac*
Athyris ingens de Kon.
Actinoconchus planosulcatus Phill.
Dielasma avellana de Kon.
Rhynchonella acuminata Mart.
Straparollus placidus de Kon.
Ptychomphalus
Sanguinolites tabulatus de Ryck.
Aviculopecten granulosus de Kon.
Polycope simplex J. et K. *c*

3) Affleurement A, calcaire blanc massif (*v2a* sur la carte). Aux espèces citées en 1919 :
Daviesiella llangollensis Dav.
Dorlodotia Briarti Salée.
doivent être ajoutées :
Chonetes papilionacea Phill.
Evomphalus crotalostomus M^c^ Coy.
Cyathophyllum Φ Vaughan (¹).

POSITION STRATIGRAPHIQUE DES CALCAIRES MASSIFS A *Dav. llangollensis* DE FLORENNES.

Dans la première note consacrée à cette formation, nous avons conclu que ce gisement de calcaire « appartient probablement à la zone S_1 ou au sommet de la zone C_2 ». Les fossiles plus nombreux que nous connaissons maintenant permettent de formuler cette conclusion d'une manière plus précise et de dire que ces calcaires appartiennent à la zone S_1. Cette attribution est en effet confirmée — outre l'abondance de *Dav. llangollensis,* et la présence de *Dorlodotia Briarti* — par les faits suivants :

1) La présence *en dessous* des bancs de calcaire blanc massif (affl. B), de calcaires à encrines (affl. C) contenant *Cyathophyllum* Φ Vaugh., c'est-à-dire appartenant déjà à la zone C_2.

(¹) Voir la fin de la note consacrée plus haut à cette espèce.

2) L'entrée de *Productus Cora*, dont l'exemplaire signalé ici dans le calcaire blanc massif est unique et de petite taille, mais bien caractérisé. Cette espèce prend ensuite un grand développement dans la zone S_2.

3) *Evomphalus crotalostomus* Mc Coy n'a été signalé en Belgique par de Koninck que dans le calcaire de Visé, mais cet auteur ajoute qu'on le trouve en Angleterre dans le calcaire de Kendal : celui-ci est précisément le calcaire S_1 des *Gastropod-beds* de E. J. Garwood (¹).

COMPARAISON AVEC LA FAUNE DES CALCAIRES BLANCS MASSIFS DE LA TRANCHÉE DE SOVET.

Dans la tranchée de Sovet, au-dessous des calcaires noirs appartenant à la zone C_2 (équivalents du marbre noir de Dinant) et de dolomie, le sommet de la coupe est formé par un calcaire gris clair, ou même blanc, massif, en tout semblable à celui de Florennes, et noté, comme celui-ci, *v2a* sur la carte. Dans ce calcaire, *Daviesiella llangollensis* est commun et remarquable, comme à Florennes, par l'épaisseur considérable de la coquille. Voici d'ailleurs la liste des fossiles que nous avons recueillis dans ces calcaires :

Daviesiella llangollensis Dav. *c*
Productus pustulosus Phill.
» *plicatilis* Sow. *c*
Schizophoria resupinata Mart.
Spirifer bisulcatus Sow.
Reticularia lineata Mart.
Cyrtina carbonaria Mc Coy.
Aviculopecten granulosus de Kon.

(¹) Q. J. G. S., vol. 68, p. 520, 1912. — L'exemplaire de Florennes a les grandes dimensions des exemplaires adultes décrits par de Koninck (11 cm. : 3 cm. 5 : 3 cm.) V. *Faune du Calc. carb. de Belg.*, 3e part., *Gastéropodes*, p. 141, pl. XVIII, fig. 5 et 6. — Dans le Nord de la France, M. A. Carpentier cite cette espèce dans des calcaires à *Dav. llangollensis* qui occupent dans la bande de Ferrière-la-Petite, près de Maubeuge, un niveau qui correspondrait à S_1, ou à la base de S_2.

Les affinités étroites entre cette faune et celle des gisements A et B à Florennes, l'analogie entre la position stratigraphique des calcaires qui la contiennent à Sovet comme à Florennes, démontrent qu'il s'agit de part et d'autre de formations appartenant au même niveau S_1 :

1) les calcaires blancs massifs de Sovet reposent sur des calcaires noirs appartenant déjà à la zone C_2 ; ils en sont séparés par une mince épaisseur de dolomie ;

2) ils renferment en abondance *Dav. llangollensis* qui atteint à ce niveau son maximum de développement ;

3) l'entrée de *Cyrtina carbonaria* apporte à Sovet la même indication que celle de *Prod. Cora* à Florennes ; l'exemplaire recueilli est de très petite taille et isolé. Quand ce fossile atteint son développement normal, il devient très commun et constitue alors des niveaux assez constants pour avoir été pris comme limite inférieure de S_2 ; c'est le cas en Angleterre, dans certaines régions du S. W. (A. Vaughan) et dans le N. W. (E. J. Garwood) ; il en est de même dans l'Avesnois (A. Carpentier) (¹) dans les calcaires blancs à *Prod. Cora* (= calcaire de Neffe de M. de Dorlodot) qui surmontent le calcaire à *Dav. llangollensis* dans la bande de Ferrière-la-Petite. Les conditions dans lesquelles se présente cette espèce à Sovet indiquent que le calcaire massif rentre encore dans S_1 (²) et que la limite inférieure de S_2 doit être cherchée un peu plus haut dans cette région.

Conclusion. De l'ensemble des faits que nous venons d'exposer se dégage la conclusion qu'*à Florennes et à Sovet, le calcaire blanc massif noté* V2*a sur la carte géologique appartient* à la zone S_1 des géologues anglais ; il se place au sommet du complexe $C_2 - S_1$ de

---

(¹) *Contribution à l'étude du carbonifère du N. de la France*, p. 85 (Mém. de la Soc. géol. du N., VII, 1913).

(²) En 1911, j'ai considéré à tort ce calcaire blanc de Sovet, comme étant au même niveau que l'oolithe à *Prod. Cora* du bassin de Namur ; en réalité, il est l'équivalent stratigraphique des calcaires qui dans le bassin de Namur se placent entre l'oolithe à *Prod. sublaevis* et l'oolithe à *Prod. Cora*.

A. Vaughan (¹), dont les caractères fauniques commencent à se préciser suffisamment en Belgique, en Angleterre (²) et dans le Nord de la France, pour qu'on en groupe et distingue l'ensemble sous le nom de *Viséen inférieur*.

RELATION ENTRE LA RÉPARTITION DES FACIES WAULSORTIENS ET LA FAUNE DES CALCAIRES MASSIFS A *Daviesiella llangollensis*.

Quand on examine la liste des fossiles recueillis à Sovet et à Florennes dans les calcaires blancs massifs, on n'est pas seulement frappé par la présence des espèces propres à la zone stratigraphique S_1, ce qui déjà les distingue des calcaires blancs massifs S_2 du bassin de Namur ou de la région de Dinant ; on observe de plus une extrême variété des genres et espèces représentés, et le grand nombre des individus accumulés sur un espace restreint.

A Florennes, le gisement B nous a livré :

Prod. pustulosus :	8	exemplaires
» *plicatilis :*	31	»
Schizophoria resupinata :	7	»
Reticularia lineata :	9	»
Schellwienella cf. *crenistria :*	10	»
Spirifer bisulcatus :	8	»

Plusieurs de ces fossiles sont précisément ceux que l'on rencontre en abondance dans les récifs waulsortiens : *Productus plicatilis, Schiz. resupinata, Rhynch. acuminata, Retic. lineata, Retic. elliptica*. Or, dans la région de Florennes, dans celle de Sovet, — et on peut ajouter dans celle de Ferrière-la-Petite près Maubeuge (³) — il existe des facies waulsortiens. On peut admettre que la faune si riche des récifs waulsortiens a trouvé des conditions favorables pour s'y maintenir, même quand la formation des

---

(¹) Cet auteur en fait son *horizon* δ *emended* dans son dernier travail d'ensemble, où il a particulièrement étudié cette formation. (Q. J. G. S., vol. 71, tableau p. 32, faune, p. 17-18, 1915).

(²) Outre les travaux déjà cités de A. Vaughan, E. J. Garwood, voir aussi l'étude récente, très fouillée, de E. Dixon : *The country around Pembroke and Tenby* (MEM. OF THE GEOL. SURV., 1921).

(³) A. Carpentier, *op. cit.*, p. 121.

calcaires à veines bleues y eut cessé. Des espèces viséennes ayant les mêmes préférences d'habitat s'y adjoignent : *Prod. fimbriatus, Martinia glabra, Spirifer bisulcatus.* On retrouvera beaucoup plus tard les unes et les autres rassemblées dans les calcaires massifs, — à certains égards comparables à des formations récifales — comme le calcaire de Limont dans le Nord de la France (zone à *Prod. undatus,* D_1) et le calcaire Visé en Belgique (zone D_2), l'un et l'autre du Viséen supérieur. — C'est le lieu enfin de rappeler qu'un récif de calcaire à veines bleues s'édifiait encore à Sosoye (¹), dans une région intermédiaire entre Florennes et Sovet, au moment où se déposaient en ces derniers points les calcaires massifs à *Dav. llangollensis.*

Faciès lithologique des calcaires blancs a *Daviesiella llangollensis.*

Ces calcaires massifs, traversés de multiples diaclases et qui se cassent très irrégulièrement sous le marteau, présentent à la loupe l'aspect d'une roche faite d'éléments grenus, offrant parfois l'apparence d'oolithes, liés par un ciment de calcite. En lames minces, je n'y ai jamais vu trace de vrais oolithes, comme il en existe en particulier dans les calcaires à *Prod. sublaevis* du bassin de Namur et du Nord de la France. Par contre, les calcaires blancs de Florennes et de Sovet abondent en Foraminifères : *Endothyra* (*E. Bowmani*), des Textularides ; les Ostracodes y sont également communs : outre les formes de grande taille comme *Polycope simplex,* cité dans les listes ci-dessus, on y reconnaît au microscope des *Cytherella, Cyth. Tatei* J. et K. : *Cyth. valida* J. et K. ; il y a enfin des fragments de test de *Daviesiella,* et quelques très rares débris de Paléchinides. Ce sont ces divers éléments noyés dans la calcite qui donnent à la roche l'aspect grenu qu'on observe à la loupe. Si on veut les définir au point de vue lithologique, ces calcaires blancs massifs de Florennes et de Sovet — et l'on peut ajouter, ceux de Ferrière-la-Petite — sont des calcaires à foraminifères et à ostracodes, partiellement recristallisés.

Par ces caractères lithologiques, et tout en retenant l'absence

---

(¹) F. Demanet, *Sur l'âge des calcaires waulsortiens de la vallée de la Molignée* (Ann. Soc. scient. Br., 39e année, p. 242, 1920).

ou la rareté des oolithes, ces calcaires s'apparentent aux calcaires viséens des niveaux les plus variés : C_2, S_2, D_1, D_2. — Nous avons vu que, par ailleurs, au point de vue paléontologique, ils demeurent, par certains traits, subordonnés aux facies waulsortiens.

M. Asselberghs présente une communication sur *Le Synclinal de l'Eifel dans la Vallée de la Meuse.*

Le noyau du synclinal de l'Eifel est constitué, dans la vallée de la Meuse, par un complexe de phyllades, de quartzites, de quartzophyllades, et de roches schisto- ou gréso-calcareuses fossilifères, d'âge siegenien (taunusien et hunsruckien).

D'après J. Gosselet (^{1}), on peut distinguer au Sud du Gedinnien de Joigny les bandes suivantes, du Nord au Sud :

a) phyllades noirs } Taunusien
b) schistes et grès de Nouzon } Taunusien
c) schistes et grès bleus fossilifères-Hunsruckien (centre du synclinal).

Sur ces dernières couches reposent géométriquement et directement des quartzophyllades gedinniens, c'est-à-dire, que le Taunusien paraît supprimé sur le flanc méridional du synclinal de l'Eifel. Ce fait serait dû à l'intervention d'une faille, dite *faille d'Aiglemont.*

Une autre interprétation a été donnée en 1913 par M. Dollfus (^{2}). D'après cet auteur, le centre du synclinal est formé des « quartzophyllades gris de Nouzon » que bordent, de part et d'autre, des couches synchroniques : au Nord, « les phyllades d'Alle et grès d'Anor » ; au Sud, « les schistes noirs du Bois Gesly et d'Etion ». M. G. Dollfus rétablit de cette manière la symétrie entre les deux flancs du synclinal de l'Eifel et rejette l'hypothèse de la faille d'Aiglemont.

Des observations faites récemment dans la région nous permet-

---

(1) *L'Ardenne,* 1888.

(2) *Sur la structure géologique de la Région de Charleville.* — Rapport du Syndicat minier des Ardennes et du Nord-Est. Charleville, 1913, pp. 14-30.

tent de présenter une troisième interprétation sur la constitution de la partie centrale du synclinal de l'Eifel, en Ardenne française.

D'après nous, il existe dans cette région, d'une part, des bandes composées de phyllades bleu foncé, de quartzophyllades et de quartzites gris, et d'autre part, des bandes formées de quartzophyllades calcareux et de macignos fossilifères. Les premières présentent les mêmes caractères lithologiques que les roches qui caractérisent le Taunusien de la partie belge du synclinal de l'Eifel. Du reste, Jannel a découvert au sein de ces couches, des lentilles de grès blanc, à facies anoreux, dont la faune est, d'après J. Gosselet, identique à la faune du grès d'Anor. En conséquence, nous considérons les bandes de phyllades bleu foncé et de quartzite comme appartenant au Taunusien. Les autres bandes ont les caractères lithologiques et paléontologiques des couches qui constituent l'Hunsruckien inférieur entre Pussemange et Bouillon (¹). Les bandes taunusiennes et hunsruckiennes inférieures alternent entre elles.

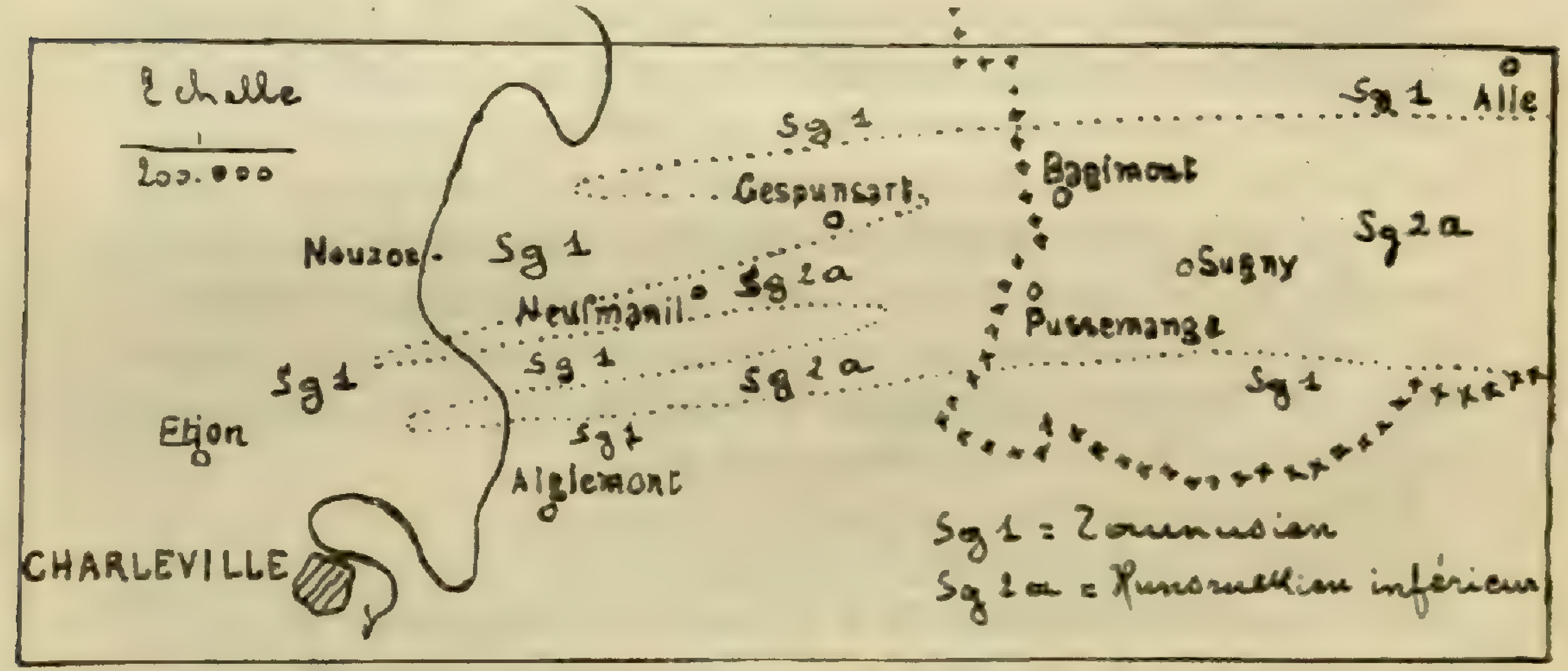
Les couches sont fortement plissées, comme il ressort de l'étude de la coupe qu'on peut observer au Sud de Nouzon. D'une façon générale, le flanc Nord des anticlinaux est plus redressé que le flanc Sud. Ce n'est qu'exceptionnellement qu'il présente une inclinaison vers le Nord. Le plus souvent, il est soit vertical, soit renversé. C'est ce qui explique la prédominance des affleurements à inclinaison vers le Sud. On a affaire, dans l'ensemble, à des plis aigus, isoclinaux dans de nombreux cas, parfois faillés, à ennoyage vers l'Est.

En combinant les données stratigraphiques et tectoniques, nous arrivons à la conclusion que, dans la vallée de la Meuse, la partie centrale du synclinal de l'Eifel, formée, dans son ensemble, de couches siegeniennes, est constituée par des phyllades et quartzites taunusiens (Siegenien inférieur) affectés de plis dont les noyaux synclinaux renferment les quartzophyllades calcareux et macignos fossilifères du Hunsruckien inférieur (Siegenien supérieur). Par suite de l'ennoyage général des plis vers l'Est, les bandes hunsruckiennes disparaissent à l'Ouest de la vallée de la

---

(¹) Mém. Inst. Géol. Univers. Louvain, t. I, 1913, pp. 1-175; t. II, 1921, p. 33.

Meuse : au méridien de Mellier Fontaine-Charleville, le Taunusien seul occupe le noyau du synclinal de l'Eifel. Par contre, elles s'épanouissent à l'Est de la Meuse et viennent se rejoindre dans la région de Gespunsart en une bande unique qui se prolonge en territoire belge par la bande de quartzophyllades calcareux fossilifères de Pussemange, Sugny, Bouillon et Dohan. Il va de soi que seul un lever détaillé fournirait les éléments d'un tracé précis des diverses bandes ; néanmoins, nous possédons actuellement des données sur l'existence de trois digitations synclinales hunsruckiennes, ce qui nous permet de concrétiser notre manière de voir dans le schéma ci-dessous.


Échelle
1/200.000
Nouzon
Sg 1
Gespunsart
Sg 1a
Neufmanil
Sg 1
Sg 1
Sg 1a
Sg 1
Etion
Aiglemont
CHARLEVILLE
Sg 1
Bagimont
Sugny
Sg 1a
Pussemange
Sg 1
Alle
Sg 1 = Taunusien
Sg 1a = Hunsruckien inférieur

Il importe d'ajouter quelques mots au sujet de la faille d'Aiglemont. Dans une étude antérieure (¹) nous avons attiré l'attention sur l'existence, entre Corbion et Straimont, d'une région failleuse qui met en contact les couches dévoniennes de l'anticlinal de Givonne et celles du synclinal de l'Eifel ; cette zone failleuse, prolongée en direction vers l'Ouest, passerait aux environs immédiats d'Aiglemont. C'est ce qui nous a fait admettre que la zone failleuse pourrait être le prolongement de la faille d'Aiglemont. Lors de notre excursion dans l'Ardenne française, nous n'avons pu recueillir aucune donnée sur le passage d'une faille à Aiglemont ; si une telle faille existe dans la région, elle n'a pas, en tout cas,

---

(¹) Bull. Soc. belge de géol., etc., t. XXXII, 1922, pp. 98-119.

l'importance que lui attribuait J. Gosselet puisque, d'accord en cela avec M. Dollfus, nous admettons la présence de couches taunusiennes sur le bord Sud du synclinal de l'Eifel dans la région de Charleville.

L'existence de la faille d'Aiglemont n'étant pas établie avec certitude, nous proposons de donner le nom de *Faille d'Herbeumont* à la zone failleuse que nous avons reconnue depuis Corbion jusqu'à Straimont et qui se prolonge vraisemblablement vers l'Est par les failles de Mellier et de Martelange.

M. Alph. Proost envoie une *Note sur l'homme des Cavernes.*

A mesure que le nombre des documents augmente, le problème des races humaines quaternaires se complique. Lorsque la découverte des fameux squelettes de Spy (1886) eut par contre-coup authentiqué l'homme de Neanderthal, dont la calotte crânienne avait été recueillie et décrite par Fuhlrott, on imagina une série fort simple qui, partant d'un anthropoïde quelconque, passerait par le *Neanderthalensis*, puis par le type de Cro-Magnon, et aboutirait aux hommes modernes. Les débris de Trinil semblaient même fournir le premier terme de la série.

Aujourd'hui pareille construction n'aurait plus rien de vraiment scientifique. Si on connaît beaucoup mieux que jadis le type néanderthalien (squelettes de la Chapelle-aux-Saints, du Moustier, de la Ferrassie, de la Quina, etc.), si on a retrouvé des fossiles humains plus anciens encore (Heidelberg, Ehringsdorf, Piltdown,...), il faut avouer que ceux-ci ne s'alignent pas tous régulièrement dans la série schématique imposée par des savants trop impérieux. Le crâne de l'homme de Piltdown, à part son épaisseur, est un crâne de type moderne. Si l'homme de Broken-Hill a le front d'un Moustérien, ses dents, son fémur, son épine dorsale sont comme les nôtres. De plus, le type de Cro-Magnon ne semble pas du tout provenir du Néanderthalien. La race Aurignacienne (Combe-Capelle) devra peut-être à son tour obscurcir le problème. Les brachycéphales de Krapina n'ont pas comme ancêtres les dolichocéphales des stations moustériennes de France ou de Belgique. D'où viennent-ils ? Et pendant l'époque moustérienne, où se trouvaient les ancêtres des Cro-Magnon, que nous voyons subitement remplacer partout les chasseurs de mammouths, au front fuyant et aux gros bourrelets orbitaires ?

Enfin nous rappelons qu'en 1895, au Congrès international des Catholiques, nous avons soumis à l'assemblée des ossements, recueillis par nous dans la grotte de Spy. M. Stainier, professeur de géologie à l'Université de Gand, assistait à ces fouilles. Les frontaux exhumés sont du type moderne. (Cf. COMPTES RENDUS DU CONGRÈS, dernier volume, dernière séance).

On voit combien il est téméraire, dans l'état actuel de nos connaissances, de prétendre retrouver et surtout figurer l'*Ancêtre*, le fameux missing-link, que Darwin cherchait déjà, et que des journaux illustrés ont servi à leurs lecteurs à propos de la découverte de Broken-Hill. Le roman scientifique, détestable partout, est particulièrement désastreux en préhistoire, et nous n'avons nul besoin de ces synthèses ingénues et extravagantes qui se donnent comme l'histoire des « grandes mutations intellectuelles de l'humanité ».

Quatrième Section

La Section s'est réunie le mercredi, 26 avril, à l'issue de l'Assemblée générale, sous la présidence de M. le Dr Goris.

L'ordre du jour appelle une communication de M. le Dr Deroitte, Inspecteur des asiles et colonies d'aliénés, sur *une lacune dans l'assistance aux anormaux délinquants*. M. Deroitte s'inquiète du sort des délinquants anormaux une fois libérés. La surveillance de la police ne donne qu'une fausse sécurité ; son effet est absolument nul : revenus à leur milieu et aux influences anciennes, ils rejoignent, en outre, les compagnons qui partageaient leur internement, d'où des entraînements à de nouveaux délits.

Le système actuel doit être complété par une tutelle exercée par des aliénistes. M. Deroitte cite deux cas qu'il a personnellement observés, où ce système d'observation discrète, mais prolongée et bien comprise, dans le milieu même où ces sujets étaient rentrés, a donné lés meilleurs résultats.

Cette étude, d'une si grande portée au point de vue de la sécurité sociale, est reproduite ci-après, dans la partie réservée aux Mémoires (p.).

MM. A. Briot et J. Gur, de l'Institut catholique de Paris, empêchés d'assister à la séance, ont adressé à la Section un travail intitulé : *De l'action de la chaleur sur la liaison Présure-antiprésure*. En voici la teneur :

On discute encore sur la véritable nature des liaisons des toxines et des antitoxines, des ferments et des antiferments. A-t-on à faire à de simples combinaisons? Les phénomènes d'adhésion sont-ils seuls en jeu?

Sans refaire une bibliographie de cette question, nous signalerons simplement que, par divers artifices, de nombreux auteurs ont réussi à remettre en évidence la toxine d'un mélange neutre de toxine-antitoxine.

L'un de nous (Briot, C. R. S. Biol., t. LXXVI, p. 160) a pu aussi, par l'acide chlorhydrique, remettre en évidence, régénérer la présure d'un mélange présure-antiprésure inactif. Ce sont ces expériences que nous complétons aujourd'hui dans un autre sens, et par la chaleur nous pouvons régénérer le pouvoir antiprésurant d'un mélange présure-antiprésure.

On pouvait l'espérer en remarquant que la présure est détruite à partir de 50° et l'antiprésure seulement à partir de 57°.

Les expériences ont été conduites de la façon suivante :

On fait des mélanges de présure et d'antiprésure (sérum normal de cheval) en proportions telles que la présure y soit en excès suffisant pour conserver, après quelques heures de contact, un pouvoir coagulant appréciable sur le lait. La présure était donc en grand excès. On les chauffe une heure à des températures comprises entre 52° et 57°.

Des tubes témoins dans lesquels l'antiprésure (sérum de cheval) est remplacée par de l'eau physiologique, d'autres où la présure est remplacée par de l'eau salée au même titre, sont chauffés en même temps que les premiers.

Puis on mesure, par la méthode indiquée jadis par l'un de nous (Briot, Thès. D. ès Sc. Paris, 1900) le pouvoir antiprésurant des divers mélanges ; on arrive aux résultats suivants :

POUVOIRS ANTIPRÉSURANTS :

1°) du sérum de cheval après contact de 5 h. avec la présure	2°) du sérum de cheval non chauffé sans contact préalable	3°) du sérum seul chauffé 1 h. sans contact préalable	4°) des mélanges sérum-présure après une chauffe d'une h.	Température de chauffe
1/21	1/36	1/40,5	1/95	52°
1/15,4	1/45	1/56	1/129	52°
1/8	1/30	1/66	1/70	55°
1/15	1/45	1/66	1/125	57°
1/16	1/59	1/78	1/233	57°

Les mélanges qui étaient encore présurants avant chauffage, perdent non seulement cette propriété, mais acquièrent un pouvoir antiprésurant énergique, mais qui pourtant est toujours resté au-dessous du pouvoir antiprésurant du même sérum de cheval chauffé.

L'artifice du chauffage a non seulement détruit l'excès de présure libre, mais encore une bonne partie de celle qui saturait l'antiprésure du sérum de cheval, et finalement le mélange avait repris un pouvoir antiprésurant qui, dans l'expérience faite à 55°, est presque celui du sérum normal.

M. le Dr Houdmont (Bruxelles) présente un travail original sur les *Seuils d'excrétion du rein*.

Le travail d'excrétion du rein peut s'exercer en divers modes : par l'*effraction* sont lancées dans les voies d'excrétion les substances mêmes du sang ou de la lymphe ; *par la diffusion* filtrent, sans modification de concentration, certaines substances étrangères à l'organisme (alcool, chloroforme) qu'on peut ainsi retrouver à tout instant dans le sang et l'urine à la même concentration ; par l'*excrétion* enfin, le rein met en œuvre son pouvoir de concentration vis-à-vis des substances éliminées, et c'est là son rôle principal.

Les substances peuvent être rangées en deux groupes : le premier, composé de matières sans intérêt pour la vie, vraies substances de rebut (urée, bleu de méthylène, etc.) s'élimine quelle que soit sa concentration dans le sang ; le second, comprenant les substances d'intérêt vital (eau, sel, sucre, hémoglobine) ne peut être excrété que si ces corps se trouvent dans le sang à un certain taux de concentration : tout se passe comme s'il y avait pour elles un seuil d'excrétion.

Le terme de seuil, créé par Magnus-Levy, est ainsi une expression commode, qui traduit cette curieuse condition du travail du rein vis-à-vis de certains corps. L'étude des seuils, quoique récente, paraît déjà apporter à la pathologie physiologique du rein une contribution utile. Le but de ce travail est d'en indiquer les points principaux.

La détermination des seuils peut se faire selon deux procédés :

1) *par l'expérience*, en recherchant par des dosages successifs des teneurs du sang, le taux (de $NaCl$, par exemple), à partir duquel l'excrétion cesse ;

2) *par le calcul*, en partant de la constante empirique d'Ambard.

Quelle que soit l'opinion que l'on puisse avoir du K d'Ambard, il est certain que les deux procédés donnent des résultats comparables, et ils sont infiniment plus aisés à obtenir par la seconde méthode.

L'étude de quelques seuils va nous révéler quelques points particulièrement intéressants de la pathologie rénale. Nous nous limiterons aux seuils du $NaCl$, du glucose et de l'eau.

Le seuil du $NaCl$ existe, l'expérience de Magnus l'a démontré par l'injection de sulfate de soude dans les veines ; cet expérimentateur provoquait un appauvrissement en sel du sang et, par suite, une suspension de la sécrétion chlorurée.

Les travaux classiques de Widal nous ont appris, depuis, que la teneur du sang en sel était variable : le régime chloruré, par exemple, fait monter la concentration habituelle du $NaCl$ dans le sang. Les travaux d'Ambard montrèrent que ce qui, chez le sujet sain, conditionnait l'excrétion chlorurée, c'était l'excès de concentration sur le seuil.

Il suffisait dès lors d'étudier la valeur du seuil chez différents sujets, sains ou malades, pour constater que le seuil n'était pas une chose fixe et que, notamment, il était influençable par le régime. Un régime très chloruré élève le seuil, passagèrement, chez un sujet sain ; il l'élève considérablement et de façon beaucoup plus durable chez un sujet néphrétique. D'où une première conclusion : les seuils sont mobiles, et leur mobilité est influençable d'une façon différente par le régime chez le sujet sain et chez le sujet malade.

La mobilité du seuil du $NaCl$ peut non seulement être influencée par le régime, mais encore par les médications ; c'est ainsi que la théobromine agit; contrairement à l'opinion de Beco et de Plumier-Clermont que la théobromine influence seulement la vaso-motricité rénale, il est plus probable que son action s'exerce sur le seuil du $NaCl$: c'est un diurétique déchlorurant par mobilisation de la limite d'excrétion.

L'étude des seuils du glucose nous conduit à des considérations analogues : fixé par Claude Bernard au taux de 3 ‰, le seuil du glucose est déterminé aujourd'hui comme une valeur beaucoup plus basse, d'environ 1,10 ‰. Le seuil du glucose fut un des premiers dont la mobilité fut reconnue ; l'injection de phlorizine la démontra depuis longtemps. Sa mobilité chez le sujet malade a également été prouvée depuis, notamment par Rathery et par Langdon Brown. Alors que, dans le diabète rénal, le seuil s'abaisse en même temps que la glycémie diminue, dans le diabète vrai la glycémie augmente et le seuil suit la même ascension.

Les auteurs cités — comme aussi quelques expériences que nous avons pu faire — semblent nous mener à conclure que la mobilité du seuil du glucose chez le sujet malade constitue un important élément de pronostic : s'il est facilement influençable par le régime, il s'agit vraisemblablement d'un diabète bénin ; s'il n'est pas influencé par le régime, la maladie risque bien d'être grave. Comme pour le $NaCl$, la mobilité du seuil du glucose varie avec le régime et cette mobilité à son tour dépend du degré de la maladie.

Les médications d'ailleurs peuvent également influencer le seuil du glucose : les sels de calcium notamment relèvent le seuil du glucose et on les a vus tarer des glycosuries.

Nous ne pourrions omettre de signaler que le rôle du rein n'est pas envisagé de même par tous les auteurs. Certains, Fischer notamment, persistent à penser que les diverses rétentions qu'effectue l'organisme ne sont pas dues au rein, mais au pouvoir inhibiteur des tissus eux-mêmes : les expériences faites sur les globules rouges de pneumoniques et leur pouvoir d'imbibition vis-à-vis du *NaCl*, les expériences sur le pouvoir d'absorption des solutions de gélatine constituent leurs principaux arguments. Il n'entre pas dans nos intentions de discuter la chose ici plus longuement.

Le seuil de l'eau, outre sa mobilité influencée par le régime et par la médication, va nous révéler un mécanisme nouveau par lequel nous pouvons espérer influencer les seuils.

Le cas le plus manifeste dans lequel la sécrétion de l'eau est troublée, c'est le diabète insipide. Longtemps localisé dans le bloc postérieur de l'hypophyse, le centre de la sécrétion aqueuse semble mieux être situé aujourd'hui dans la région du tuber cinereum : les expériences physiologiques (Ashner, Camus et Roussy), les conclusions des chirurgiens (Cushing) et les récentes études anatomo-pathologiques (Lhermitte), le situent dans cette dernière région.

Nous avons donc ici la notion, rarement démontrée jusqu'ici, de l'existence de connexions réelles entre les centres nerveux et le rein. Bien plus, ceci nous démontre que l'action la mieux connue du système nerveux sur le rein est précisément une action sur le seuil de l'eau.

Cette brève étude nous a donc montré :

1) que certaines substances possédaient un seuil d'excrétion, véritable barrière de défense de l'organisme ;

2) que ces seuils étaient mobiles, notamment par le régime, par les médications, par la mise en jeu d'influences nerveuses ;

3) que la mobilité de ces seuils était modifiée par les maladies du rein et que cette modification était un élément important de pronostic.

Cela suffit, nous paraît-il, pour démontrer l'importance de leur étude.

M. le Dr Warlomont revient sur la question de la réforme des études médicales universitaires. Il regrette qu'une révision qui répond à des nécessités urgentes, et intéresse au plus haut point la science et la profession médicales, n'éveille pas davantage les préoccupations du public scientifique et particulièrement des praticiens. Un échange de vues s'établit sur cette question ; MM. Goris, François, Swolfs, Vervaeck et Warlomont y prennent part. La Section décide qu'un referendum, réalisé par un questionnaire, auquel les membres apposeront leurs avis, sera organisé par le bureau ; celui-ci recueillera ces vœux et les adressera à la *Fédération des Sociétés scientifiques*, qui les transmettra aux commissions compétentes instituées par le Gouvernement. Au besoin, la Section consacrerait une séance spéciale à l'examen de cette question.

Avant de se séparer, les membres de la Section procèdent au renouvellement de son bureau.

Ont été élus :

Président :	M. le Dr Delassus, doyen de la Faculté de Médecine de l'Université catholique de Lille ;
Vice-Présidents :	M. le Dr Delétrez (Bruxelles) ; M. le Dr Henseval, professeur à l'Université de Gand ;
Secrétaire :	M. le Dr Warlomont (Bruxelles).

La question suivante est mise au concours : *Faire des recherches personnelles sur les Seuils d'excrétion du rein au point de vue du pronostic et du traitement du diabète.*

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

Assemblée générale du mercredi 26 avril 1922

La séance est ouverte à deux heures et demie, sous la présidence de M. Maurice d'Ocagne, Membre de l'Institut. La salle est comble.

M. le Dr Warlomont lit le rapport de M. Colmet Daâge sur la *Société bibliographique* durant la dernière année : exercice 1921-1922. En voici les passages principaux :

Le nombre de nos sociétaires s'est accru d'une façon régulière avec une moyenne de 25 environ par mois, qui furent présentés, comme à l'ordinaire, à chacune des séances du Conseil d'administration.

Certains de nos sociétaires décédés sont souvent remplacés sous le même numéro par quelque membre de leur famille, ce qui nous montre combien sont solides les liens qui unissent ses adhérents à la *Société bibliographique*.

BIBLIOTHÈQUES POPULAIRES.

Notre principal effort a porté cette année sur les bibliothèques. Bien que nous ayons été forcés, très à contre-cœur assurément, d'augmenter le prix de location de nos séries de bibliothèques circulantes de 25 volumes (prix qui est passé de 7 à 10 fr.), jamais les demandes ne nous sont arrivées en aussi grand nombre. Tous les envois de livres ont été chaque mois en augmentation sur le mois correspondant de l'année précédente, et, pour ne citer qu'un chiffre : au lieu de 2.000 volumes expédiés au mois de décembre 1920, nous en avons envoyé 4.000 au même mois de décembre de cette dernière année (1921). Il a été fourni à nos abonnés 6.500 volumes de plus durant l'exercice 1921-1922 que pendant le précédent.

Nous avons créé, au cours de l'été, deux nouvelles séries, l'une à 39 exemplaires, et l'autre à 50, soit 2.225 volumes qui n'ont pas coûté moins de 10.000 fr. Définitivement prêtes en novembre, elles ont été mises en circulation le 1er décembre, et, en quelques jours, elles nous étaient littéralement enlevées. Annoncées d'avance dans notre BULLETIN, beaucoup d'associés s'étaient même faits inscrire aussitôt pour être plus certains de les recevoir. C'est dire clairement le succès qu'ont remporté les deux nouvelles séries.

Si, pour satisfaire au délassement populaire, elles renferment un certain nombre de romans, il s'y trouve aussi des livres instructifs et d'un caractère très sérieux. C'est ainsi qu'à côté de l'*Etape* de Bourget et de *Maria Chapdelaine* de L. Hémon, y figurent : *Ce que le monde catholique doit à la France* de G. Goyau et le *Concile du Vatican* de l'Abbé Mourret. Ou encore, pour des Cercles d'Etudes, les Comptes rendus des *Semaines sociales*.

Si Paris et sa banlieue nous ont, cette année, demandé plus de bibliothèques que de coutume, c'est pourtant dans les départements que nous envoyons la majorité de nos séries. Il serait difficile de dire quelles sont les provinces qui reçoivent le plus grand nombre de bibliothèques, car nos volumes s'en vont aussi bien en Bretagne et en Normandie que dans le Midi, le Centre et le Nord. Ils dépassent même parfois nos frontières, puisque certains sont envoyés à Kef en Tunisie, et d'autres même jusqu'à Dakar au Sénégal.

a) *Pays dévastés.*

Les avantages que le Conseil d'administration a faits en faveur des pays dévastés (diminution du prix de location sur la première bibliothèque demandée) pour favoriser, dans les villages ruinés par la guerre, la reprise des lectures et la reconstitution des bibliothèques, ont été très appréciés, et nous avons envoyé de nombreux volumes dans la Meuse, et plus particulièrement dans l'Aisne et dans les Ardennes.

b) *Œuvre des Campagnes.*

Un fait heureux est encore à relater : depuis notre Assemblée générale du mois de mai dernier, un bon client, un important client, nous est venu ; j'ai nommé l'Œuvre des Campagnes, dont le siège est à Paris, 2, rue de la Planche. Après un contrat signé entre le Président de la Société Bibliographique et le Directeur de l'Œuvre des Campagnes, le très regretté Père Truck, nous sommes devenus les fournisseurs attitrés et officiels de l'Œuvre des Campagnes : par elle aussi nos bibliothèques vont parvenir dans de nombreux villages de France et y rendre les services attendus. Nous pouvons lire dans son Bulletin de février 1922 les lignes suivantes : « Nous renouvelons ici à la Société Bibliographique nos profonds remerciements pour tout le bien qui doit résulter de notre accord, car nous avons toutes raisons de croire, qu'à l'usage, l'excellence des bibliothèques renouvelables sera de plus en plus appréciée ».

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

La Société Bibliographique a tenu son Assemblée générale le jeudi 12 mai 1921, dans la grande salle des œuvres de la rue des Saints-Pères, sous la présidence de S. É. le Cardinal Dubois, archevêque de Paris.

Après le rapport de M. Geoffroy de Grandmaison sur le dernier exercice de la Société, M. Louis Madelin, le distingué historien et conférencier, dans un discours plein de verve et d'esprit, parla des *livres napoléoniens*. Il fut écouté avec le plus grand intérêt par l'assistance d'élite qui emplissait la salle.

L'intérêt avait été particulièrement attiré par la présence de M. d'Ocagne qui représentait la Société scientifique de Bruxelles, avec son autorité et son talent. — Depuis nous nous sommes associés au très légitime honneur qui lui est échu quand il a pris place parmi les membres de l'Institut.

LE POLYBIBLION.

Depuis 55 ans, organe scientifique de la Société Bibliographique, le POLYBIBLION, revue bibliographique universelle, poursuit sa publication. Pendant la durée de la guerre, il n'a pas défailli. Aussi, depuis 1915, il rayonne davantage à l'étranger peut-être parce que nul périodique en France n'a rendu compte d'autant d'ouvrages relatifs à la grande guerre. Mais ce n'est là qu'une simple fraction — à la vérité particulièrement intéressante — de l'énorme quantité de livres examinés par ses collaborateurs depuis longtemps attachés à la rédaction de la Revue et tous très compétents dans leur spécialité ; ils sont au nombre de 75.

M. M. D'Halluin, professeur à l'Université catholique de Lille, fit la conférence. Il parle du *Radium*, raconte l'histoire de sa découverte, décrit ses propriétés et signale quelques-unes de ses applications en médecine. Le conférencier illustre son exposé de projections lumineuses et d'expériences. Le texte de sa causerie paraîtra dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (¹).

II

Assemblée générale du jeudi 27 avril 1922

M. d'Ocagne, président, ouvre la séance à deux heures et demie.

Au nom du Conseil il propose à l'assemblée d'envoyer une adresse de respectueux hommage à Sa Sainteté Pie XI. L'assistance applaudit le texte de cette adresse.

M. de la Vallée Poussin, secrétaire général, annonce le résultat du scrutin pour le Conseil.

(¹) 20 juillet 1922.

Pour l'année 1922-1923 le Conseil est constitué de la manière suivante : (1)

Président : M. A. Renier (1923).
Vice-Présidents : M. R. Warlomont (1925).
M. A. Delassus.
Secrétaire général : M. Ch.-J. de la Vallée Poussin (1923).
Secrétaires : R. P. F. Willaert (1924).
R. P. H. Dopp (1926).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1925).
Membres : MM. M. Alliaume (1925).
Ch. Beaujean (1925).
le M^is de la Boëssière-Thiennes (1923).
le R. P. H. Bosmans (1924).
le Chanoine Cocheteux (1924).
Fr. De Walque (1923).
É. De Wildeman (1924).
G. Duplat (1926).
le Chanoine V. Grégoire (1926).
É. Harmant (1926).
Ch. Lagasse de Locht (1926).
le C^te Ad. de Limburg-Stirum (1925).
E. Pasquier (1926).
A. Proost (1923).

Après avoir fait connaître les bureaux que se sont désignés les Sections, et les questions de concours qu'elles ont proposées, M. le Secrétaire général donne lecture du *rapport annuel* sur l'exercice 1921-1922.

I. PUBLICATIONS

1° Annales. Du 1er avril 1921 au 1er avril 1922, la Société a fait paraître les deux derniers fascicules, réunis en un seul, du tome XL des Annales et les deux premiers du tome XLI.

---

(1) Le nom de chaque membre du Conseil est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

Le volume XL des Annales compte 626 pages réparties comme suit entre les diverses Sections :

Sciences mathématiques	169 pages
Sciences physiques	46 »
Sciences naturelles	192 »
Sciences médicales	107 »
Sciences économiques	1 »
Documents	111 »
	626 »

On y remarque de nombreuses communications de nos collègues français, particulièrement de nos collègues de Lille.

Malheureusement le coût toujours élevé de l'impression n'a pas encore permis de publier tous les mémoires qui ont été approuvés par les sections, notamment par la première et la troisième.

2° Revue des Questions scientifiques. Cette année sociale a vu paraître le dernier fascicule du volume 79 de la collection, le volume 80 et le premier fascicule du volume 81.

Les articles de fond des volumes 79 et 80 portent les signatures et les titres suivants :

1. *Abbé Moreux.* Connaissons-nous le plan de l'Univers ?
2. *F. de Montessus de Ballore.* Histoire de la sismologie.
3. *É. Delaye.* Le principe de la relativité.
4. *A. Witz.* L'électricité, substance ou accident ? *(Suite).*
5. *M. Alliaume.* La rigidité de la Terre d'après des expériences récentes.
6. *H. Rulot.* De l'organisation sanitaire de la Belgique.
7. *É. Delaye.* Les diverses formes de l'énergie rayonnante.
8. *V^{te} R. d'Adhémar.* L'organisation et le tir de l'artillerie.
9. *C. Matignon.* Le gisement de potasse alsacien et l'état actuel de son exploitation.
10. *A. Witz.* L'électron, grain d'électricité.
11. *Chan. V. Grégoire.* Progrès et tendances dans l'évolution végétale.
12. *J. de Lapparent.* L'histoire de la Terre expliquée par le microscope.
13. *R. P. Bosmans. Pierre Duhem* (1861-1916). Notice sur ses travaux relatifs à l'histoire des sciences.
14. *R. Bruynoghe.* Le principe bactériophage.
15. *F. Malengreau.* Les facteurs accessoires de la nutrition (Vitamines).
16. *W. Mund.* Les colloïdes, leur préparation et leurs propriétés optiques.
17. *R. Van der Mensbrugghe.* La signalisation de nos chemins de fer.
18. *R. P. G. Schmitz.* André Dumont,
19. *Abbé Moreux.* Un chapitre nouveau de l'évolution planétaire.

20. *R. P. P. Camboué.* Psychique de la bête.
21. *J. Abelé.* Les lampes-valves à trois électrodes et leurs applications.
22. *R. P. R. Lange.* Le rayon vert.
23. *F. Baudhuin.* Les grands problèmes monétaires. L'inflation.

La partie bibliographique s'est légèrement accrue ; on y trouve l'analyse de 111 ouvrages. En outre, sous la rubrique nouvelle « Ouvrages récemment parus », la Revue annonce succinctement, sans en donner l'appréciation, les ouvrages envoyés à la Rédaction.

II. SESSIONS

La session du printemps a eu lieu à Bruxelles, les 6 et 7 avril 1921. L'assemblée générale du mercredi 6 avril fut honorée de la présence de Son Excellence Mgr Nicotra, Nonce apostolique à Bruxelles. Après la lecture du rapport envoyé par la Société Bibliographique, M. A. Lemaire, Professeur à l'Université de Louvain, fit une conférence accompagnée de projections lumineuses en couleurs sur la genèse des globules du sang ; il fit connaître avec un remarquable talent d'exposition l'état actuel de cette question.

A la réunion du jeudi 7 avril nous eûmes le plaisir d'entendre M. Jacques de Lapparent, Professeur à l'Université de Strasbourg, fils de notre regretté confrère, le secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Paris. Il montra les services que rend au géologue l'examen microscopique des roches, et comment l'histoire de la Terre est ainsi expliquée par le microscope. Le texte de cette conférence a été publié dans la Revue des Questions scientifiques.

La Société tint sa réunion d'automne le jeudi 17 octobre, à Tournai. Le choix de cette ville proche de la frontière avait été suggéré au Conseil par le désir de se rapprocher de Lille, qui nous fut si hospitalière l'année dernière ; et ce fut un professeur distingué de l'Université catholique de cette ville, le Dr Guermonprez, membre correspondant de l'Académie de médecine de Belgique, qui nous entretint à l'assemblée générale. Il nous fit le récit ému et enthousiaste de la part due à la vie scientifique et au maintien de la langue nationale dans la résurrection de la Pologne. Mgr Crooy, évêque de Tournai, avait accepté la présidence d'honneur de l'assemblée. Le collège Notre-Dame, dirigé par les Pères jésuites, nous avait ouvert ses locaux pour les réunions des sections et pour l'assemblée générale. Nous renouvelons à Mgr Crooy et aux Pères du collège l'expression de nos plus vifs remercîments.

A Bruxelles, le jeudi 9 février dernier, lors de notre réunion d'hiver, le Conseil, conformément aux statuts, saisit l'assemblée générale des changements à apporter au texte de ces statuts pour les conformer aux prescriptions de la loi belge du 27 juin 1921 sur la personnification civile des associations sans but lucratif.

Nous eûmes ensuite le plaisir d'entendre comme conférencier un nouveau membre de la Société, M. Damas, professeur à l'Université de Liége et directeur de l'Institut Édouard Van Beneden. Le savant professeur présenta un parallèle entre deux méthodes scientifiques différentes : celle d'un zoologiste allemand, Ernest Haeckel, et celle d'un zoologiste belge, Édouard Van Beneden. Il mit en relief dans ce tableau le contraste entre la sincérité professionnelle absolue du savant belge et le manque évident de bonne foi du savant allemand. L'auditoire ne fut pas autrement surpris de reconnaître dans la science allemande le même vice qui contamine la politique de l'Allemagne, et il ne ménagea pas ses applaudissements au conférencier.

III. ÉTAT ACTUEL DE LA SOCIÉTÉ

L'organisation du Secrétariat a été modifiée cette année. Le R. P. Willaert, absorbé par des occupations étrangères à la Société, avait offert sa démission de secrétaire. Le départ du R. P. Willaert eût été une grande perte pour la Société. Le Conseil qui sait tout ce qu'elle doit au dévouement et à la prudente direction de son ancien secrétaire, a vivement insisté pour qu'il conservât sa charge et il a obtenu satisfaction. Toutefois il a reconnu la nécessité de nommer un secrétaire de plus. Je me plais à dire que le R. P. Dopp, qui a accepté ces nouvelles fonctions, les remplit avec un zèle et une compétence qui méritent la confiance et la reconnaissance de la Société.

Parmi les nouveaux membres inscrits cette année, nous comptons Sa Grandeur Mgr Baudrillart, Recteur de l'Institut catholique de Paris, de l'Académie française, et quatre membres honoraires appartenant à l'Académie des sciences de Paris : MM. Andoyer, Bigourdan, Blondel et Lindet.

La liste des membres fondateurs s'est accrue de deux noms, ceux de l'abbé Houart, curé émérite à Enghien, et de M. Xavier Francotte, professeur à l'Université de Liége.

Le nombre des membres est actuellement de 492 dont 349 belges et 143 étrangers.

Sept de nos collègues nous ont été enlevés par la mort : l'ingénieur Van Bastelaer, le juge Smekens, l'abbé Rachon, l'abbé Gelin, le Dr Moeller, le Dr Henri Duret et M. Camille Jordan.

M. l'abbé Gelin était universellement estimé ; ses traités de trigonométrie et d'arithmétique, qui furent couronnés par l'Académie royale de Belgique, se répandirent rapidement dans notre enseignement moyen et devinrent classiques.

M. le Dr Moeller, membre et ancien président de l'Académie royale de Médecine de Belgique, fut un praticien très recherché et un hygiéniste distingué. Ses occupations professionnelles ne lui laissèrent pas le loisir de se livrer à des travaux originaux de science pure, mais il était doué d'un esprit curieux et clairvoyant et ce fut un excellent vulgarisateur. La REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES le compte au nombre de ses plus fidèles collaborateurs. Ses travaux les plus saillants concernent le daltonisme, la tuberculose et le traitement hygiénique des maladies du cœur. Il écrivit en 1882 un ouvrage remarquable intitulé : *De la thérapeutique locale des maladies de l'appareil respiratoire.*

M. le Dr Duret, Professeur à la Faculté de médecine de l'Université catholique de Lille, s'était distingué à Paris dès les débuts de sa carrière par des recherches sur « la circulation des centres nerveux » qui lui valurent le grand prix de l'Institut, et par sa thèse inaugurale sur les « traumatismes cranio-cérébraux » qui fut couronnée par la Faculté de médecine de Paris. Cette dernière question resta l'objet de ses préoccupations jusqu'au déclin même de sa laborieuse carrière. Appelé en 1885 à l'importante chaire de clinique chirurgicale de l'Hôpital de la charité à Lille et à l'enseignement de la chirurgie à l'Université catholique de la même ville, il déploya une telle activité, jointe à une dextérité si souple et si ferme à la fois, qu'il compta parmi les maîtres de l'école française de chirurgie.

Entré dans la retraite en 1912 après 45 ans d'enseignement, il poursuivit jusqu'au dernier jour son noble labeur. Il fut associé national de l'Académie de Médecine de Paris, membre correspondant de la Société de chirurgie, de la Société de biologie, de l'Académie de Médecine de Belgique. Il laisse une œuvre considérable en anatomie, en physiologie et dans les différents domaines de la chirurgie. Il garda jusqu'à la fin de sa vie le goût des grandes questions de biologie et de physiologie générale. Avec deux collègues de la Faculté il fonda une École d'anthropologie et fut reçu dans la Société d'anthropologie de Paris. L'Université de Louvain lui décerna le titre de docteur *honoris causa* et le Souverain Pontife lui conféra la dignité de Commandeur de l'Ordre de St-Grégoire le Grand.

M. Camille Jordan, ancien Ingénieur en chef des mines, membre de l'Académie des sciences de Paris, professeur d'analyse mathématique à l'École Polytechnique et au Collège de France, s'est fait une réputation universelle par des travaux de première valeur sur la théorie des groupes, sur celle des équations algébriques et sur les principes de la théorie des fonctions de variables réelles. Il fut aussi docteur *honoris causa* de l'Université de Louvain. Il joignait au mérite de ses travaux scientifiques, celui des vertus familiales chrétiennes. Père de huit enfants, il supporta avec une résignation vaillante la perte de trois fils et d'un petit-fils durant la dernière guerre. L'un d'eux, élève du Séminaire de St-Sulpice, se préparait à entrer dans le sacerdoce après une belle carrière militaire.

DISTINCTIONS

Parmi les distinctions méritées cette année par nos collègues, je signale particulièrement les suivantes :

M. Ch. De Jace, Professeur à l'Université de Liége, a été nommé Recteur de cette institution.

M. le D^r Deletrez succède à feu M. Debaisieux comme membre titulaire de l'Académie de médecine de Belgique.

M. le Professeur M. d'Ocagne, notre président cette année, a été élu membre libre de l'Académie des Sciences de Paris. Le Conseil a été heureux de porter son nom parmi ceux des membres honoraires de la Société.

La mémoire de feu M. Georges Humbert a recueilli une distinction posthume de la part de la même Académie. Le prix Petit d'Ormoy a été décerné à l'ensemble des travaux de notre regretté collègue.

Une souscription publique a été organisée par l'Écho de Paris pour doter le laboratoire de recherches de M. Éd. Branly. La *Société scientifique* a tenu à y participer par un engagement de cinq cents francs.

Recettes et dépenses de la Société scientifique de Bruxelles pendant l'année 1921

Revue des Questions scientifiques

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des abonnements fr.	17.600,42	Impression, illustration et expédition	17.764,02
Vente d'anciennes livraisons	2.846,55	Collaboration	4.940,60
Subside de la Société	3.282,19	Administration et propagande	1.024,54
	23.729,16		23.729,16

Annales

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des cotisations . .	11.659,45	Impression, illustration et expédition	11.066,12
Une part de fondateur . .	1.000,00	Rachat d'anciennes livraisons	178,50
Vente d'anciennes livraisons	81,25	Indemnités des secrétaires	2.233,00
Vente de publications . .	477,45	Frais des sessions . . .	1.379,81
Subside de la Société . .	2,663,82	Administration et propagande	1.024,54
	15.881,97		15.881,97

Société

RECETTES		DÉPENSES	
Revenus divers	7 212,40	Subside à la Revue . . .	3.282,19
		Subside aux Annales . . .	2.663,82
		Taxes	35,49
		Souscription pour le laboratoire de M. Branly	500,00
		Excédent	730,90
			7.212,40

M. le Président soumet à l'approbation de l'assemblée deux changements proposés par le Conseil dans le projet nouveau de statuts qui a été communiqué à tous les membres dans la dernière circulaire de convocation. Unanimement l'Assemblée décide la constitution de la Société en Association sans but lucratif, conformément à la loi belge du 27 juin 1921 et approuve la rédaction nouvelle des Statuts :

STATUTS

de la Société scientifique de Bruxelles

Association sans but lucratif

ARTICLE PREMIER. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de *Société scientifique de Bruxelles* avec la devise « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* ». Le siège social de cette association est établi au secrétariat, à Louvain.

ART. 2. — Cette association a pour objet tout ce qui est de nature à favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

ART. 3. — L'association se compose d'un nombre illimité de membres, cinq au minimum. Elle fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse.

Font actuellement partie de cette association :

MM. NN. (noms, prénoms, domicile, profession, nationalité).

[L'Assemblée générale décide de n'insérer dans le texte officiel à publier au *Moniteur* que les noms des membres du Conseil].

ART. 4. — Pour être admis dans l'association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission est prononcée par celui-ci à la majorité des deux tiers des voix.

ART. 5. — Les membres ordinaires versent une cotisation annuelle maximum de 25 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme maximum de 500 francs versée une fois pour toutes.

Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, un engagement de 1000 francs sont membres fondateurs. Leurs noms figurent en tête des listes par ordre d'inscription ; ils reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit d'engagements de mille francs.

Le Conseil d'administration peut décerner le titre de membre honoraire à des savants étrangers à la Belgique.

ART. 6. — La démission et l'exclusion des membres sont réglées par l'art. 12 de la loi du 27 juin 1921.

L'associé démissionnaire ou exclu, ses ayants droit et ceux d'un associé défunt n'ont aucun droit sur l'avoir social.

ART. 7. — Chaque année il y a trois sessions. Elles comprennent des séances générales et des séances de section.

La session principale se tient dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques. On y lit le rapport annuel.

Les deux autres sessions se tiennent en automne et en hiver.

Des assemblées générales extraordinaires peuvent être convoquées quand l'intérêt de l'association l'exige. Elles doivent être convoquées lorsqu'un cinquième au moins des associés en fait la demande.

ART. 8. — Les assemblées générales sont convoquées au moyen de circulaires adressées individuellement à tous les associés par le Secrétaire général. Ces circulaires indiquent les objets portés à l'ordre du jour de la réunion.

ART. 9. — Il appartient à l'assemblée générale :

1° de modifier les statuts en se conformant à ce qui est prescrit à cet égard par la loi et par les présents statuts ;

2° de nommer et de révoquer les membres du Conseil d'administration ;

3° d'approuver annuellement le budget et les comptes ;

4° de prononcer la dissolution de l'association en se conformant aux prescriptions légales et aux dispositions des statuts ;

5° d'exercer tous autres pouvoirs dérivant de la loi ou des présents statuts.

ART. 10. — Des résolutions peuvent être prises en dehors de l'ordre du jour moyennant l'assentiment du Conseil d'administration.

ART. 11. — Lorsqu'une résolution prise par l'assemblée générale n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive quel que soit le nombre des membres présents, sous la réserve des dispositions de la loi du 27 juin 1921.

ART. 12. — Dans ses sessions, la Société se répartit en six sections : 1. Sciences mathématiques. 2. Sciences physiques. 3. Sciences naturelles. 4. Sciences médicales. 5. Sciences économiques. 6. Sciences techniques.

Tout membre de l'association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Chaque section peut avoir des réunions extraordinaires en dehors des sessions, pourvu que les travaux scientifiques auxquels ces réunions donnent lieu soient soumis à la section pendant les sessions de la Société.

ART. 13. — La Société publie annuellement, sous le titre d'ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, le compte rendu de ses réunions et les travaux présentés par ses membres. Les associés reçoivent un exemplaire de cette publication.

La Société publie également la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

ART. 14. — L'association est administrée par un Conseil de vingt membres renouvelable annuellement par quart à la session de Pâques.

Le Conseil constitue son Bureau : Président, Vice-Présidents, Secrétaire général, Secrétaires et Trésorier. Le Président ou un Vice-Président et les Secrétaires peuvent être choisis en dehors du Conseil.

Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire général, les Secrétaires et le Trésorier sont seuls rééligibles.

ART. 15. — Le Conseil d'administration peut, en dehors de tous autres pouvoirs dérivant de la loi ou des présents statuts, transiger, compromettre ; acquérir, vendre, échanger ou hypothéquer des immeubles ou des droits réels immobiliers ; emprunter, stipuler la clause de voie parée ; donner mainlevée de toutes inscriptions d'office ou autres ; conclure des baux de toute durée ; accepter tous dons et tous legs et tous transferts.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sous réserve du droit de contrôle de l'assemblée générale.

ART. 16. — Le Conseil peut, sous sa responsabilité, déléguer des pouvoirs déterminés à l'un de ses membres et même à des tiers, pourvu que ceux-ci soient des associés.

ART. 17. — Sauf les cas prévus à l'art. 4, les délibérations du Conseil sont prises à la majorité des membres présents. En cas de partage égal des voix, celle du Président, ou de celui qui le remplace, est prépondérante. Néanmoins aucune résolution ne sera valable que si elle a été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué. Peuvent assister aux séances du Conseil, avec voix consultative, les Présidents des sections, et, en cas d'empêchement du Président, le Secrétaire de la même section.

ART. 18. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'association et le présente dans la session de Pâques, ainsi que le compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'assemblée, lui donne décharge.

ART. 19. — La devise de l'association et l'art. 2 ne pourront jamais être modifiés.

ART. 20. — En cas de dissolution de l'association, l'assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination à donner aux biens collectifs. Cette destination sera conforme à l'objet de l'association tel qu'il est déterminé à l'art. 2.

M. Paul Debaisieux, Professeur à l'Université catholique de Louvain, fait une conférence sur les *Protozoaires*. Il dresse le bilan des études faites sur les êtres unicellulaires aux divers points de vue de la morphologie, de la phyllogénie, de la systématique et de la biologie. Cette conférence sera publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1).

---

(1) 20 juillet 1922.

LISTE DES OUVRAGES
OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
du 1^er^ mai 1921 au 1^er^ mai 1922

I. LIVRES ET BROCHURES

Frantz Abauzit. L'Énigme du Monde et sa solution selon Charles Secrétan. Un vol. de 235 pages (19 × 13). Paris, Alcan, 1922.

Dr Achalme. Les édifices physico-chimiques. Tome I : L'Atome. Sa structure et sa forme. Dessins à la plume de M. Raoul Leclerc. Un vol. de 244 pages (23 × 14). Paris, Payot, 1921.

D'Alembert Jean. Traité de Dynamique. Deux volumes de XL-102 pages (17 × 11). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

André-Marie Ampère. Mémoires sur l'électromagnétisme et l'électrodynamique. Un vol. de XIV-110 pages (18 × 11), de la Collection « Les Maîtres de la pensée scientifique ». Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Dott. G. Emilio Anastasia. Le forme elementari della composizione dei vegetali o L'Origine della specie. Parte Prima : Le Nicotiianal. Un vol. de 43 pages (26 × 19). Scafati Stabilimento tipografico Rinascimento, 1920.

H. Andoyer. L'Œuvre scientifique de Laplace. Un vol. de 162 pages (16 × 10) de la Collection Payot. Paris, Payot, 1922.

P. Appell. Éléments de la théorie des Vecteurs et de la Géométrie analytique. Un vol. de 147 pages (16 × 11) de la Collection Payot, avec de nombreuses figures dans le texte. Paris, Payot, 1921.

Paul Appell. Éléments d'analyse mathématique à l'usage des candidats au certificat de Mathématiques Générales, des Ingénieurs et des Physiciens. Cours professé à l'École centrale des Arts et Manufactures. Un vol. de X-716 pages (25 × 16), avec 220 fig. Paris, Gauthier-Villars, 1921.

E. Ariès. L'Œuvre scientifique de Sadi Carnot. Introduction à l'étude de la Thermodynamique. Un vol. de 160 pages (16 × 11) de la Collection Payot. Paris, Payot, 1921.

Svante Arrhénius. Le Destin des Étoiles. Études d'Astronomie physique. Traduction française par T. Seyrig. Un vol. de 223 pages (19 × 12) de la Nouvelle Collection scientifique. Paris, Alcan, 1921.

Maurice Arthus. De l'Anaphylaxie à l'Immunité. Un vol. de XXXVI-361 pages (28 × 16). Paris, Masson, 1921.

Félix Auerbach. Moderne Magnetik. Un vol. de VIII-304 pages (23 × 15), avec 167 figures dans le texte. Leipzig, Barth, 1921.

Victor Auger. Principes de l'Analyse chimique. Un vol. de 224 pages (18 × 11), de la Collection Armand Colin. Paris, Colin, 1921.

A. Baldit. Études élémentaires de météorologie pratique. Un vol. de 339 pages (24 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Édouard Bayer. La théorie de Bohr. La Constitution de l'atome et la classification périodique des éléments. Un vol. de 52 pages (25 × 16) (Conférences). Paris, Hermann, 1922.

H. Beghin. Statique et Dynamique. Deux vol. in-16 de VIII-200 et 208 pages, avec figures, de la Collection Armand Colin. Paris, Colin, 1921.

Gustave Belot. La Conscience française et la Guerre. Un vol. in-16 de XI-194 pages, de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine. Paris, Alcan, 1921.

G. Bigourdan. Gnomonique ou traité théorique et pratique de la Construction des Cadrans solaires, suivi de tables auxiliaires relatives aux cadrans et aux calendriers. Un vol. de 215 pages (23 × 14). Paris, Gauthier-Villars, 1922.

A. Blanc. Rayonnement. L'Éclairage. Un vol. de VI-212 pages (17 × 11). Paris, Colin, 1921.

Eugène Bloch. Théorie cinétique des Gaz. Un vol. de 176 pages (17 × 12) de la Collection Armand Colin. Paris, Colin, 1921.

Marcel Boll. La Science et l'esprit positif chez les penseurs contemporains. Un vol. de 261 pages, in-16, de la Collection « Les Questions Actuelles ». Paris, Alcan, 1921.

Max Born. La Constitution de la Matière. Un vol. de 84 pages (25 × 15). Traduit par H. Bellenot. Paris, Blanchard, 1922.

Pierre Bouguer. Essai d'Optique sur la Gradation de la Lumière. Un vol. de XX-129 pages (18 × 11). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Pierre Boulan (Dr). Les agents physiques et la Physiothérapie. Un vol. de 160 pages (16 × 10) de la Collection Payot. Paris, Payot, 1921.

A. Brachet. Traité d'Embryologie des Vertébrés. Un vol. in-8° de 601 pages et 567 figures. Paris, Masson, 1922.

Edward G. Brown, M. B., F. R., C. P., Arabian Medecine. Being the Fitz Patrick lectures delivered at the College of Physicians in November 1919 and 1920. Un vol. de 138 pages (22 × 14). Cambridge, University Press, 1921.

William Brown and Godfrey H. Thomson. The Essentials of Mental Measurement. Un vol. de VIII-216 pages (24 × 15). Cambridge, University Press, 1921.

M. C. Burkitt. Prehistory. A study of early Cultures in Europe and the Mediterranean Basin. Un vol. de XX-438 pages (25 × 17). Cambridge, University Press, 1921.

Jean Camus (Dr). Titres et Travaux scientifiques. Un vol. de 93 pages (28 × 19). Paris, Chaix, 1921.

Carra de Vaux (Baron). Les Penseurs de l'Islam. Vol. I : Les souverains, l'histoire et la philosophie politique. Vol II : Les géographes, les sciences mathématiques et naturelles. Un vol. de VII-383 pages et un vol. de 400 pages (19 × 12). Paris, Geuthner, 1921.

Albert Carnoy, Professeur à l'Université de Louvain. Les Indo-Européens. Préhistoire des Langues, des Mœurs, et des Croyances de l'Europe. Un vol. de 256 pages (19 × 12). Bruxelles, Vromant, 1921.

E. Castueil. Jusqu'au Seuil. (Roman). Un vol. de 90 pages (24 × 16). Paris, Maloine, 1922.

M. Caullery. Parasitisme et Symbiose. Un vol. de 400 pages in-16 avec 35 figures dans le texte, de la Bibliothèque de Biologie générale. Paris, Doin, 1921.

L. Celmar. Hypothèses nouvelles sur la nature de la Vie. Un vol. de 20 pages (22 × 14). Paris, Leymarie, 1921.

L. Celmar. L'âme et ses réincarnations. La preuve par l'histoire. Théorie scientifique. Un vol. de 184 pages (21 × 13). Paris, Leymarie, 1921.

P. Charbonnier. Traité de Balistique extérieure. Tome I : Balistique extérieure rationnelle. Les théories générales de la Balistique. Un vol. de IX-637 pages (25 × 16). Paris, Doin, Gauthier-Villars, 1921.

Jean Chautard. Les gisements de pétrole. Un vol. de 330 pages, in-16, de la Collection « Bibliothèque de Géologie et de Minéralogie appliquées ». Paris, Doin, 1922.

Gustave Chauveaud. La constitution des plantes vasculaires révélée par leur ontogénie. Un vol. de XIII-155 pages (23 × 14), avec 54 figures. Paris, Payot, 1921.

Paul Chavigny (Dr). Psychologie de l'Hygiène. Un vol. de 288 pages (19 × 12), de la Bibliothèque de Philosophie scientifique. Paris, Flammarion, 1921.

Stéfan Christesco. La Relativité et les Forces dans le système cellulaire des Mondes. Nouvelle étude de Cosmogonie scientifique. Un vol. de 302 pages (19 × 12), avec 10 figures et 4 tableaux hors texte. Paris, Alcan, 1921.

Ch. Coffignier. Manuel du peintre. Couleurs et Vernis. Un vol. de 348 pages (16 × 11), avec 31 figures, de la Bibliothèque Professionnelle. Paris, Baillière et Fils, 1921.

Aug. Collard, Bibliothécaire de l'Observatoire Royal de Belgique. L'Astronomie et les Astronomes. Un vol. de 119 pages (24 × 16). Van Oost et C^{ie}, Bruxelles, 1921.

G. Contenau (Dr). La civilisation Assyro-Babylonienne. Un vol. de 143 pages (16 × 10), de la Collection Payot, avec 30 figures dans le texte. Paris, Payot, 1922.

Henri Cordier. La Chine. Un vol. de 138 pages (16 × 10), de la Collection Payot. Paris, Payot, 1921.

Henri Cordier. Histoire générale de la Chine et de ses relations avec les pays étrangers depuis les temps les plus anciens jusqu'à la chute de la dynastie Mandchoue. Vol. I : 572 pages; vol. II : 432 pages; vol. III : 428 pages; vol. IV : 428 pages (22 × 14). Paris, Geuthner, 1920.

R. Cornubert. Dictionnaire Anglais-Français-Allemand de mots et locutions intéressant la physique et la chimie. Un vol. de XXXI-297 pages (24 × 16). Paris, Dunod, 1922.

John M. Coulter and Merle C. Coulter. Plant Genetics. Un vol. de VIII-214 pages (20 × 13). Chicago, University Press, 1921.

P. Cruveilhier. Les principaux résultats des nouvelles fouilles de Suse. Un vol. de IX-154 pages (19 × 12). Paris, Geuthner, 1921.

Mme Pierre Curie. La Radiologie et la Guerre. Un vol. de 144 pages (18 × 12). Paris, Alcan, 1921.

Jules Decamps. Les Changes étrangers. Exposé général des conditions et moyens de règlement des comptes internationaux et de la crise des changes. Un vol. de IX-396 pages (23 × 14). Paris, Alcan, 1922.

A. de Poorter et M. Alliaume. Catalogue des manuscrits mathématiques de la Bibliothèque de Bruges. Un vol. de 50 pages (24 × 16). Bruges, De Plancke, 1922.

L. Descour. Pasteur et son Œuvre. Un vol. de 296 pages (20 × 14) avec un portrait. Paris, Delagrave, 1921.

É. De Wildeman. Contribution à l'étude de la Flore du Katanga. Un vol. de CXLIV-264 pages (26 × 18). Bruxelles, Reynaert, 1921.

É. De Wildeman. Mission forestière et agricole du comte Jacques de Briey, Ingénieur Agronome au Mayumbe (Congo Belge). Un vol. de XIV-468 pages (24 × 16). Bruxelles, Reynaert, 1920.

E. Dinet et Sliman Ben Ibrahim. L'Orient vu de l'Occident. Un vol. de 104 pages (19 × 13). Paris, Geuthner, 1922.

Jean Dore. Contribution à l'étude de l'auto-vaccinothérapie. Étude expérimentale sur la production des Anticorps. Un vol. de 154 pages (24 × 16). Toulouse, Dirion, 1921.

H. Driesch. La Philosophie de l'Organisme. Préface de J. Maritain, Professeur à l'Institut Catholique. Un vol. de XI-234 pages (23 × 14). Paris, Rivière, 1921.

Jacques Duhelly. Philosophie de la guerre. Un vol. de 217 pages (19 × 12), de la Collection « Les Questions Actuelles ». Paris, Alcan, 1921.

H. Du Laurens de la Barre. Bois fossiles des Grès tertiaires du Finistère. Revisé et publié par J. Kowalski. Brochure de 278 pages (24 × 16).

Paul Dupont. La Notion du Temps d'après Einstein. Un vol. de 54 pages (19 × 12). Paris, Alcan, 1921.

José Ma Dusmet y Alonso. Los Apidos de Espana. V. Generos Stelis Panz., Dioseys Lep., Ammobatis Latr., Phiatus Oferst., Pasites Jur. y Biaster Panz. Brochures de 36 pages (24 × 16). Madrid, 1921.

Dutrochet René. Les mouvements des végétaux. Du réveil et du sommeil des plantes. Un vol. de XIII-121 pages (17 × 11). Paris. Gauthier-Villars, 1921.

A. S. Eddington. Espace, Temps et Gravitation. Traduit par J. Rossignol, avec introduction de P. Langevin. Un vol de IX-409 pages (25 × 16). Paris, Hermann, 1921.

Ch. Fabry. Éléments d'électricité. Un vol. de 298 pages in-16, avec 70 figures, de la Collection Armand Colin. Paris, Colin, 1921.

Henry Fairfield Osborn. L'Origine et l'évolution de la vie. Un vol. de XXXV-304 pages (24 × 16). Traduction française de Félix Sartiaux. Paris, Masson, 1921.

R. P. V. Fallon, S. J. Principes d'économie sociale. Ouvrage honoré d'une lettre de Son Éminence le Cardinal Mercier. Un vol. de XII-392 pages (22 × 14). Louvain, Bomans, 1921.

Paul Féron-Vrau. Trente ans d'action catholique sur le terrain social. L'Association catholique des patrons du Nord. Un vol. de 128 pages (in-8°). Paris, Bonne Presse, 1921.

Auguste Forel. Le monde social des Fourmis. Tome I : Genèse, formes, anatomie, classification, géographie, fossiles. Un vol. de XIV-192 pages (21 × 14). Genève, Kundig, 1921.

Max Franck. La loi de Newton est la loi unique. Un vol. de 158 pages (25 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

James George Frazer. Adonis. Étude des religions orientales comparées. Un vol. de VII-316 pages (25 × 16). Traduction française par Lady Frazer. Paris, Geuthner, 1921.

Sigm. Freud (Dr). Introduction à la Psychanalyse. Traduit de l'allemand avec l'autorisation de l'auteur par le Dr S. Jankélévitch. Un vol. de 484 pages (23 × 14). Paris, Payot, 1921.

Maurice Gandillot. Éther ou Relativité. Un vol. de XIV-84 pages (18 × 11). Paris, Gauthier-Villars, 1922.

Edmond Goblot. Le Système des Sciences. Le Vrai, l'Intelligible et le Réel. Un vol. de 259 pages (19 × 12). Paris, Colin, 1922.

P.G.A. Goedhart. The spiral orbit in Celestial mechanics. Un vol. de 11 pages (22 × 14). New-York, 1921.

P.G.A. Goedhart. L'Orbite en spirale dans la mécanique céleste. Deuxième introduction de l'Astronomie Mathématique Analytique, (A.M.A.). Un vol. de 10 pages (35 × 21). Goedhart, Amsterdam, 1921.

Jos. Goedseels. La personnalité civile des associations sans but lucratif et des établissements d'utilité publique. Commentaire théorique et pratique de la loi du 27 juin 1921. Un vol. de 434 pages (25 × 17). Bruxelles, Hauchamps, 1921.

Fr.Guermonprez. Au Congrès médical Franco-Polonais de Varsovie. Impressions et Souvenirs. Un vol. de 36 pages (22 × 13). Lille, Société An. d'Imprimerie et d'Éditions, 1921.

Ign. Guidi. L'Arabe Antéislamique. Quatre conférences données à l'Université égyptienne du Caire, en 1909. Un vol. de 88 pages (17 × 11). Paris, Geuthner, 1921.

C. Gutton. Télégraphe et Téléphone sans fil. Un vol. de II-188 pages (17 × 11) de la Collection Armand Colin. Paris, Colin, 1922.

J. Haag. Cours complet de Mathématiques spéciales. Tome I : Algèbre et Analyse. Un vol. de VI-402 pages (25 × 16), avec 44 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1914.

J. Haag. Cours complet de Mathématiques spéciales. Tome II : Géométrie. Un vol. de VII-662 pages (26 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Haldane (Vicomte). Le Règne de la Relativité. Traduction française par Henry de Varigny. Un vol. de XXVI-590 pages (26 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1922.

Max Hauptmann. Le crédit après la Guerre. Un vol. de 31 pages (25 × 16). Bruxelles, Société Belge d'Économie sociale, 1921.

Joseph Hazzidakis. Étude de Préhistoire crétoise. Tylissos à l'époque minoenne, suivi d'une note sur les Larnax de Tylissos. Un vol. de 86 pages (28 × 19), avec 48 fig. et 10 planches hors texte. Paris, Geuthner, 1921.

W. H. Holmes. Handbook of aboriginal american Antiquities. Part I : Introductory to the lithic Industries. Un vol. de XVIII-380 pages (24 × 15). Washington, Government Printing Office, 1919.

R. P. Hoornaert. S. J., C. Declairfayt, Docteur en méd., **A. Hoornaert**, avocat. Baptême d'urgence pour raisons médicales. Un vol. de 12 pages (19 × 11). Bruxelles, Action Catholique, 1922.

Émile Hovelaque. Les Peuples d'Extrême-Orient. Le Japon. Un vol. in-18 de 344 pages, de la Bibliothèque de Philosophie scientifique. Paris, Flammarion, 1921.

Pierre Humbert, professeur à l'Université de Montpellier. Introduction à l'étude des fonctions elliptiques. Un vol. de 40 pages (24 × 16). Paris, Hermann, 1922.

Charles Janet. Note préliminaire sur l'Orthobionte des Characées. Un vol. de 18 pages (25 × 16). Beauvais, Dumontier et Hagué, 1922.

Charles Janet. Considérations sur l'être vivant. Volume II : l'Individu, la sexualité, la parthénogénèse et la mort, au point de vue orthobiontique. Un vol. de 193 pages (26 × 16). Beauvais, Dumontier, 1921.

P. Janet. Problèmes et exercices d'électricité générale. Un vol. de VII-253 pages (24 × 14). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

[C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard. Œuvres de G.-H. Halphen. Tome III, avec collaboration de E. Vessiot. Un vol. de XII-518 pages (25 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

André Kling. Méthodes actuelles d'expertises employées au Laboratoire municipal de Paris et documents sur les matières relatives à l'alimentation. Tome I : Produits animaux. Conserves. Salaisons et produits conservés. Un vol. de VIII-326 pages (25 × 16), avec 18 fig. et 8 planches en couleurs. Paris, Dunod, 1921.

André Kling. Méthodes actuelles d'expertises employées au Laboratoire municipal de Paris et documents sur les matières relatives à l'alimentation. T. IV : Produits végétaux et dérivés. Un vol. de 464 pages (25 × 17). Paris, Dunod, 1922.

André Kling, Directeur au Laboratoire de Paris. Les progrès de la Chimie en 1919. Un vol. de 326 pages (23 × 14). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Dr. V. Kommerell et Dr. K. Kommerell. Allgemeine Theorie des Raumkurven und Flächen. Deux vol. T. I, de 184 pages ; t. II, de 136 pages (18 × 13). Berlin, de Gruyter, 1921.

G. Lacour-Gayet. Bonaparte, membre de l'Institut. Un chapitre du Centenaire de Napoléon. Un vol. de II-93 pages in-8°, avec 16 illustrations hors texte. Paris, Gauthier-Villars, 1921.

J. M. Lahy. Le système Taylor et la Physiologie du Travail professionnel. Un vol. de 216 pages (19 × 12), de la Bibliothèque Française du chef de l'industrie, avec 16 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Marcel Lamotte. Cours de Mécanique appliquée. Un vol. de 279 pages (26 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1922.

P. Landesque. Hydrologie et Hydroscopie. Un vol. de XVI-235 pages (24 × 16). Paris, Dunod, 1921.

Pierre-Simon Laplace. Essai philosophique sur les probabilités. Vol. I, de XI-103 pages ; vol. II, de 108 pages (18 × 11), Paris, Gauthier-Villars, 1921.

J. Larguier des Bancels. Introduction à la Psychologie. L'Instinct et l'Émotion. Un vol. de 187 pages (23 × 20). Paris, Payot, 1921.

L. De Launay. Géologie de la France. Un vol. de 501 pages (14 × 23). Paris, Colin, 1921.

L. De Launay. Où en est la géologie. Un vol. de VI-203 pages (20 × 12). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Maurice Lecat. Bibliographie des séries trigonométriques avec un appendice sur le calcul des variations. Un vol. de VIII-167 pages (25 × 16). Louvain-Bruxelles, Lecat, 1921.

Henri Lechat. La Sculpture grecque. Un vol. de 154 pages (16 × 11), de la Collection Payot. Paris, Payot, 1922.

E.-M. Lémeray. L'Éther actuel et ses précurseurs (simple récit). Un vol. de IX-141 pages (19 × 12), avec préface de L. Lecornu, membre de l'Institut. Paris, Gauthier-Villars, 1922.

A.-P. Lemercier. Les Pensées de Marc-Aurèle. (Traduction). Un vol. de XXIV-191 pages (18 × 12). Paris, Alcan, 1921.

Paul Lemoine. Traité pratique de Géologie (d'après James Geikie : Structural and Field Geology). Un vol. de VI-543 pages (25 × 16). Avec 215 figures et 60 planches. Paris, Hermann, 1922.

Joseph Lévine. Atlas météorologique de Paris. Un vol. de VI-83 pages (33 × 25). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Léon Lévrier. Les Forces médiumniques ; conférences de M. le Pr. Pascal sur ses recherches dans l'inconnu. Un vol. de 85 pages. (18 × 13). Poitiers, Nicolas, 1921.

L. Lévy-Brühl. La mentalité primitive. Un vol. de III-537 pages (23 × 14). Collection de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine. Paris, Alcan, 1922.

André Longuet. L'origine commune des religions. Un vol. de VI-196 pages (26 × 16). Paris, Alcan, 1921.

Giuseppe de Lorenzo. Leonardo da Vinci e la Geologia. Un vol. de 196 pages (24 × 16). Bologna, Zanichelli, 1921.

Paul Lorquet. L'Art et l'Histoire. Un vol. de 300 pages (19 × 14). Paris, Payot, 1922.

Pierre Louis. La T.S.F. par les tubes à vide. Un vol. de 143 pages (23 × 14). Paris, Vuibert, 1920.

Auguste Lumière. Rôle des Colloïdes chez les Êtres vivants. Essai de Biocolloïdologie. Nouvelles Hypothèses dans le domaine de la Biologie et de la Médecine. Un vol. de VIII-311 pages (19 × 14). Paris, Masson, 1921.

R.A.S. Macalister, Litt. D., F.S.A. A text-book of European Archeology. Un vol. de XV-700 pages (25 × 17). Cambridge, University Press, 1921.

Henri Mager. Les Baguettes des Sourciers et les Forces de la nature. Un vol. de XI-423 pages (21 × 14), avec 197 figures. Paris, Dunod, 1921.

Th. Mainage. La Religion spirite. Un vol. de 188 pages (19 × 14). Paris, « La Revue des Jeunes ».

Henri Malet. Étude géométrique des Transformations birationnelles et des Courbes planes. Un vol. de 262 pages (25 × 16), avec 111 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Maurice Manquat. Les tropismes dans le comportement animal. Historique et critique de la question. Un vol. de XVII-232 pages (25 × 17). Nancy, Vagner, 1921.

L. Maquenne. Précis de physiologie végétale. Un vol. de 175 pages (16 × 10), de la Collection Payot, avec 4 figures dans le texte. Paris, Payot, 1922.

L. March, J. Moret, R.G. Hawtray, Ch. Gide, A. Aftalion, E. Baronne, Augé-Larilé, Ch. Rist, Max-Lazard, Dugé de Bernonville. Problèmes actuels de l'Économique. Un vol. de VI-477 pages (25 × 16), numéro spécial de la Revue de Métaphysique et de Morale. Paris, Colin, 1921.

F. Marquet. Histoire de la Longitude à la Mer au XVIIIe siècle, en France. Un vol. de X-227 pages (25 × 16). Paris, Challomel, 1917.

Georges Matisse. Le mouvement scientifique contemporain en France. I. Les sciences naturelles. Un vol. de 160 pages (16 × 11), de la Collection Payot, relié avec 25 figures dans le texte. Paris, Payot, 1921.

P. Maurer. Manuel de l'Électricien. Installations particulières. Éclairage, Chauffage, Sonneries, Tableaux, Indicateurs. Un vol. de 274 pages (16 × 10), avec 147 figures. Paris, Baillière, 1921.

Emile Meyerson. De l'Explication dans les Sciences. Un vol. de XV-338 pages et un vol. de 469 pages in-8°. Paris, Payot, 1921.

Gustave Mie. La Théorie Einsteinienne de la Gravitation. Un vol. de XI-118 pages (19 × 12). Paris, Hermann, 1922.

Gaston Milhaud. Descartes savant. Un vol. de 250 pages in-8°, de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine. Paris, Alcan, 1921.

Marin Molliard. Nutrition de la Plante. Formation des Substances ternaires. Un vol. de 450 pages in-16, avec 88 figures dans le texte, de l'Encyclopédie scientifique. Paris, Doin, 1921.

Marin Molliard. Nutrition de la Plante. Échanges d'eau et de substances minérales. Un vol. de VI-395 pages in-16, avec 46 figures dans le texte, de l'Encyclopédie scientifique. Paris, Doin, 1921.

L'abbé Th. Moreux. Pour comprendre l'Arithmétique. Un vol. de 251 pages (18 × 11), de la Bibliothèque d'Éducation scientifique. Paris, Doin, 1921.

L'abbé Th. Moreux. Pour comprendre l'Algèbre. Un vol. de 251 pages (18 × 11), de la Bibliothèque d'Éducation scientifique. Paris, Doin, 1921.

L'abbé Th. Moreux. Petit formulaire mathématique. Tables de Logarithmes et tables diverses. Un vol. de 90 pages (18 × 11). Paris, Doin, 1922.

L'abbé Th. Moreux. Origine et formation des Mondes. Un vol. de XII-401 pages (23 × 14). Paris, Doin, 1922.

Dott. Quiscardo Moschetti. Il sole. Sinossi di una lezione di Geografia Astronomica. Un vol. de 26 pages (22 × 16). Cremonesse, Cremona, 1920.

W. Nernst. Traité de Chimie générale. T. I : Propriétés générales des Corps. Atome et molécule. Un vol. de VII-620 pages (26 × 16), Traduction française par A. Corvisy. Paris, Hermann, 1922.

E. H. Neville. The fourth dimension. Un vol. de 56 pages (21 × 14). Cambridge, University Press, 1921.

Charles Nordmann. Einstein et l'Univers. Une lueur dans le mystère des choses. Un vol. de 223 pages (19 × 14). Paris, Hachette, 1921.

Robert Nussbaum. Nos fils seront-ils enfin des hommes ? Note d'un éducateur spiritualiste. Un vol. de 115 pages (18 × 13). Paris, Alcan, 1921.

Julien Pacotte. La Physique théorique moderne, avec une Préface de M. Émile Borel, membre de l'Institut. Un vol. de VIII-182 pages (25 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

D. Parodi. Le Problème moral et la pensée contemporaine. Un vol. in-8° de 300 pages, de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine. Paris, Alcan, 1921.

Blaise Pascal. Œuvres. Collection : Les Grands Écrivains de la France. Vol. VII, de 331 pages ; vol. VIII, de 386 pages ; vol. IX, de 398 pages (23 × 14). Paris, Hachette, 1914.

Fr. Paulhan. Le mensonge du monde. Un vol. de 362 pages (23 × 14). Paris, Alcan, 1921.

Branislaw Petronievics. L'Évolution universelle. Un vol. de VIII-212 pages (20 × 13). Paris, Alcan, 1921.

Michel Pétrovitch. Mécanismes communs aux phénomènes disparates. Un vol. de 279 pages (18 × 12), de la Nouvelle Collection scientifique. Paris, Alcan, 1921.

Émile Picard. La théorie de la relativité et ses applications à l'Astronomie. Un vol. de 27 pages (17 × 12). Paris, Gauthier-Villars, 1922.

Roger Picard. Le Contrôle ouvrier sur la gestion des entreprises. Un vol. de 280 pages (19 × 12). Paris, Rivière, 1922.

Dr. Joseph Plaszmann. Jahrbuch der angewandten Naturwissenschaften (1919-1920). Un vol. de XIII-394 pages (25 × 16). Freiburg, Herder, 1921.

J. Poirée. Précis d'Arithmétique. Un vol. de V-64 pages (25 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Gino Pollacci (Dr). Atti dell' Istituto Botanico dell' Universita di Pavia. Vol. XVII, fasc. 1, 2, 3, 4, 5. Milano, 1920.

J.-B. Pomey. Analogies mécaniques de l'Électricité. Un vol. de XIV-152 pages (25 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Henri Pons. Relation d'une épidémie de Fièvre méditerranéenne. Un vol. de 76 pages (24 × 15). Toulouse, Dirion, 1921.

Morton Prince, M.D., L.L.D. The Unconscious. The fundamentals of human personality normal and abnormal. Un vol. de XIII-549 pages (20 × 13). New-York, Mac Millan C°, 1916.

R. Quénon. Introduction générale à l'étude des doctrines Hindoues. Un vol. de 346 pages (23 × 14). Paris, Rivière, 1921.

Étienne Rabaud. L'Hérédité. Un vol. de 190 pages in-16, illustré, de la Collection Armand Colin. Paris, Colin, 1921.

Étienne Rabaud. Éléments de Biologie générale. Un vol. de XI-444 pages (22 × 14). Paris, Alcan, 1921.

W.H.R. Rivers, M.D., D. Sc., L.L.D., F.R.S. Instinct and the unconscious. A contribution to a biological theory of the psychoneuroses. Un vol. de VIII-252 pages (22 × 18). Cambridge, University Press, 1920.

R. P. Luis Rodes, S. J. Instituciones cientificas de los Estados Unidos. Un vol. de 124 pages (27 × 21). Barcelona, 1921.

J.-H. Rosny, ainé. Les Sciences et le Pluralisme. Un vol. de 217 pages (19 × 12), de la Nouvelle Collection scientifique. Paris, Alcan, 1922.

J. Rouelle (Colonel). La Fonte. Élaboration et travail. Un vol. de 192 pages (18 × 11), de la Collection Armand Colin. Paris, Colin, 1921.

Louis Rougier. La Structure des Théories déductives. Un vol. in-16 de 136 pages, de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine. Paris, Alcan, 1921.

Louis Rougier. La Matière et l'Énergie selon la Théorie de la Relativité et la Théorie des Quanta. Un vol. de XI-112 pages (25 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Henri Rousset et Ernest Hannouille. L'Habitation humaine à travers les siècles. Un vol. de 96 pages in-8°, de la Collection Scientifique. Paris, Bonne Presse, 1921.

Louis Roy. Cours de Mécanique. Tome I : Cours de mécanique rationnelle à l'usage des élèves de l'Institut électrotechnique et de mécanique appliquée et des Candidats au certificat de mathématiques générales. Un vol. de VI-260 pages (25 × 16), avec 103 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1921.

V. Scheil. Recueil de lois assyriennes. Texte assyrien en transcription avec traduction française et index. Un vol. de 125 pages (28 × 19). Paris, Geuthner, 1921.

Theodor Schmid. Darstellende Geometrie. Un vol. de 278 pages et un vol. de 315 pages (19 × 13). Berlin, de Gruyter, 1921.

Ernest Seillère. La morale de Dumas fils. Un vol. de XI-168 pages (19 × 12), de la Collection des Grands Philosophes. Paris, Alcan, 1921.

Pol Simon. La recherche des lieux géométriques en géométrie analytique, à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales et des Étudiants des Instituts scientifiques des Facultés des Sciences. Un vol. de VIII-232 pages (22 × 16). Paris, Colin, 1922.

A. Smits (Dr). Die Theorie der Allotropie. Un vol. de XVI-500 pages (24 × 15), avec 239 figures dans le texte. Leipzig, Barth, 1921.

Charles Proteus Steinmetz, A. M., Ph. D. L'Industrie électrique. Un vol. de 195 pages (25 × 16) avec 50 figures. Traduction française par Benjamin Giraud, Ingénieur E.S.E. Paris, Gauthier-Villars, 1921.

B. H. Streeter, M.A. (Oxon.), **Hon. D.D.** (Edin.) **et A.J. Appasamy, B. A.** (Madras), **M. A.** (Harvard), **B.D.** (Hartford). The Sadhu. A study in mysticism and practical religion. Un vol. de 264 pages (19 × 12). London, Mac Millan and C°, 1921.

Edm. Tassy et Pierre Léris. Les ressources du Travail Intellectuel en France. Un vol. de XVIII-711 pages (23 × 14). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

James Thayer Gerould, B.A. Sources of English History of the seventeenth Century 1603-1689 in the University of Minnesota Library with a selection of secondary material. Un vol. de 565 pages (25 × 17). University of Minnesota, 1921.

Sir J.-J. Thomson. Électricité et matière. Un vol. de VIII-131 pages (17 × 12). Traduit de l'anglais par Maurice Solovine. Paris, Gauthier-Villars, 1922.

J. Tillieux. Leçons élémentaires de Physique expérimentale selon les Théories modernes. Fasc. I. Un vol. de VIII-219 pages (24 × 17). Louvain, Ceuterick, 1922.

Pierre Tisserand. Œuvres de Maine de Biran accompagnées de notes et d'appendices, publiées avec le concours de l'Institut de France. Tome II : Influence de l'habitude sur la faculté de penser. Un vol. de LXXIII-364 pages (23 × 14). Paris, Alcan, 1922.

Leonida Tonelli. Fondamenti di calcolo delle Variazioni. Un vol. de VII-466 pages (24 × 15). Bologna, Zanichelli, 1921.

F.-P. Treadwell. Manuel de Chimie Analytique, en deux tomes. Revu et refondu par Marcel Boll. Tome I : Analyse Qualitative, XX-612 pages ; Tome II : Analyse Quantitative, XX-810 pages (21 × 14). Paris, Dunod, 1920.

Arnold Van Gennep. Traité comparatif des Nationalités. Tome I : Les éléments extérieurs de la nationalité. Un vol. de 228 pages (23 × 14). Paris, Payot, 1921.

J. Varendonck. L'évolution des facultés conscientes. Un vol. de 203 pages (24 × 16). Gand, Vanderpoorten, 1921.

Adolfo Venturi. Leonardo da Vinci pittore. Un vol. de 196 pages (24 × 16). Bologna, Zanichelli, 1921.

Lionello Venturi. La Critica e l'arte di Leonardo da Vinci. Un vol. de 205 pages (24 × 16). Avec reproductions dans le texte. Bologna, Zanichelli, 1921.

Paul Verola. Chimie et Fabrication des Explosifs. Un vol. de VI-202 pages (18 × 11), de la Collection Armand Colin. Paris. Colin, 1922.

A. Vierendeel. Esquisse d'une histoire de la Technique. Vol. I, de 188 pages et vol. II de 200 pages (19 × 12). Bruxelles, Vromant, 1921.

J. Villey. Physique élémentaire et théories modernes. I. Molécules et atomes. États d'équilibre et équilibre de la matière. Un vol. de X-198 pages (25 × 16), avec 23 fig. Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Pierre Villey. Essais de Montaigne. T. I. Un vol. de XXVIII-422 pages (19 × 12). Paris, Alcan, 1922.

P. Vivier. De la Lumière au Son. Un vol. de 104 pages in-8°, avec nombreuses figures. Paris, Mendel, 1921.

Dr. A. Wangerin. Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Volume II. Un vol. de 286 pages (19 × 13). Berlin, de Gruyter, 1921.

Howard C. Warren. A History of the Association Psychology. Un vol. de IX-329 pages (21 × 14). Londres, Constable, 1921.

Erich Wasmann, S. J. Haeckels Monismus eine Kulturgefahr. Un vol. de X-111 pages (18 × 12). Freiburg, Herder, 1919.

Erich Wasmann, S. J. Die Probleme in der Gastpflege der Ameisen. Une broch. de 24 pages (24 × 14). Tiré à part du livre : Stimmen der Zeit. Freiburg, Herder, 1921.

Erich Wasmann, S. J. Der Christliche Monismus. Zeitgemässe Betrachtungen über christlichen Glaubenswahrheiten. Un vol. de IX-105 pages (17 × 11). Freiburg, Herder, 1920.

Erich Wasmann, S. J. Die Gastpflege der Ameisen, ihre biologischen und philosophischen Probleme. Beitrag zur Kenntnis der Myrmecophilen und Termitophilen. Un vol. de xvii-176 pages (25 × 17). Berlin, Borntraeger, 1920.

Dr. Erich Wasmann, S.J. Ideale Naturauffassung einst und jetzt. Un vol. de 25 pages (25 × 19). Freiburg, Herder, 1920.

H. Weil. Temps, Espace, Matière. Leçons sur la théorie de la relativité générale. Traduction française par Gustave Juvet, Professeur à l'Université de Neuchâtel et Robert Leroy, ancien élève de l'École normale supérieure. Un vol. de 290 pages (24 × 16). Paris, Blanchard, 1922.

Herman Weyl. Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Un volume de 300 pages (24 × 14). Berlin, Springer, 1921.

Joseph Wilbois. La nouvelle éducation française. Un vol. de 404 pages (19 × 12). Paris, Payot, 1922.

Edward J. Willis, M. E. The Mathematics of navigation. Un vol. de 34 pages (21 × 14). Richmond, Fergusson, 1921.

Abou Yousof Ya Koub. Le livre de l'Impôt Foncier. (Kitab-El-Kharâdj). Un vol. de xvi-352 pages (25 × 16) de la Bibliothèque archéologique et historique, traduit par E. Fagnan. Paris, Geuthner, 1921.

Afinidad. Première Année, num. 1.

Annuario do Collegio Pedro II. Vol. IV (1919-1920). Un vol. de xxxvii-415 pages (23 × 16). Rio de Janeiro. « Revista dos Tribunaes ». 1921.

Boletin de Agricultura, Industria y Comercio de Guatemala.

Organo de la Secretaria de agricultura. 1921. Num. 1.

Boletin de la Confederacion de Camaras industriales. Revista Mensual. Mexico, Mai 1921.

Boletin de la Escuela Normal de Varones. Un vol. de 75 pages (27 × 13). Honduras.

Comité National de Secours et d'Alimentation. Rapport général. Le Département d'Alimentation. Tome premier. Appendice, Annexes de 1 à 40. Vol. I, de 413 pages ; vol. II, de 252 pages ; vol. III, de 442 pages et vol. IV, de 507 pages (34 × 21). Bruxelles, Vromant, 1921.

A la mémoire du Docteur Henry Duret (7 juillet 1849-7 avril 1921). Journal des Sciences médicales, Lille, nº 17, 39^e^ année, 24 avril 1921. Un vol. (21 × 14).

El Sismografo « Berchmans » de la estacion sismologica de Cartuja (Granada). Une brochure de 8 pages (21 × 15). Sevilla, Eulogio de las Nevas, 1921.

University of Sydney. Reprints of papers from the science Laboratories.

II. PÉRIODIQUES

Académie des Sciences (Paris) : Comptes rendus hebdomadaires.
Académie royale de médecine de Belgique : Bulletin, Mémoires.
Annuaire pour l'année 1922, publié par le Bureau des Longitudes.
L'Anthropologie.
Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liége.
Annuaire. — Bulletin.
L'Astronomie.
Bulletin de la Section scientifique de l'Académie Roumaine.
Bulletin de la Société centrale forestière de Belgique.
Bulletin de la Société chimique de Belgique.
Bulletin de la Société royale belge de Géographie.
Bulletin de la Société royale de Botanique de Belgique.
Bulletin de la Société médicale Saint-Luc.
Bulletin Technique.
Le Canada Français.
Ciel et Terre.
L'Enseignement mathématique.
Études.
France-Belgique.
Institut international d'Agriculture (Rome) : Bulletin.
Journal de l'École Polytechnique.
Journal de Physique et Radium.
Journal des Sciences médicales de Lille.
Livres et Revues.
Observatoire royal de Belgique : Annuaire, Annales, Bulletins météorologiques, Bulletins sismiques.
Observatoire de Paris : Bulletins astronomiques.
Œuvre internationale de Louvain.
Polybiblion.
Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masarik.
Revue de Philosophie.
Revue des Sciences philosophiques et théologiques.
Revue générale.
Revue générale des Sciences.
Revue Montalembert.
Revue Néo-Scolastique.
Revue Scientifique.
Revue semestrielle des Publications mathématiques.
Le Scalpel.
Scientia.
Société des Sciences de Nancy : Bulletin.
Société française de Physique : Résumé des Communications.
Société géologique de Bruxelles : Annales.
Société mathématique de France : Bulletin.
Union des ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Louvain.
Université de Rennes : Travaux scientifiques.
Université de Toulouse : Annales de la Faculté des Sciences.
Ministerie van Landbouw, Nijverheid en Handel : Handelsberichten; Economische verslagen.
Nieuw Archief voor Wiskunde.
Wiskundige opgaven met de oplossingen.
Boletin de la Sociedad iberica de Ciencias naturales.

Boletin del Instituto geologico de Mexico.
Boletin mensual del Observatorio del Ebro.
Razon y Fe.
Revista de la Academia de Ciencias, Zaragoza.
Sociedad cientifica « Antonio Alzate » : Memorias y Revista.
Archivio italiano di psicologia.
Archivio di storia della Scienza.
Atti della Reale Accademia dei Lincei.
Civiltà cattolica.
Gregorianum.
L'Opera Cardinal Ferrari.
Rivista di filosofia Neo-Scolastica.
Rivista internazionale di Scienze sociali e discipline ausiliarie.
La Scuola Cattolica.
Specola astronomica vaticana.
Vita e Pensiero.
America.
The American catholic Quarterly Review.
American Journal of Mathematics.
American Mathematical Society : Bulletin.
American Museum of Natural History : Bulletin.
Annual Report ot the Smithsonian Institution.
The Astrophysical Journal.
The Catholic World.
Colorado College : Publications.
Illustrated World Magazine.
Journal of Geology.
The Month.
Missouri Botanical Garden.
New South Wales : Report of the Government.
New Zealand official Year Book.
Nova Scotian Institute of Science.
The Physical Review.
Publications of the Dominion observatory Ottawa.
Publications of the Lick Observatory.
Report of the Michigan Academy of Science.
Royal Society of Edimbourg : Proceedings, Transactions.
Stonyhurst College Observatory : Results of observations.
Studies.
University of California Publications : Astronomy, Physiology, Zoology.
University of Kansas : Science bulletin.
University of Illinois : Monographs.
University of Nebraska : Publications.
Yale University : Transactions.
Bayerische Akademie der Wissenschaften : Abhandlungen.
Naturwissenschaften.
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft Basel.
Annaes scientificos da Academia polytechnica di Porto.
Bibliotheca Nacional do Rio de Janeiro : Annaes.
Broteria.
Observatorio Nacional do Rio de Janeiro : Annuario.
Antikvarisk Tidskrift.
Fundamenta Mathematicae.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Thermodynamique

Sur les propriétés des fluides au voisinage de l'état critique

PAR

E. ARIÈS
Correspondant de l'Institut

CHAPITRE PREMIER

PROPRIÉTÉS DES FLUIDES A L'ÉTAT DE SATURATION AU VOISINAGE DU POINT CRITIQUE

1. Les deux hypothèses servant de base à cette étude.

L'ensemble des phénomènes de la vaporisation d'un liquide se représente, à l'ordinaire, par le tracé des isothermes, des adiabatiques et de la courbe de saturation, en prenant pour abscisses les volumes v occupés par le fluide et pour ordonnées les pressions qu'il supporte. Je supposerai connues les règles suivant lesquelles

les isothermes et les adiabatiques se succèdent ou se coupent, et traversent la courbe de saturation.

A l'intérieur de cette courbe, les isothermes sont rectilignes, parallèles à l'axe des volumes, et forment ce que Sarrau appelait la droite de liquéfaction. Les extrémités A et B de cette droite se rapprochent à mesure qu'elle s'élève avec la température et la pression, parce que, d'après les faits observés, le poids spécifique de la vapeur saturée augmente constamment, tandis que celui du liquide diminue. Ce rapprochement continue jusqu'à ce que les points A et B se confondent en un point unique C, caractérisant l'état critique du corps.

La courbe de saturation sépare ainsi deux régions du plan. Dans la région intérieure, le fluide peut exister simultanément sous deux états distincts, liquide et gazeux, en proportions variables à une même température et à une même pression. Dans la région extérieure, un seul volume du corps entièrement homogène correspond à une température et à une pression déterminées. Quel que soit le trajet de la ligne représentative d'une transformation, il est impossible d'apercevoir une condensation ou une vaporisation, tant que ce trajet n'arrive pas à traverser la courbe de saturation. La pression p et l'entropie S sont des fonctions parfaitement déterminées du volume v et de la température T, jusqu'à l'état limite représenté par un point quelconque de la courbe de saturation.

A cet état limite, la pression p, le volume v et l'entropie S deviennent des fonctions de la température seule. La pression p est alors la tension de vapeur saturée que j'appellerai P ; u, s et $m = \mathrm{T}\frac{\partial s}{\partial \mathrm{T}}$, ou u', s' et $m' = \mathrm{T}\frac{\partial s'}{\partial \mathrm{T}}$ sont le volume spécifique, l'entropie et la chaleur spécifique du fluide maintenu à l'état de saturation, suivant que ce fluide sera à l'état liquide ou à l'état de vapeur ; $\mathrm{L} = \mathrm{T}(s' - s)$ sera la chaleur de vaporisation.

Le principe de la continuité entre l'état liquide et l'état de vapeur, qui entraîne l'identité des deux états au point critique, oblige à considérer la courbe de saturation comme ayant une forme continue, sans que la direction de sa tangente puisse subir une brusque variation au passage du point critique ; et lorsque les extrémités de la droite de liquéfaction viennent se confondre, la ligne isotherme, devenue continue, présente au point critique une inflexion avec tangente parallèle à l'axe des volumes, et l'on a :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T = 0.$$

La chaleur de vaporisation d'un liquide est régie par la formule de Clapeyron :

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{s' - s}{u' - u} = \frac{\Delta s}{\Delta u} = \frac{T(u' - u)}{L}$$

Δs et Δu étant les augmentations que subissent l'entropie et le volume quand le corps passe, à température et pression constantes, de l'état entièrement liquide à l'état entièrement de vapeur saturée.

C'est un fait bien établi que la vaporisation d'un liquide s'opère toujours avec absorption de chaleur et augmentation de volume. L et $u' - u$ sont positifs ; il en est donc de même pour $\frac{\partial P}{\partial T}$, en sorte que la tension de vapeur saturée croît toujours avec la température. Il semble même, d'après les faits observés, que $\frac{\partial P}{\partial T}$ soit non seulement positif, mais aille toujours en croissant avec la température, sans toutefois devenir infini, en sorte que la courbe représentant la tension de vapeur saturée en fonction de la température serait toujours concave vers l'axe des tensions P, et que $\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}$ serait constamment positif jusqu'à la température critique.

On ne connaît pour aucun corps, d'une façon précise, la valeur limite de $\frac{\partial P}{\partial T}$. Mais il y en a un très grand nombre pour lesquels, non seulement les tensions P_c et T_c de l'état critique, mais encore les tensions très voisines ont été déterminées par des expériences dignes de confiance. Le rapport $\frac{P_c - P}{T_c - T} = \frac{\Delta P}{\Delta T}$ donne, pour ces corps, une valeur approchée du coefficient $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_c$. Tous les exemples connus fixent à ce rapport une valeur bien nettement finie.

Dans l'étude qui va suivre je ne m'appuierai que sur deux hypothèses dont la validité est à considérer comme suffisamment établie par les faits d'expérience.

1° ΔP et ΔT étant les variations corrélatives et très petites de la tension de vapeur et de la température, au voisinage immédiat de l'état critique, on a :

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta P}{\Delta T} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_c = a \tag{2}$$

a étant une quantité positive qu'on ne peut supposer ni nulle ni infinie.

2° La courbe de saturation présente, avec sa tangente au point critique, un contact de premier ordre.

2. Coefficients qui deviennent infinis à la température critique. Rapports finis qui existent entre eux.

Il résulte de la première hypothèse, suivant la formule de Clapeyron, d'abord que la chaleur de vaporisation d'un liquide s'annule à la température critique

$$L_c = 0 \tag{3}$$

ensuite que ΔP et ΔT sont des infiniment petits de même ordre, ainsi que Δs et Δu.

Mais l'ordre de ces derniers diffère du précédent. C'est ce qu'établit la deuxième hypothèse, en vertu de laquelle on a :

$$k_1 \Delta P = (\Delta u)^2 \tag{4}$$

ce qui entraîne :

$$k_2 \Delta T = (\Delta s)^2 \tag{5}$$

k_1 et k_2 étant des quantités positives et finies. On voit que ΔP et ΔT sont des infiniment petits du deuxième ordre par rapport à Δu ou Δs.

Des formules (2), (4) et (5), on tire la relation :

$$\frac{k_2}{k_1} = a^3 \tag{6}$$

On peut donner de l'état de saturation une autre représentation graphique qu'il est utile de connaître, et qui consiste à regarder l'entropie s ou s' comme l'ordonnée d'une courbe dont l'abscisse serait la température correspondante. La forme générale de la courbe au voisinage de l'état critique sera celle représentée par la figure 2. La partie AC correspondant à l'état liquide, et la partie CB correspondant à l'état de vapeur.

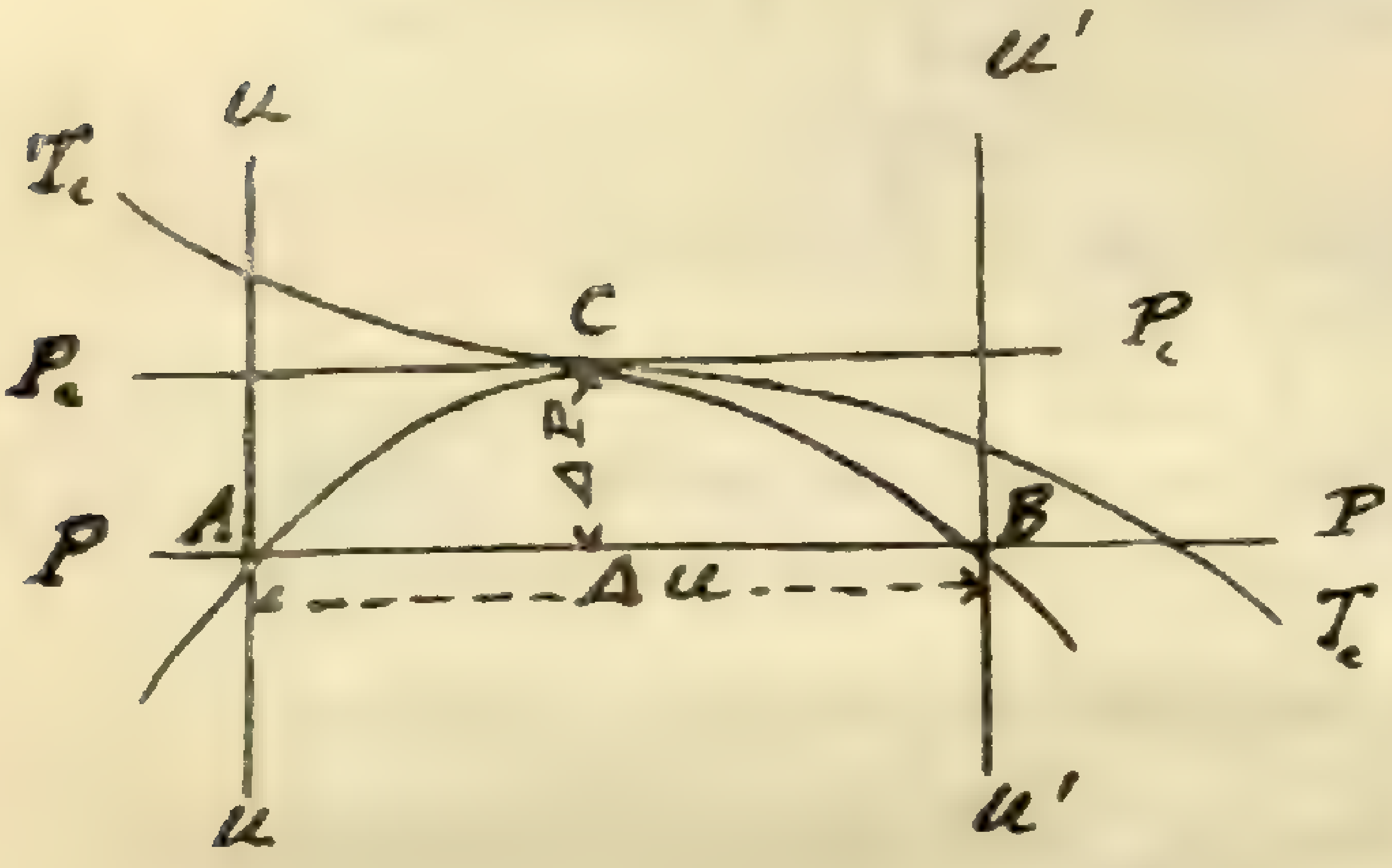


FIG. 1.

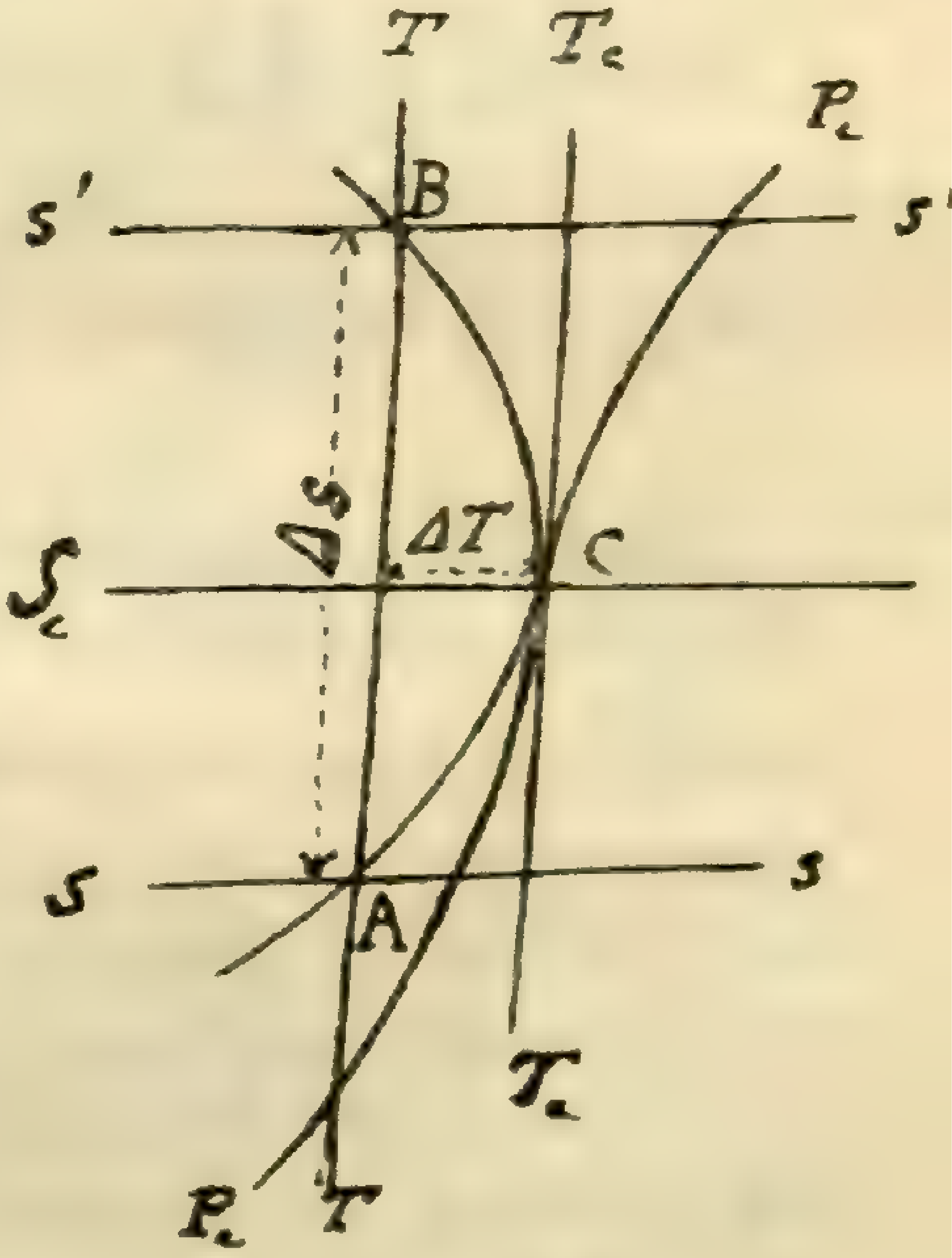


FIG. 2.

En vertu de la condition (5), cette courbe ne peut présenter aucune singularité au point critique C. Autour de ce point, la courbe a la même forme que la courbe de saturation de la figure 1, et présente avec sa tangente en ce point, laquelle est parallèle à l'axe des entropies, un contact de même ordre que celui de la courbe de saturation (fig. 1), avec sa tangente parallèle à l'axe des volumes.

En faisant rouler une tangente sur la courbe de la figure 2, on distingue facilement les valeurs par lesquelles passent $\frac{\partial s}{\partial T}$ ou $\frac{\partial s'}{\partial T}$, et, par suite, les chaleurs spécifiques m et m'. On voit qu'au voisinage de l'état critique, m tend vers l'infini positif, m' vers l'infini négatif, et que le rapport $\frac{m}{m'}$ tend vers -1.

$$(7) \qquad m = +\infty \quad , \quad m' = -\infty \quad , \quad \frac{m'}{m} = -1$$

En faisant rouler pareillement une tangente sur la courbe de saturation, figure 1, autour du point critique, on voit que $\frac{\partial u}{\partial P}$ tend vers l'infini positif, $\frac{\partial u'}{\partial P}$ vers l'infini négatif et $\frac{\partial u'}{\partial u}$ vers — 1.

Comme $\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial u}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial T}$, et que $\frac{\partial P}{\partial T}$ tend vers a, on a encore :

$$(8) \qquad \frac{\partial u}{\partial T} = +\infty \quad , \quad \frac{\partial u'}{\partial T} = -\infty \quad , \quad \frac{\frac{\partial u'}{\partial T}}{\frac{\partial u}{\partial T}} = -1$$

L'application de la règle de l'Hôpital à la troisième des formules (7) et (8), application que nous aurons souvent à faire, quand une quantité se présentera sous la forme indéterminée $\frac{o}{o}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, donne encore :

$$(9) \qquad \frac{\frac{\partial m'}{\partial T}}{\frac{\partial m}{\partial T}} = -1 \quad , \quad \frac{\frac{\partial^2 u'}{\partial T^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}} = -1$$

La formule classique, qui découle d'ailleurs des définitions mêmes de m, m' et L

$$(10) \qquad m' - m = T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{L}{T}\right) = \frac{\partial L}{\partial T} - \frac{L}{T}$$

montre, d'après (3) et (7), que l'on a pour $T = T_c$

$$(11) \qquad \frac{\partial L}{\partial T} = -\infty \quad , \quad \frac{m' - m}{\frac{\partial L}{\partial T}} = \frac{\frac{\partial m'}{\partial T} - \frac{\partial m}{\partial T}}{\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}} = 1.$$

De la formule de Clapeyron, dont le second membre se présente sous forme indéterminée à la température critique, on tire successivement, eu égard aux formules (7) à (10),

$$(12) \qquad \frac{\partial P}{\partial T} = a = \frac{\frac{L}{T}}{u' - u} = \frac{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{L}{T}\right)}{\frac{\partial u'}{\partial T} - \frac{\partial u}{\partial T}}$$

$$(13) \qquad = \frac{1}{T_c}\frac{m'-m}{\frac{\partial u'}{\partial T}-\frac{\partial u}{\partial T}} = \frac{1}{T_c}\frac{\frac{\partial m'}{\partial T}-\frac{\partial m}{\partial T}}{\frac{\partial^2 u'}{\partial T^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}}$$

$$(14) \qquad = \frac{1}{T_c}\frac{m'\left(1-\frac{m}{m'}\right)}{\frac{\partial u'}{\partial T}\left(1-\frac{\partial u}{\partial u'}\right)} = \frac{1}{T_c}\frac{m'}{\frac{\partial u'}{\partial T}} = \frac{1}{T_c}\frac{m}{\frac{\partial u}{\partial T}}$$

$$(15) \qquad \frac{\partial P}{\partial T} = a = \frac{1}{T_c}\frac{\frac{\partial m'}{\partial T}}{\frac{\partial^2 u'}{\partial T^2}} = \frac{1}{T_c}\frac{\frac{\partial m}{\partial T}}{\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}}$$

D'après ces formules, les quantités m, m', $\frac{\partial L}{\partial T}$, $\frac{\partial u}{\partial T}$ et $\frac{\partial u'}{\partial T}$ qui deviennent infinies à la température critique, restent toutes, prises deux à deux, dans un rapport déterminé, et sont du même ordre de grandeur. Nous allons définir cet ordre d'une façon plus précise, en prenant $T_c - T$ comme infiniment petit principal.

3. Ordre de grandeur, à la température critique, des coefficients m, m', $\frac{\partial L}{\partial T}$, $\frac{\partial u}{\partial T}$, $\frac{\partial u'}{\partial T}$, et de leurs dérivées.

La formule (4) peut s'écrire :

$$k_1\frac{\partial P}{\partial T} = k_1 a = \frac{(u'-u)^2}{T_c - T}$$

c'est-à-dire :

$$(16) \quad k_1^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = \frac{u'-u}{(T_c-T)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\frac{\partial u'}{\partial T}-\frac{\partial u}{\partial T}}{\frac{1}{2}(T_c-T)^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{\frac{\partial^2 u'}{\partial T^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}}{\frac{1}{4}(T_c-T)^{-\frac{3}{2}}}$$

Les deux dernières égalités peuvent se mettre sous les formes :

$$(17) \qquad \frac{1}{2}k_1^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{\partial u'}{\partial T}-\frac{\partial u}{\partial T}\right)(T_c-T)^{\frac{3}{2}}$$

$$(18) \qquad \frac{1}{2}k_1^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial T^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}\right)(T_c-T)^{\frac{3}{2}}$$

La formule (5) peut s'écrire :

$$k_2(T_c - T) = (s' - s)^2$$

c'est-à-dire :

$$k_2^{\frac{1}{2}} = \frac{s' - s}{(T_c - T)^{\frac{1}{2}}} = \frac{L}{T(T_c - T)^{\frac{1}{2}}} \tag{19}$$

$$= - \frac{m' - m}{\frac{1}{2}T_c(T_c - T)^{-\frac{1}{2}}} = - \frac{\frac{\partial m'}{\partial T} - \frac{\partial m}{\partial T}}{\frac{1}{4}T_c(T_c - T)^{-\frac{3}{2}}}$$

Ces deux dernières égalités peuvent se mettre sous les formes :

$$\frac{1}{2}T_c k_2^{\frac{1}{2}} = -(m' - m)(T_c - T)^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

$$\frac{1}{4}T_c k_2^{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{\partial m'}{\partial T} - \frac{\partial m}{\partial T}\right)(T_c - T)^{\frac{3}{2}} \tag{21}$$

De l'une des formules (17) ou (20), il résulte que le produit par $(T_c - T)^{\frac{1}{2}}$ de $m, m', \frac{\partial L}{\partial T}, \frac{\partial u}{\partial T}, \frac{\partial u'}{\partial T}$ tend vers une valeur finie, quand la température tend vers T_c, ce qui revient à dire que ces coefficients sont, à la température critique, du même ordre de grandeur que $\frac{1}{(T_c - T)^{\frac{1}{2}}}$.

Il faut s'attendre à constater d'après cela que les dérivées de $m, m', \frac{\partial L}{\partial T}, \frac{\partial u}{\partial T}, \frac{\partial u'}{\partial T}$ qui deviennent également infinies à la température critique, sont du même ordre de grandeur que la dérivée de $\frac{1}{(T_c - T)^{\frac{1}{2}}}$, c'est-à-dire du même ordre que $\frac{1}{(T_c - T)^{\frac{3}{2}}}$. C'est bien ce que montre l'une des deux formules (18) ou (21). Ainsi donc les dérivées des coefficients dont il s'agit sont du même ordre de grandeur que les cubes de ces coefficients.

4. Formule empirique donnant la chaleur de vaporisation d'un liquide.

La formule empirique

$$(22) \qquad L = (T_c - T)\left[\alpha \log (T_c - T) + \beta\right] + \gamma (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$$

me paraît particulièrement propre à représenter d'une façon convenable la chaleur de vaporisation d'un liquide. Elle donne de L une valeur imaginaire pour toute température supérieure à la température critique, ce qui est très logique. De plus, elle satisfait à toutes les conditions théoriques qui doivent être remplies à la température critique.

La valeur de L s'annule à cette température.

— $\frac{L}{(T_c - T)^{\frac{1}{2}}}$ tend vers la valeur finie γ, qui représente $T_c k_2^{\frac{1}{2}}$ d'après la formule (19), et qui, par suite, doit être positive.

La dérivée de L

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\left[\alpha \log (T_c - T) + \alpha + \beta + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{(T_c - T)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

tend vers $-\infty$, comme cela doit être, γ étant supposé positif.

$\frac{\partial L}{\partial T}(T_c - T)^{\frac{1}{2}}$ tend vers $-\frac{1}{2}\gamma$, ce qui concorde avec la valeur $-\frac{1}{2} T_c k_2^{\frac{1}{2}}$, exigée par les formules (11) et (20).

La dérivée seconde de L

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T^2} = \frac{\alpha}{T_c - T} - \frac{1}{4} \frac{\gamma}{(T_c - T)^{\frac{3}{2}}}$$

tend vers $-\infty$, $\gamma = T_c k_2^{\frac{1}{2}}$ étant toujours supposé positif, et comme cela doit être d'après la formule (11).

Enfin, $\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}(T_c - T)^{\frac{3}{2}}$ tend vers la valeur finie $-\frac{\gamma}{4}$, ce qui concorde encore avec la valeur $-\frac{1}{4} T_c k_2^{\frac{1}{2}}$, exigée par les formules (11) et (21).

La détermination des constantes α, β, γ se fera au moyen de trois équations du premier degré, obtenues en appliquant la formule (22) aux valeurs observées de L à trois températures différentes. Les calculs seront particulièrement simples, si les températures choisies sont également espacées à partir de la température critique, ce qui sera favorable à une bonne détermination des constantes. On devra trouver pour γ une valeur positive, et l'on obtiendra par ce procédé indirect la valeur de la constante k_2 de la formule (5), $k_2 = \frac{\gamma^2}{T_c^2}$.

L'application de la formule (22) à quelques corps bien étudiés par l'expérience, peut conduire à des remarques très intéressantes.

CHAPITRE II

LES EFFETS DE LA DÉTENTE ADIABATIQUE SUR UN MÉLANGE DE LIQUIDE ET DE VAPEUR

1. Équation d'une adiabatique à l'intérieur de la courbe de saturation.

Le volume v qu'occupe un mélange dans lequel le titre de la vapeur, c'est-à-dire le rapport de la masse de vapeur à la masse totale, sera désigné par x, est déterminé par la formule :

$$(1) \qquad v = (1 - x)u + xu' = u + x(u' - u)$$

Si le titre x reste constant à toute température, cette formule détermine sur chaque droite de liquéfaction un point d'abscisse v, dont le lieu forme la courbe de titre constant x. La relation (1) est donc l'équation de cette courbe.

On peut, dans cette relation, supposer x variable suivant une certaine loi : elle représentera alors l'équation d'une autre courbe dont la forme dépendra de cette loi. Considérons, en particulier, le cas où la valeur de x sur chaque droite de liquéfaction est déterminée par la condition que l'entropie du mélange conserve toujours la même valeur σ : le lieu des points représentés par l'équation (1) sera l'adiabatique d'entropie σ, sous réserve d'y joindre une autre relation donnant la valeur de x en fonction de la température, et exprimant que l'entropie reste invariable. Cette relation sera évidemment la suivante :

$$\sigma = (1 - x)s + xs' = s + x(s' - s) \tag{2}$$

d'où l'on tire pour la valeur de x :

$$x = \frac{\sigma - s}{s' - s} \tag{3}$$

Cette valeur doit rester comprise entre 0 et 1, ce qui exige que s' soit supérieur et s inférieur à la constante σ. Ce n'est donc qu'entre des limites déterminées de température que l'adiabatique σ peut s'appliquer à un mélange de liquide et de vapeur.

La tangente de l'angle que fait, avec l'axe des pressions, la direction de l'adiabatique en un point quelconque, correspondant à la température T et à la tension de vapeur P, est déterminée par la formule :

$$\frac{\partial v}{\partial \mathrm{P}} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial \mathrm{T}}}{\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{T}}}, \tag{4}$$

et $\frac{\partial v}{\partial \mathrm{T}}$ se déduit des équations (1) et (3), qui donnent :

$$\frac{\partial v}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}} + x\left(\frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}} - \frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}}\right) + \frac{\partial x}{\partial \mathrm{T}}(u' - u) \tag{5}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mathrm{T}} = \frac{(\sigma - s')\dfrac{\partial s}{\partial \mathrm{T}} - (\sigma - \mathrm{S})\dfrac{\partial s'}{\partial \mathrm{T}}}{(s' - s)^2} = \frac{(\sigma - s')m - (\sigma - s)m'}{\mathrm{T}(s' - s)^2} \tag{6}$$

Il est particulièrement intéressant de connaître la direction de l'adiabatique à sa rencontre avec la courbe de saturation, soit sur la branche représentant l'état liquide, soit sur la branche représentant l'état de vapeur.

Suivant le cas considéré, il faut faire, dans les formules (5) et (6), $x = 0$ et $\sigma = s$, ou bien $x = 1$ et $\sigma = s'$, ce qui donnera :

$$(7) \qquad \frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}} - \frac{u' - u}{s' - s}\,\frac{m}{\mathrm{T}} = \frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}} - \frac{m}{\mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{T}}}$$

$$(8) \qquad \frac{\partial v'}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}} - \frac{u' - u}{s' - s}\,\frac{m'}{\mathrm{T}} = \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}} - \frac{m'}{\mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{T}}}$$

2. Maxima et minima de la condensation dans une détente adiabatique.

Le titre x, variant avec la température dans une détente adiabatique, peut passer par des valeurs maxima ou minima qu'il importe de rechercher. Pour faire cette étude dans toute sa généralité, je supposerai l'existence de trois températures d'inversion que je désignerai, dans leur ordre de décroissance, par T_0, T_1, T_2. Il sera facile d'en déduire ce qui doit se produire dans l'hypothèse d'une seule ou de deux températures d'inversion.

Tout maximum ou minimum de x sur l'adiabatique σ est déterminé par la condition $\frac{\partial x}{\partial \mathrm{T}} = 0$, c'est-à-dire, d'après (6) :

$$(\sigma - s)m' - (\sigma - s')m = 0$$

et alors, d'après (3) :

$$(9) \qquad -\frac{m'}{m} = \frac{1 - x}{x} \quad \text{ou} \quad x = \frac{m}{m - m'}$$

Entre les températures T_0 et T_1, ou bien encore à toute température inférieure à T_2, m' est positif, et la valeur de x donnée par cette relation est inacceptable. Il suit de là que, dans ces intervalles de température, un mélange de liquide et de vapeur, en cours de détente adiabatique, ne peut donner lieu à aucun maximum ou minimum de condensation. Et comme, d'après (6), $\frac{\partial x}{\partial \mathrm{T}}$ est toujours négatif, la vaporisation du liquide va constamment en augmentant, tandis que la température s'abaisse.

Mais entre la température critique et la première température

T_0, ou entre les températures T_1 et T_2, correspond, à chaque température, une valeur et une seule valeur de x, comprise entre 0 et 1, qui détermine sur la droite de liquéfaction, le point M de passage d'une certaine adiabatique, dont l'entropie σ est définie par la relation (2), et qui donne lieu, en ce point, à un maximum ou à un minimum de condensation. En ce point M, l'adiabatique d'entropie σ et la courbe de titre x constant sont évidemment tangentes, et leur tangente commune s'obtient par la construction graphique qui consiste à joindre le point M à l'intersection des deux tangentes menées à la courbe de saturation aux extrémités de la droite de liquéfaction.

Examinons spécialement le lieu des points M entre l'état critique et la première température d'inversion. A cette température T_0, la chaleur spécifique m' s'annule, et, d'après (9), $x = 1$, $\sigma = S_0$.

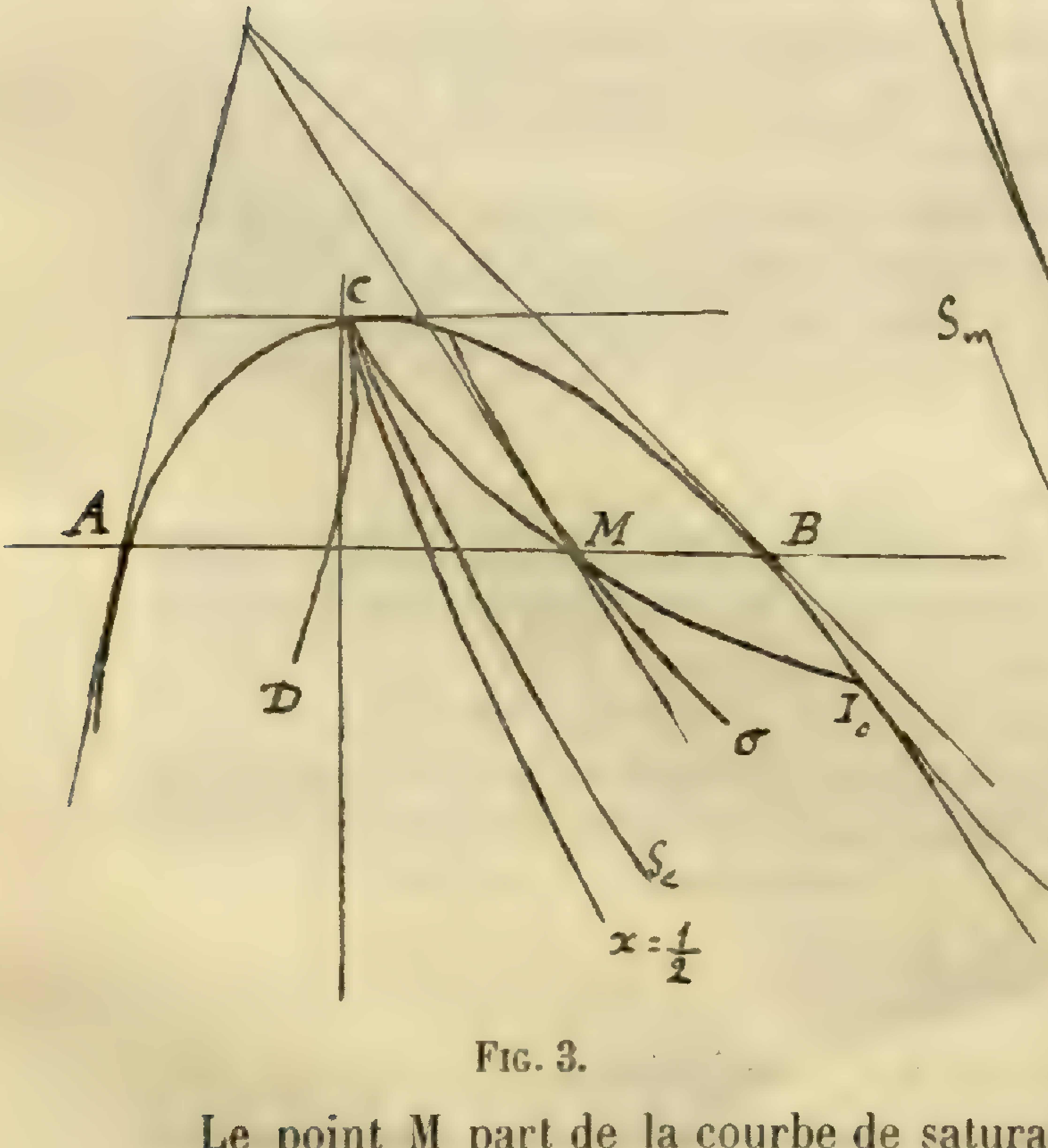


Fig. 3.

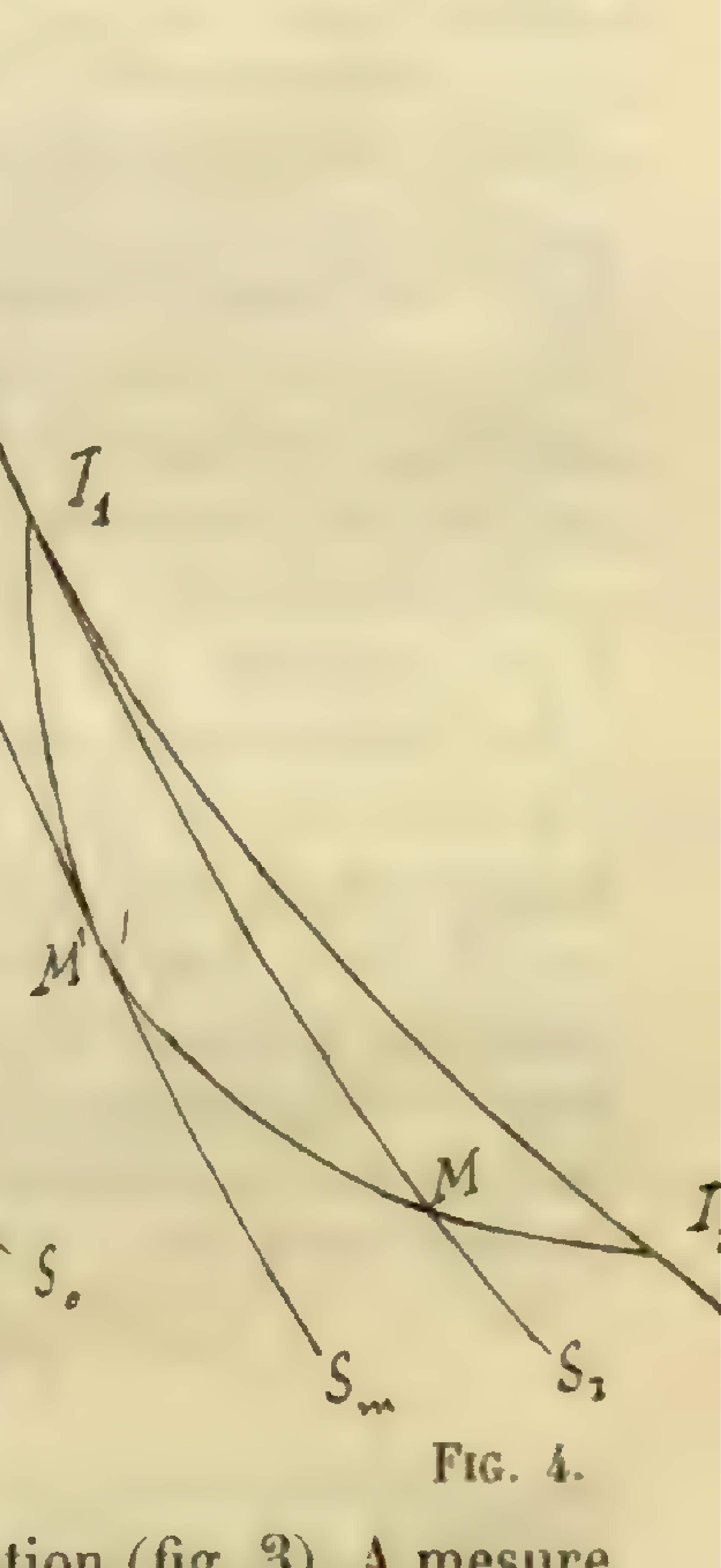


Fig. 4.

Le point M part de la courbe de saturation (fig. 3). A mesure que la droite de liquéfaction s'élève avec la température, le titre x et l'entropie σ au point M décroissent d'après les formules (2) et

(9) ; $-\frac{m'}{m}$ qui varie de 0 à 1 tend vers l'unité, x vers $\frac{1}{2}$ et σ vers l'entropie critique S_c. La courbe, lieu des points M, aboutit donc au point critique, et l'*adiabatique* S_c *est tangente, en ce point, à la courbe de titre constant* égal à $\frac{1}{2}$.

Ce fait remarquable par lui-même et par les conséquences inattendues qu'on en déduit, s'interprète d'une façon logique. Quand la détente part d'un point très voisin du point critique sur la courbe de saturation, le fluide étant entièrement à l'état de vapeur, l'adiabatique $S_c + \epsilon$, ϵ étant très petit, rencontre rapidement les courbes à titre constant, dont le titre varie de 1 à $\frac{1}{2}$ environ, puis, la détente à peine commencée continuant, toute la vapeur brusquement condensée reprend lentement l'état de vapeur. Quand on fait partir la détente du point critique lui-même, il y a indétermination sur l'état du fluide qu'il est naturel de considérer comme moitié liquide, moitié vapeur, en sorte que la détente provoque, dès le début, la vaporisation de la moitié du fluide condensé à l'état liquide.

L'étude de la détente dans la région des températures comprises entre le deuxième et le troisième point d'inversion, donne lieu à une discussion analogue. Le lieu des points M forme une boucle qui aboutit sur la courbe de saturation aux deux points d'inversion I_1 et I_2 (fig. 4).

3. Valeur limite de $m + m'$.

Prenons un fluide à une température voisine de l'état critique et dans ses deux états figurés par les extrémités d'une droite de liquéfaction. Considérons les adiabatiques passant par ces deux points, et prises à l'intérieur de la courbe de saturation : la tangente de l'angle que fait avec l'axe des pressions la direction de chacune de ces deux adiabatiques à sa rencontre avec la courbe de saturation, sera d'après les formules (4), (7) et (8) :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial P} &= \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial T}} \left(\frac{\partial u}{\partial T} - \frac{m}{T\frac{\partial P}{\partial T}} \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial P} &= \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial T}} \left(\frac{\partial u'}{\partial T} - \frac{m'}{T\frac{\partial P}{\partial T}} \right) \end{aligned} \right.$$

On a par addition :

$$\frac{\partial v}{\partial P}+\frac{\partial v'}{\partial P}=\frac{1}{\frac{\partial P}{\partial T}}\left(\frac{\partial u}{\partial T}+\frac{\partial u'}{\partial T}\right)-\frac{m+m'}{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2}$$

A la température limite du point critique, les deux adiabatiques se confondent avec l'adiabatique S_c, et la formule précédente, appliquée à ce cas, peut s'écrire, $\frac{\partial v}{\partial P}$ étant le coefficient angulaire de l'adiabatique critique, au point critique et à l'intérieur de la courbe de saturation :

$$\frac{\partial v}{\partial P}=\frac{1}{\frac{\partial P}{\partial T}}\,\frac{\frac{\partial u}{\partial T}+\frac{\partial u'}{\partial T}}{2}-\frac{m+m'}{2T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2}$$

Mais nous avons vu que ce coefficient angulaire n'est autre que celui de la courbe de titre constant $x=\frac{1}{2}$, lequel est précisément donné par le premier terme de cette formule, en sorte que le second terme s'annule nécessairement, ce qui nous conduit à la formule très intéressante :

$$\text{Lim. } (m+m')=0 \quad , \quad \text{pour } T=T_c.$$

4. L'équation de la courbe des maxima et minima de condensation par détente adiabatique.

L'abscisse v de la courbe, lieu des points M, est donnée par la formule (1), le titre x satisfaisant à la condition (9).

La direction de cette courbe en un point quelconque est définie par les formules (4), (5) et (9) auxquelles il faut joindre :

$$\frac{\partial x}{\partial T}=\frac{m\frac{\partial m'}{\partial T}-m'\frac{\partial m}{\partial T}}{(m'-m)^2}$$

Il est particulièrement intéressant de déterminer la direction de la courbe à sa rencontre avec la courbe de saturation, au point critique et aux trois points d'inversion.

Au point critique $x = \frac{1}{2}$, et l'on a :

$$\frac{\partial x}{\partial \mathrm{T}}(u' - u) = \frac{(u' - u)\dfrac{\partial m'}{\partial \mathrm{T}}}{(m' - m)^2}\left(m - m'\frac{\dfrac{\partial m}{\partial \mathrm{T}}}{\dfrac{\partial m'}{\partial \mathrm{T}}}\right)$$

Le premier facteur tend vers une valeur finie, le second vers $m + m'$, c'est-à-dire vers zéro, et l'on a, à la température limite T_c,

$$\frac{\partial v}{\partial \mathrm{P}} = \frac{1}{2\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{T}}}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}} + \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}}\right)$$

C'est la valeur de $\frac{\partial v}{\partial \mathrm{P}}$ pour la courbe de titre $\frac{1}{2}$. Ainsi donc, la courbe de titre $\frac{1}{2}$, l'adiabatique critique et la courbe des maxima de condensation ont même tangente au point critique.

Aux trois autres températures T_0, T_1, T_2, $x = 1$, $\frac{\partial x}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\frac{\partial m'}{\partial \mathrm{T}}}{m}$, et l'on a :

$$\frac{\partial v}{\partial \mathrm{P}} = \frac{1}{\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{T}}}\left(\frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}} + \frac{\partial m'}{\partial \mathrm{T}}\,\frac{u' - u}{m}\right)$$

Au point I_0, $\frac{\partial m'}{\partial \mathrm{T}}$ est négatif, puisque m', en passant par zéro, décroît, tandis que la température s'élève. Il en résulte, d'après la formule ci-dessus, que la courbe des maxima de condensation fait, au point I_0, un angle fini avec la courbe de saturation. Pour la même raison, la courbe des maxima et minima de condensation qui aboutit au point I_2, fait en ce point un angle fini avec la courbe de saturation.

Au point I_1, la formule précédente est encore valable, mais $\frac{\partial m'}{\partial \mathrm{T}}$ est positif, m' s'annulant en passant d'une valeur négative à une valeur positive par une élévation de la température. Il en résulte encore que la courbe des maxima et minima de condensation rencontre la courbe de saturation au point I_1, sous un angle fini.

5. Les effets de la détente adiabatique, à partir de la deuxième température d'inversion.

Portons, un instant, notre attention sur la boucle de courbe qui aboutit aux points I_1 et I_2. L'adiabatique S_1 qui est tangente intérieurement à la courbe de saturation au point I_1, rencontre cette boucle (fig. 4) en un point M qui correspond à un maximum de condensation par détente de la vapeur saturée, prise à la température T_1. Toute détente de vapeur saturée partant d'une température comprise entre T_1 et T_2, donne lieu au même phénomène, qui s'évanouit à la température T_2.

Il existe évidemment une adiabatique d'entropie inférieure à S_1 qui est tangente en un certain point M′ à la courbe de condensation : soit, pour préciser, S_m son entropie. Toute adiabatique d'entropie comprise entre S_1 et S_m rencontre cette courbe en deux points, et correspond à une détente qui donne lieu d'abord à un maximum de vaporisation, suivi d'un maximum de condensation, après quoi la prolongation de la détente fera vaporiser du liquide, jusqu'à ce que le fluide retourne entièrement à l'état de vapeur.

L'adiabatique S_m et toute autre d'entropie inférieure correspond à une détente qui ne peut plus produire ni maximum ni minimum de condensation. Le fluide se vaporise de plus en plus jusqu'à ce qu'il soit entièrement réduit à l'état de vapeur. L'adiabatique S_m jouit d'une propriété géométrique qui lui est particulière. Tout en étant tangente à la courbe de titre constant qui passe en M′, elle traverse cette courbe.

S'il n'existe que deux points d'inversion, les phénomènes changent d'allure, et deviennent assez étranges aux basses températures. La courbe de condensation, partant toujours du deuxième point d'inversion I_1, se prolonge indéfiniment, et devient asymptote à l'axe des volumes, le point M′ étant rejeté à l'infini. A toute température inférieure à T_1, la vapeur saturée, dont l'entropie est supérieure à S_1, se détend en produisant une condensation continue, qui tend à devenir complète au zéro absolu. Toute détente d'entropie inférieure à S_1, donne lieu à un maximum de vaporisation, suivi d'une condensation qui tend encore à devenir complète au zéro absolu. Si l'on suppose, en particulier, le corps partant à basse température de l'état entièrement liquide, la détente de ce liquide donnera lieu à un maximum de vaporisation, dont le titre x n'atteindra qu'une très faible valeur d'après la formule (9), puisque m tend vers zéro et m' vers $-\infty$, quand la température tend vers le zéro absolu. Puis, la prolongation indéfinie de cette opération, agissant en sens inverse, tendra à condenser entièrement la faible proportion de vapeur produite et occupant d'ailleurs un volume déjà considérable.

CHAPITRE III

LA LOI DU DIAMÈTRE RECTILIGNE DE CAILLETET ET MATHIAS

1. La courbe des densités.

Les inverses des volumes spécifiques u et u' sont les densités δ et δ' du liquide et de la vapeur saturée, c'est-à-dire la masse, en grammes, d'un centimètre cube du fluide considéré. En portant en abscisses les températures et en ordonnées les deux sortes de densités, on obtient deux arcs de courbe qui représentent la variation, en fonction de la température, de la densité du liquide saturé et de celle de la vapeur saturée. Ces deux arcs de courbe se raccordent à la température critique, suivant une tangente parallèle à l'axe des ordonnées, pour donner une courbe unique de forme parabolique, la *courbe des densités* (¹).

Cette courbe jouit d'une propriété remarquable, à savoir que le lieu des milieux des cordes parallèles à l'axe des ordonnées est très sensiblement une ligne droite pour les corps purs. C'est la *loi du diamètre rectiligne* de Cailletet et Mathias. Elle revient à dire que la densité moyenne du liquide et de la vapeur, dans un mélange, varie proportionnellement à la température.

La densité critique Δ apparaît ainsi comme l'ordonnée du point

---

(¹) E. Mathias, *Le point critique des corps purs*. — Paris, 1904, pp. 6 à 10.

d'intersection du diamètre et de la courbe des densités, c'est-à-dire comme l'ordonnée du point du diamètre dont l'abscisse est la température critique. D'où découle une méthode qui a été souvent employée pour déterminer la densité critique d'un corps pur, quand on connaît d'une part la température critique, et d'autre part un certain nombre des deux densités δ et δ' permettant d'établir l'équation du diamètre rectiligne :

$$y = \mathrm{AT} + \mathrm{B}$$

Le coefficient angulaire A du diamètre est toujours négatif et très petit en valeur absolue ; dans la majorité des cas, il est compris entre 0,0005 et 0,0023, comme l'a montré M. Mathias par de nombreux exemples.

2. Le diamètre rectiligne de l'hydrogène.

MM. Mathias, Crommelin et Kamerlingh Onnes ont récemment fait de cette méthode une très intéressante application à la détermination de la densité critique Δ de l'hydrogène (¹), au laboratoire cryogène de Leyde. Ils ont fixé à 0,03 la valeur de Δ. Le coefficient angulaire A du diamètre a été trouvé égal à 0,00039402 : c'est la plus petite valeur qu'on ait jamais trouvée. L'équation du diamètre est donnée par la formule :

$$y = -0{,}06351 - 0{,}0039402\,(\mathrm{T} - 273)$$

Les déviations du diamètre ne dépassent guère $\frac{1}{1000}$. Cependant les trois points les plus proches du point critique montrent un ensemble d'écarts plus considérables dont le plus grand atteint $\frac{1}{200}$.

Ces écarts, quoique très peu prononcés et sur une très faible étendue, se présentent fréquemment pour d'autres corps. On s'est borné jusqu'ici à les constater sans chercher à en trouver les causes et à savoir s'il faut les attribuer à une réelle déviation du diamètre au voisinage immédiat du point critique ou à quelque défaut de la méthode expérimentale.

(¹) C. R., t. 172, 1921, p. 261.

Il me paraît possible de porter quelque lumière sur cette question en examinant l'expression, facile à trouver, de la direction limite que prend, au point critique, le diamètre rectiligne ou non, et dont l'équation générale est donnée par la formule :

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u'}\right) = \frac{u + u'}{2uu'} \tag{1}$$

On en tire, pour le coefficient angulaire de la tangente à la courbe :

$$\frac{\partial y}{\partial \mathrm{T}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}}}{u^2} + \frac{\frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}}}{u'^2}\right)$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\partial y}{\partial \mathrm{T}} = -\frac{1}{2u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}} + \left(\frac{u}{u'}\right)^2 \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}}\right)$$

Si l'on passe au cas limite où T devient la température critique, il vient, en appelant u_c le volume spécifique du fluide à l'état critique :

$$\frac{\partial y}{\partial \mathrm{T}} = -\frac{1}{u_c^2}\,\mathrm{Lim.}\,\frac{\frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}} + \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}}}{2} = -\frac{1}{u_c^2}\,a\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

α est l'angle, dans le plan des (p, v), que fait avec l'axe des pressions, la direction, au point critique, de la courbe représentative d'un mélange dont le titre en vapeur reste constant et égal à $\frac{1}{2}$. Cet angle qui est toujours très petit est de plus négatif. C'est une conséquence de ce fait qu'un abaissement de la température à partir de l'état critique fait toujours augmenter le volume spécifique de la vapeur saturée, plus qu'il ne fait diminuer le volume spécifique du liquide saturé. On verra, du reste, au chapitre suivant, par d'autres considérations, que cette valeur négative de l'angle α s'impose impérieusement.

Ainsi donc, tg α est toujours négatif et très petit, en sorte que la valeur limite de $\frac{\partial y}{\partial \mathrm{T}}$, au point critique, est positive et très petite, tandis que le coefficient angulaire du diamètre, rectiligne jusqu'au voisinage immédiat du point critique, est négatif et également très faible, comme le prouvent les expériences les plus précises. Il faut donc que dans ce voisinage, le diamètre jusqu'alors rectiligne subisse réellement une légère déviation qui fasse passer son coefficient angulaire d'une valeur très faible et négative à une valeur également très faible et positive.

3. Interprétation de l'anomalie qui se présente au voisinage immédiat du point critique.

On peut encore rendre plus saisissante l'interprétation de cette légère déviation du diamètre rectiligne en considérant dans l'équation (1) l'ordonnée du diamètre comme l'inverse d'un certain volume, en posant :

$$y = \frac{1}{v} = \frac{u + u'}{2uu'} \tag{2}$$

et en remarquant que *v* est l'abscisse, dans le plan des (*p, v*), de la courbe représentant un mélange dont les deux phases en équilibre, liquide et vapeur, occupent, à toute température, un même volume, courbe dont Amagat a fait une étude spéciale.

Soit, en effet, *x* le titre, en poids, de la valeur dans le mélange considéré, titre qui varie avec la température; on aura :

$$v = u + x(u' - u)$$

et, d'après la composition supposée du mélange :

$$(1 - x)u = xu' \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{u}{u + u'}$$

et par suite :

$$v = u + \frac{u}{u + u'}(u' - u) = \frac{2uu'}{u = u'} = \frac{1}{y} \tag{3}$$

v a donc bien, dans la formule (2), la signification annoncée, et que lui donne la formule (3).

On tire de cette dernière formule :

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{2u^2\frac{\partial u'}{\partial T} + 2u'^2\frac{\partial u}{\partial T}}{(u + u')^2}$$

qui devient à la température limite du point critique :

$$\frac{\partial v}{\partial \mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}} + \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}}\right) = a \operatorname{tg} \alpha$$

La courbe CD, (fig. 3), représentant un mélange dont les deux phases occupent, à toute température, des volumes égaux, est donc tangente, au point critique, à la courbe de titre x constant et égal à $\frac{1}{2}$. Leur direction commune fait avec l'axe des pressions, comme il a été déjà dit, un angle très faible et dont la tangente est négative. Mais les deux courbes prennent, dès le début, des directions bien différentes, ainsi qu'on le voit sur la figure ; $\frac{\partial v}{\partial \mathrm{T}}$ d'abord très petit et négatif, ne tarde pas à s'annuler, puis à prendre une valeur positive qui restera très faible. A partir de ce moment, $\frac{\partial y}{\partial \mathrm{T}} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial \mathrm{T}}}{v^2}$ devient négatif, et la loi expérimentale du diamètre rectiligne prouve même que cette valeur négative devient très rapidement constante.

CHAPITRE IV

LES PROPRIÉTÉS DES FLUIDES HOMOGÈNES AU VOISINAGE DE L'ÉTAT CRITIQUE

1. Les coefficients thermo-élastiques.

L'état d'un fluide homogène est représenté dans le plan des (v, p) ou des (S, T) par un point pris en dehors de la courbe de saturation, et dont les déplacements l'amènent, sans aucune transition appréciable, de l'état liquide à l'état gazeux, et inversement, jusqu'à ce que ce point finisse par arriver sur la courbe de saturation, et à la franchir. Alors seulement se manifestent dans un mélange les deux états distincts, liquide et gazeux. A chaque état homogène du fluide correspondent certains coefficients physiques, propres aux transformations thermo-élastiques, et dont les variations au voisinage du point critique, méritent un examen spécial.

Les équations différentielles des quatre fonctions caractéristiques de Massieu permettent d'écrire immédiatement les relations thermodynamiques de Maxwell.

$$(1)\quad \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_v \qquad (2)\quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p$$

$$(3)\quad \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \qquad (4)\quad -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

On voit aisément qu'il existe vingt-quatre coefficients différentiels, tels que ceux qui figurent dans les équations ci-dessus. Mais huit seulement d'entre eux, qu'on peut choisir dans une certaine mesure, sont réellement distincts ; les autres ne sont que des combinaisons simples de ces premiers. Observons d'abord que de deux coefficients tels que $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p$ l'un est à écarter, comme étant l'inverse de l'autre, ce qui réduit déjà à douze le nombre des coefficients à retenir ; ils sont évidemment partagés en quatre groupes de trois coefficients portant le même indice. Mais de ces trois quantités, l'une est toujours le produit ou le quotient des deux autres, comme le montrent les identités qui suivent :

$$(5)\quad \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \qquad (6)\quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$

$$(7)\quad \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_v = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_v \qquad (8)\quad \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_S = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S$$

Il ne reste plus alors que huit coefficients distincts, répartis en quatre groupes de deux coefficients ayant même indice. Tels sont les huit coefficients qui figurent dans les relations de Maxwell ainsi que dans les identités qui précèdent.

Ces huit coefficients ne sont pas entièrement indépendants. Ils sont liés entre eux, d'abord par les quatre relations de Maxwell, et par une cinquième. Ces cinq relations peuvent d'ailleurs se combiner pour prendre des formes variées et bien connues.

Quand un fluide homogène s'approche de l'état critique, les douze coefficients qui figurent dans les identités (5) à (8), et dans lesquelles on reconnaît facilement les coefficients en usage dans la physique, tendent à prendre certaines valeurs que nous allons rechercher.

2. Valeurs que prennent, à la température critique, les coefficients à pression constante ou à température constante.

Il existe deux formules classiques et très importantes qui donnent la chaleur spécifique m ou m' d'un fluide maintenu à l'état de saturation. La première fait intervenir la chaleur spécifique à pression constante C_p ou C'_p, prise à partir de l'état de saturation. La seconde fait intervenir la chaleur spécifique à volume constant C_v ou C'_v, prise également à partir de l'état de saturation.

Occupons-nous d'abord de la première qui peut s'écrire :

$$(9) \qquad m = C_p - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{\partial P}{\partial T}$$

les lettres m, C et v devant être accentuées dans cette formule s'il s'agit d'une vapeur saturée.

Appliquons cette formule à l'état liquide, m est positif, comme C_p ; il en est de même pour les trois facteurs du second terme. Si l'on fait tendre la température vers T_c, le premier membre de l'équation (9) tend vers l'infini positif, et quelle que soit la valeur que prenne $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$, il faut nécessairement que C_p tende vers l'infini. Donc à la température critique :

$$(10) \qquad C_p = +\infty \qquad \text{soit} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \infty$$

Appliquons la même formule à l'état de vapeur. Si la température tend vers T_c, au premier membre m' devient infini négativement, ce qui exige que $\left(\frac{\partial v'}{\partial T}\right)_p$ devienne infini positivement. Donc, à la limite :

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = +\infty$$

D'après l'identité (5), la formule (9) peut s'écrire :

$$(12) \qquad m = C_p - T\left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \frac{\partial P}{\partial T} = C_p\left[1 - \left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p \frac{\partial P}{\partial T}\right]$$

Suivant que l'on considère l'état liquide ou l'état de vapeur, le premier membre de cette équation tend vers l'infini positif ou vers l'infini négatif, quand la température tend vers T_c, ce qui n'est possible, C_p restant positif quand le fluide passe de l'état liquide à l'état de vapeur, que si le facteur entre parenthèses s'annule pour changer de signe à la température critique ; $\frac{\partial P}{\partial T}$ prend alors la valeur limite a, et l'on a :

$$(13) \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p = \frac{1}{a}$$

Ainsi, des trois coefficients compris dans la formule (5), l'un reste fini, les deux autres deviennent infinis positivement.

L'autre formule qui fait intervenir la chaleur spécifique à volume constant, et que nous avons à utiliser, est la suivante :

$$(14) \qquad m = C_v + T\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T \frac{\partial u}{\partial T} = C_v + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \frac{\partial u}{\partial T}$$

les lettres m, C, S, v, u devant être accentuées s'il s'agit d'une vapeur.

Cette formule peut se mettre sous la forme :

$$1 = \frac{C_v}{m} + T\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T \frac{\frac{\partial u}{\partial T}}{m}$$

$\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T$ et $\left(\frac{\partial S'}{\partial v'}\right)_T$ sont des quantités essentiellement positives. Si le fluide pris à l'état liquide s'approche de la température critique, $\frac{T\frac{\partial u}{\partial T}}{m}$ tend vers $\frac{1}{a}$ d'après la formule (14) Ch. 1er. Chaque terme du second membre est positif et inférieur à l'unité, ce qui prouve que

$\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T$ tend vers une valeur finie. Si le fluide est pris à l'état de vapeur, le second terme ne change pas à la limite, mais le premier devient négatif, ce qui est impossible, à moins que $\frac{C_v}{m}$ ne tende vers zéro, ce qui devra nécessairement se produire. L'équation précédente se réduit donc à :

$$(15) \qquad 1 = \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T \cdot \frac{1}{a} \qquad \text{soit} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T = a$$

Des formules (4), (6) et (11) il résulte que :

$$(16) \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\infty \quad , \quad \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\infty$$

En sorte que des trois coefficients qui rentrent dans l'identité (6), l'un reste fini, tandis que les deux autres tendent vers l'infini négatif, à la température critique.

3. Rapports finis qui existent entre les quatre coefficients qui deviennent infinis à la température critique.

Les quatre coefficients des formules (5) et (6) qui deviennent infinis restent, pris deux à deux, dans un rapport fini, à la température critique. C'est évident en ce qui concerne les deux coefficients figurant dans une même de ces deux formules ; mais la loi s'applique encore à deux coefficients pris, l'un dans la formule (5), $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ par exemple, l'autre dans la formule (6), $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$ par exemple. C'est ce qui résulte de la formule (4) qui donne :

$$\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T} = -\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p} = -1$$

Il est facile, avec les formules (1) à (8), de fixer dans chaque cas particulier la valeur du rapport. C'est ainsi que l'on trouve, par exemple :

$$\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T} = -a^2$$

Les quatre coefficients dont il s'agit sont donc d'un même ordre de grandeur, à la température critique. Nous aurons à rechercher cet ordre de grandeur.

4. Valeurs que prennent, à la température critique, les coefficients à volume constant et à entropie constante.

Les relations (2) et (13) d'une part, (3) et (15) d'autre part, donnent :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{a} \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = a \tag{18}$$

Ainsi donc, des trois coefficients portant le même indice, qui composent les formules (7) et (8), il y en a un qui reste fini à la température critique. Vers quelles valeurs tendent les autres ? Ils restent tous les quatre finis, ou bien ils deviennent tous ensemble infinis ou nuls, comme le montrent les relations qu'établissent entre eux les formules (1), (7) et (8). Il suffit donc de déterminer la valeur limite de l'un d'eux, de $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_v$ par exemple, ou de son inverse, c'est-à-dire de la chaleur spécifique à volume constant.

Cette chaleur spécifique ne peut devenir infinie. On le voit de bien des manières, notamment par deux des plus connues des relations qui unissent les coefficients thermo-élastiques.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \frac{C_V}{C_p} \quad \text{(formule de Reech)} \tag{19}$$

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T} \tag{20}$$

En remplaçant, dans la première, C_p par sa valeur tirée de la seconde, il vient :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_S = - \frac{C_V}{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)^2 - C_V\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T} \tag{21}$$

$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_S$ ne peut tendre vers l'infini, car alors l'adiabatique critique serait tangente à la courbe de saturation, et ne pénétrerait pas à l'intérieur de cette courbe, ce qui serait contraire à nos hypothèses fondamentales. Le second membre de cette équation reste donc fini, et comme $\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\right)_v$ tend vers la constante a, tandis que $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\mathrm{T}$ s'annule, il faut nécessairement que $\mathrm{C_V}$ reste fini.

Pour trouver sa vraie valeur, j'emploierai la formule (14), appliquée, à une même température, à l'état liquide et à l'état de vapeur saturée.

$$m = \mathrm{C_V} + \mathrm{T}\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\right)_v \frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}}$$

$$m' = \mathrm{C'_V} + \mathrm{T}\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\right)_{v'} \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}}$$

ce qui donne par addition :

$$m + m' = \mathrm{C_V} + \mathrm{C'_V} + \mathrm{T}\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}} + \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\right)_{v'}}{\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\right)_v} \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}}\right)$$

Passant à la température limite $\mathrm{T} = \mathrm{T}_c$, le premier membre s'annule, $\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\right)_v$ et $\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\right)_{v'}$ tendent vers la même valeur a, et $\mathrm{C_V} + \mathrm{C_V'}$ devient le double de la chaleur spécifique à volume constant au point critique, et l'on a :

$$0 = 2\mathrm{C_V} + \mathrm{T}_c a \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{T}} + \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{T}}\right) = 2\mathrm{C_V} + 2\mathrm{T}_c a^2 \operatorname{tg} \alpha$$

soit :

$$\mathrm{C_V} = -\mathrm{T}_c a^2 \operatorname{tg} \alpha = \mathrm{T}_c \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{T}}\right)_v \tag{22}$$

tg α étant la tangente de l'angle que fait avec l'axe des pressions au point critique la direction de la courbe représentant un mélange de liquide et de vapeur dont le titre demeure constant et égal à $\frac{1}{2}$.

C_v est positif comme cela doit être, car tg α est négatif. C'est une conséquence de ce fait d'expérience que, par un abaissement de la température à partir de l'état critique, le volume spécifique de la vapeur saturée augmente plus vite que ne diminue le volume spécifique du liquide.

La formule (22) donne la valeur du coefficient $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_v$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_v = -\frac{1}{a^2 \operatorname{tg} \alpha} \tag{23}$$

qui permet, à l'aide des formules (1), (17) et (18), de déterminer les valeurs finies prises à la température critique par les trois autres coefficients à volume constant ou à entropie constante qui forment les identités (7) et (8).

5. La loi de réfraction des adiabatiques.

La formule (21), appliquée au point critique, donne en y remplaçant C_v par sa valeur (22) :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = \operatorname{tg} \alpha \tag{24}$$

$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s$ est nécessairement négatif, c'est une nouvelle raison à ajouter à celle déjà donnée, et qui exige que tg α soit négatif. Cette valeur négative de tg α est une conséquence obligée de la théorie exposée ici, en sorte que l'hypothèse fondamentale d'une valeur finie a de $\frac{\partial P}{\partial T}$ au point critique reçoit une confirmation inattendue du fait expérimental cité plus haut et que prévoit cette hypothèse.

L'adiabatique critique S_c conserve en traversant la courbe de saturation sa direction qui est, de part et d'autre, celle de la courbe de titre constant égal à $\frac{1}{2}$. Elle ne se réfracte pas. C'est un cas limite où s'évanouit la loi générale de la réfraction des adiabatiques, loi que M. Raveau a été le premier à signaler, il y a déjà longtemps, et d'après laquelle, en passant de l'intérieur à l'extérieur de la courbe de saturation, toute adiabatique se redresse brusquement pour rapprocher sa direction de celle de l'axe des pressions.

Il n'est pas inutile d'indiquer ici la formule, d'ailleurs bien connue, qui mesure la réfraction, en donnant la différence des tangentes des angles que fait, avec l'axe des pressions, la direction d'une adiabatique avant de pénétrer dans la courbe de saturation et après son entrée dans cette courbe.

La première de ces tangentes $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s$ est donnée par la formule (19), dans laquelle je remplacerai C_v par sa valeur tirée de (20); on obtient ainsi :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \left(1 - \frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{C_p}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T + \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2}{C_p}$$

ce qui peut s'écrire, eu égard à la formule (9) :

$$(25) \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T + \frac{(m - C_p)^2}{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)^2 C_p}$$

La seconde des tangentes $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_s$ est donnée par la formule (10), Ch. II.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_s = \frac{\frac{\partial u}{\partial T}}{\frac{\partial P}{\partial T}} - \frac{m}{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2}$$

dans laquelle je remplacerai $\frac{\partial u}{\partial T}$ par sa valeur tirée de l'identité :

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \frac{\partial u}{\partial T}$$

et nous aurons :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T + \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{\frac{\partial P}{\partial T}} - \frac{m}{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T + \frac{T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{\partial P}{\partial T} - m}{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2}$$

soit, eu égard à la formule (9) :

$$(26) \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T + \frac{C_p - 2m}{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2}$$

Les formules (25) et (26) donnent la différence que nous cherchions, et qui prend la forme remarquablement simple :

$$(27) \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_S - \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_S = \frac{m^2}{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2 C_p}$$

Cette formule s'applique à la branche de la courbe de saturation qui représente l'état liquide. Il faut y remplacer m par m' et C_p par C'_p pour l'appliquer à la branche qui représente l'état de vapeur saturée. Elle exprime bien la loi de réfraction rappelée plus haut.

6. Ordre de grandeur des quatre coefficients qui deviennent infinis au point critique.

Si l'on applique l'équation (27) à la température critique, la réfraction de l'adiabatiqne s'évanouissant, le second membre de cette équation s'annule, d'où résulte que C_p, et par suite les quatre coefficients thermo-élastiques qui deviennent infinis sont d'un ordre de grandeur supérieur à m^2, et d'une façon plus générale, d'un ordre supérieur au carré de l'un quelconque des coefficients $m, m', \frac{\partial u}{\partial T}, \frac{\partial u'}{\partial T}, \frac{\partial L}{\partial T}$. Cet ordre de grandeur serait-il, par hasard, représenté par le cube des mêmes coefficients ou par les valeurs de leurs dérivées, en sorte que chacun des quatre coefficients multiplié par $(T_c - T)^{\frac{3}{2}}$ tendrait vers une valeur finie à la température critique ? Je n'ai pu en trouver une démonstration rigoureuse.

Je dois, du reste, faire quelques réserves sur certains des résultats obtenus dans cette étude, et qui m'ont grandement surpris. Ils découlent tous de la direction que j'ai trouvée pour l'adiabatique au point critique et à l'intérieur de la courbe de saturation, direction qui se confondrait avec celle de la courbe de titre $\frac{1}{2}$.

Les courbes de titre constant, sauf celle de titre $\frac{1}{2}$, se comportent d'une façon si étrange au voisinage du point critique, puisqu'elles semblent être, toutes, tangentes à la courbe de saturation, sauf l'unique courbe de titre $\frac{1}{2}$, qu'il se présente, dans leur distribution autour du point critique, une sorte de discontinuité, dont je n'ai peut-être pas su tenir compte. Je suis le premier à signaler au lecteur les difficultés que j'ai rencontrées, et que je n'ai pas pu résoudre autrement que je ne l'ai fait. Il eût été beaucoup plus satisfaisant pour moi de constater l'existence généralement admise d'une réfraction finie de l'adiabatique critique, et, par suite, d'une valeur finie du rapport $\frac{m^2}{C_p}$. L'ordre de grandeur des quatre coefficients qui deviennent infinis, et resté si mystérieux pour moi, eût été ainsi immédiatement défini.

Théorie analytique
des turbines centripètes et centrifuges à réaction

PAR

M. le Comte de SPARRE

DEUXIÈME PARTIE

I

Je suppose, dans cette deuxième partie, que la turbine travaille sous une charge réduite et avec une hauteur de chute variable $H = H_o(1 + \eta)$, η étant égal à 0 dans le cas du travail normal.

Je suppose de plus que le réglage peut se faire soit au moyen d'un tiroir qui ferme plus ou moins le distributeur, soit au moyen de modification de l'inclinaison des directrices du distributeur, soit par ces deux moyens combinés. Alors si S_o est la surface totale du distributeur lorsqu'il est complètement ouvert et S sa surface à un moment quelconque, α_o l'inclinaison des directrices dans le cas du travail à pleine charge, α'_o cette inclinaison dans le cas du travail sous une charge réduite, je pose

$$\frac{S_o \sin \alpha_o}{S \sin \alpha'_o} = 1 + x \quad (1)$$

Je désigne par v'_o la vitesse de l'eau à la sortie du distributeur, vitesse qui est variable avec l'ouverture plus ou moins grande du distributeur, par suite de la variation du degré de réaction, par w'_o la vitesse relative de l'eau par rapport à la roue immédiatement à la sortie du distributeur, vitesse qui est la résultante de v'_0 et de $-u_0$ (¹).

---

(1) Si le réglage a lieu uniquement par tiroir, on a $\alpha'_o = \alpha_o$; s'il a lieu uniquement par la variation de l'inclinaison des directrices, on a $S = S_o$.

La vitesse w'_0 n'est plus tangente à l'aube ; par suite, à son entrée dans la roue, la veine liquide subit d'une part un choc contre l'aube et d'autre part une élargissement brusque. Par suite de ces deux circonstances il se produit une zone de tourbillonnements.

Je désigne par w la vitesse relative de l'eau dans la roue immédiatement au delà de la zone de tourbillonnement, cette vitesse w sera tangente à l'aube et nous supposerons qu'on puisse la regarder comme tangente à son premier élément et, par suite, comme faisant un angle β_0 avec u_0.

Qu'il s'agisse du choc ou du changement de la vitesse par suite de l'élargissement brusque de la veine à l'entrée de la roue, nous admettrons, avec Résal, que la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses variées.

A la sortie du distributeur la vitesse absolue de l'eau, égale à v'_0, fait un angle α'_0 avec u_0, elle a donc pour composantes suivant le rayon et perpendiculairement à cette direction $v'_0 \sin \alpha'_0$ et $v'_0 \cos \alpha'_0$. Au delà de la zone de tourbillonnement la vitesse relative étant w, faisant, d'après ce que nous supposons, un angle β_0 avec u_0, on a pour les composantes de la vitesse absolue suivant ces mêmes directions

$$w \sin \beta_0 \qquad \text{et} \qquad w \cos \beta_0 + u_0$$

on a par suite pour la force vive perdue, par unité de masse

$$(1) \quad (v'_0 \sin \alpha'_0 - w \sin \beta_0)^2 + (v'_0 \cos \alpha'_0 - w \cos \beta_0 - u_0)^2 = v'^2_0 + u^2_0$$
$$+ w^2 - 2v'_0 w \cos(\beta_0 - \alpha'_0) - 2v'_0 u_0 \cos \alpha'_0 + 2u_0 w \cos \beta_0 = 2g\zeta$$

ζ désignant la perte de charge.

D'ailleurs l'équation (1) de la première partie reste sans changements, et dans les équations (2), (3) et (4) on doit simplement remplacer v_0, ϵ_0, ρ_0 et ρ'_0 par v'_0, ϵ, ρ et ρ', de sorte que l'on a

$$(2) \qquad \omega = \frac{u_0}{r_0} = \frac{u_1}{r_1}$$

(¹) Pour le travail à pleine charge et sous la hauteur de chute H_0 je conserve d'ailleurs toutes les notations de la première partie. Cfr. ANNALES DE LA SOC. SC. DE BRUXELLES, t. XL, 2ᵉ partie, pp. 249-274.

$$(3) \qquad \epsilon = 1 - \frac{v'^2_o}{2gH} \text{ (}^1\text{)}$$

$$(4) \qquad \rho' = \rho - e\epsilon$$

$$(5) \qquad 2gh_1 = 2gh - (1 + a)v'^2_o \text{ (}^2\text{)}.$$

Pour l'équation (5) de la première partie, il faut ajouter à la perte de charge le terme $2g\zeta$ que nous venons de calculer et remplacer w_o par w'_o. Nous désignerons de plus par w'_1 la vitesse relative de l'eau à la sortie, w'_1 devenant donc égal à w_1 dans le cas du travail à pleine charge sous la hauteur de chute normale. L'équation (5) de la première partie se transforme alors dans la suivante : (³)

$$(6) \quad w'^2_1 = w'^2_o + 2gH + u^2_1 - u^2_o - (1+a)v'^2_o - bw'^2_1 - cw^2 - v'^2_o$$
$$- u^2_o - w^2 + 2v'_o w \cos(\beta_o - \alpha'_o) + 2v'_o u_o \cos\alpha'_o - 2u_o w \cos\beta_o$$

Mais w'_o étant la résultante de v'_o et de $-u_o$ on a (⁴)

$$(7) \qquad w'^2_o = v'^2_o + u^2_o - 2v'_o u_o \cos\alpha'_o.$$

$$(8) \qquad \frac{u_o}{(\sin\beta'_o - \alpha'_o)} = \frac{w'_o}{\sin\alpha'_o} = \frac{v'_o}{\sin\beta'_o}.$$

En tenant compte de (7) l'équation (6) devient alors

$$(9) \quad w'^2_1 = 2gH - (1 + a)v'^2_o + u^2_1 - (1 + c)w^2 - 2u_o w \cos\beta_o$$
$$- bw'^2_1 + 2v'_o w \cos(\beta_o - \alpha'_o) - u^2_o$$

désignons toujours par β_1 l'angle de w'_1, supposée tangente à l'aube à la sortie, avec le prolongement de u_1, en sens contraire du mouvement, et supposons de plus qu'il puisse y avoir une valve à la sortie, de sorte que la surface de sortie soit KS_1, K étant égal à un si il n'y a pas de valve, et dans le cas où il y a une

---

(¹) Ici $H = H_0 (1 + \eta)$.

(²) $h - h' = H = H_0 (1 + \eta)$.

(³) Nous prenons ici pour la perte de charge ou, plus exactement, pour la perte de force vive par unité de masse dans la roue $bw'^2_1 + cw^2$, b et c ayant les mêmes valeurs que dans la première partie.

(⁴) β'_0 étant l'angle de w'_0 avec u_0.

valve K pouvant varier, suivant la position de la valve, de 1 à 0.

L'équation de continuité donnera alors (¹),

$$(10) \qquad S v'_o \sin \alpha'_o = S_o w \sin \beta_o = K S_1 w'_1 \sin \beta_1 .$$

Dans le cas du travail à pleine charge sous la hauteur de chute normale H_o on a

$$w'_1 = w_1, \quad v'_o = v_o, \quad w = w_o, \quad \alpha'_o = \alpha_o, \quad K = 1.$$

Nous avons donc pour ce cas en vertu des équations (8) et (10)

$$\sin \beta_1 = \frac{S_o w_o \sin \beta_o}{S w_1}, \qquad \frac{w_o}{u_o} = \frac{\sin \alpha_o}{\sin (\beta_o - \alpha_o)}.$$

Comme d'ailleurs nous avons, pour ce cas du travail normal, posé dans la première partie (²).

$$w_1 = \mu u_1 = \mu \frac{u_o r_1}{r_o}.$$

Nous aurons en définitive

$$(11) \qquad \sin \beta_1 = \frac{S_o r_o \sin \alpha_o \sin \beta_o}{S_1 \mu r_1 \sin (\beta_o - \alpha_o)}.$$

Nous poserons maintenant, pour le cas que nous envisageons du travail sous charge réduite ou sous hauteur de chute variable,

$$u_1 = \lambda w'_1 \text{ (³)}$$

et, comme nous l'avons dit plus haut,

$$\frac{S_o \sin \alpha_o}{S \sin \alpha'_o} = 1 + x$$

Nous aurons donc

$$(12) \qquad w'_1 = \frac{u_1}{\lambda} = \frac{u_o r_1}{\lambda r_o}$$

(¹) Je suppose S_o et S_1 affectés d'un facteur qui tienne compte de la contraction de la veine.

(²) Équation (9) de la première partie.

(³) λ étant par suite égal à $\frac{1}{\mu}$ dans le cas du travail normal.

On déduira alors des équations (10), (11) et (12)

$$(13)\qquad w = \frac{KS_1 w'_1 \sin\beta_1}{S_o \sin\beta_o} = \frac{Kr_o \sin\alpha_o w'_1}{\mu r_1 \sin(\beta_o - \alpha_o)} = \frac{K \sin\alpha_o u_o}{\lambda\mu \sin(\beta_o - \alpha_o)}$$

$$(14)\quad v'_o = \frac{KS_1 w'_1 \sin\beta_1}{S \sin\alpha'_o} = \frac{KS_o \sin\alpha_o \sin\beta_o u_o}{S\lambda\mu \sin\alpha'_o \sin(\beta_o - \alpha_o)} = \frac{K(1+x)\sin\beta_o}{\lambda\mu\sin(\beta_o - \alpha_o)} u_o$$

En tenant compte de ces relations l'équation (9) devient

$$(15)\quad \frac{2gH}{u^2_o} = \frac{r^2_1}{r^2_o}\frac{1+b}{\lambda^2} + \frac{K^2(1+a)(1+x)^2 \sin^2\beta_o}{\lambda^2\mu^2 \sin^2(\beta_o - \alpha_o)} - \frac{r^2_1}{r^2_o} + 1$$

$$+\frac{K^2(1+c)\sin^2\alpha_o}{\lambda^2\mu^2\sin^2(\beta_o - \alpha_o)} + \frac{2K\sin\alpha_o\cos\beta_o}{\lambda\mu\sin(\beta_o - \alpha_o)} - 2\frac{K^2(1+x)\sin\beta_o\sin\alpha_o\cos(\beta_o - \alpha'_o)}{\lambda^2\mu^2\sin^2(\beta_o - \alpha_o)}$$

On a d'ailleurs pour le rendement ρ

$$(16)\qquad \rho = 1 - \frac{av'^2_o + bw'^2_1 + cw^2 + 2g\zeta + v^2_1}{2gH}$$

Puis par le triangle de composition de vitesses à la sortie (¹)

$$(17)\qquad v^2_1 = w'^2_1 + u^2_1 - 2w'_1 u_1 \cos\beta_1$$

Mais en tenant compte de (1) on peut écrire (9)

$$w'^2_1 = 2gH - av'^2_o - 2u_o v'_o \cos\alpha'_o + u^2_1 - bw'^2_1 - cw^2 - 2g\zeta$$

et on aura par suite, en tenant compte de (17)

$$v^2_1 + 2g\zeta + cw^2 + bw'^2_1 + av'^2_o = 2gH - 2u_o v'_o \cos\alpha'_o$$
$$+ 2u^2_1 - 2w'_1 u_1 \cos\beta_1$$

et par suite, en tenant compte de (12) et (14) la relation (16) devient (²)

$$(18)\qquad \rho = \frac{u^2_o}{gH}\left[\frac{r^2_1}{r^2_o}\left(\frac{\cos\beta_1}{\lambda} - 1\right) + \frac{K(1+x)\sin\beta_o\cos\alpha'_o}{\lambda\mu\sin(\beta_o - \alpha_o)}\right]$$

(¹) Formule (16) de la première partie, où on remplace w_1 par w'_1.

(²) Dans le cas du travail sous la hauteur de chute normale H_o et à pleine charge, on a $H = H_o$, $x = 0$, $\alpha_o = \alpha'_o$, $K = 1$,

$\lambda = \frac{1}{\mu}$ ou si l'on tient compte des relations

$$\sin^2\beta_o + \sin^2\alpha_o - 2\sin\beta_o\sin\alpha_o\cos(\beta_o - \alpha_o) = \sin^2(\beta_o - \alpha_o)$$

$$2\left(1 + \frac{\sin\alpha_o\cos\beta_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)}\right) = 2\,\frac{\sin\beta_o\cos\alpha_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)}$$

Si on suppose une turbine donnée travaillant sous une hauteur de chute donnée et avec une ouverture du distributeur ainsi qu'une position de la valve également déterminée, tout est connu dans l'équation (15) (¹) sauf λ, cette équation fournira donc la valeur de cette inconnue et (18) donnera la valeur correspondante du rendement.

Si on pose

$$(18') \qquad z = \frac{1+\eta}{2\xi^2}\rho + \frac{r^2_1}{r^2_o}$$

$$(19) \qquad l = (1+x)\frac{\sin\beta_o \cos\alpha'_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)}, \qquad (19') \qquad i = \frac{r^2_1}{r^2_o}\cos\beta_1$$

la relation (18) donne

$$(20) \qquad \lambda z = i + \frac{K}{\mu} l$$

et si on pose de plus

$$(21) \left\{ \begin{aligned} m &= \frac{1+\eta}{\xi^2} + \frac{r^2_1}{r^2_o} - 1 \\ n &= -\frac{\sin\alpha_o \cos\beta_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)} \\ p &= \frac{(1+a)(1+x)^2\sin^2\beta_o + (1+c)\sin^2\alpha_o}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)} \\ &\qquad - \frac{2(1+x)\sin\beta_o\sin\alpha_o\cos(\beta_o - \alpha'_o)}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)} \; (^2) \\ q &= (1+b)\frac{r^2_1}{r^2_o} \end{aligned} \right.$$

---

la relation (15) devient

$$\frac{2g\mathrm{H}_o}{u^2_o} = \frac{r^2_1}{r^2_o}[\mu^2(1+b) - 1] + \frac{c\sin^2\alpha_o + a\sin^2\beta_o}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)} + 2\frac{\sin\beta_o\cos\alpha_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)}$$

Ce qui, ainsi que cela devait être, est l'équation (11) de la première partie, puisque

$$\frac{2g\mathrm{H}_o}{u^2_o} = \frac{1}{\xi^2}$$

(¹) La valeur de μ ainsi que celle de $\xi^2 = \frac{u^2_o}{2g\mathrm{H}_o}$ se déterminent ainsi que nous l'avons vu dans la première partie.

(²) La valeur de p peut d'ailleurs s'écrire

$$(21') \quad p = 1 + \frac{a\sin^2\beta_o + c\sin^2\alpha_o}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)} + x\sin\beta_o\frac{x(1+a)\sin\beta_o + 2a\sin\beta_o + 2\cos\alpha_o\sin(\beta_o - \alpha_o)}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)}$$

l'équation (15) pourra s'écrire

$$m\lambda^2 + 2n\lambda\frac{K}{\mu} - p\frac{K^2}{\mu^2} - q = 0 \tag{22}$$

en éliminant λ entre (20) et (22) on aura

$$(pK^2 + q\mu^2)z^2 - 2n(i\mu + Kl)Kz - m(i\mu + Kl)^2 = 0 \tag{23}$$

Il faudra prendre la racine positive de cette équation et z étant connu on tire de (18′)

$$\rho = \frac{2\xi^2}{1+\eta}\left(z - \frac{r^2_1}{r^2_o}\right). \tag{24}$$

On tire de l'équation (23)

$$z = \frac{(i\mu + Kl)nK}{pK^2 + q\mu^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{m(pK^2 + q\mu^2)}{n^2K^2}}\right)$$

formule dans laquelle on doit prendre le signe + si $n > 0$ et le signe — si $n < 0$.

Nous poserons alors

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{m(pK^2 + q\mu^2)}}{nK} \tag{25}$$

où si $n > 0$ on a $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ et si $n < 0$, $\pi < \varphi < \frac{\pi}{2}$ et on aura par suite

$$\pm\sqrt{1 + \frac{m(pK^2 + q\mu^2)}{n^2K^2}} = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \frac{nK}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{m(pK^2+q\mu^2)}}{\sin\varphi}$$

et on en conclut dans tous les cas

$$+4\frac{(1+x)\sin\beta_o\sin\alpha_o\sin\frac{\alpha_o-\alpha'_o}{2}\sin\left(\beta_o-\frac{\alpha_o+\alpha'_o}{2}\right)}{\sin^2(\beta_o-\alpha_o)}$$

et de même celle de l

$$l = (1+x)\left(1 - n + 2\frac{\sin\beta_o\sin\frac{\alpha'_o+\alpha_o}{2}\sin\frac{\alpha_o-\alpha'_o}{2}}{\sin(\beta_o-\alpha_o)}\right) \tag{19'}$$

(26) $$z = (i\mu + Kl)\sqrt{\frac{m}{pK^2 + q\mu^2}} \cot\frac{\varphi}{2}$$

z étant connu on en déduit ρ par la formule (24).

On aura ensuite pour le degré de réaction

$$1 - \epsilon = \frac{v'^2_o}{2gH_o(1+\eta)}$$

ou en tenant compte de (14).

(26') $$1 - \epsilon = \frac{K^2(1+x)^2\,\xi^2 \sin^2\beta_o}{(1+\eta)\lambda^2\mu^2 \sin^2(\beta_o - \alpha_o)}.$$

Mais on déduit de (20) et (26)

$$\frac{1}{\lambda\mu} = \frac{z}{\mu i + Kl} = \sqrt{\frac{m}{pK^2 + q\mu^2}} \cot\frac{\varphi}{2}$$

et on a en définition

(27) $$1 - \epsilon = \frac{\xi^2}{1+\eta}\,\frac{K^2(1+x)^2 \sin^2\beta_o}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)}\,\frac{m}{pK^2 + q\mu^2} \cot\frac{\varphi^2}{2}.$$

On a ensuite pour le débit

$$Q = Sv'_o \sin\alpha'_o$$

ou comme

$$\frac{S_o \sin\alpha_o}{S \sin\alpha'_o} = 1 + x$$

(27') $$Q = \frac{S_o \sin\alpha_o v'_o}{1+x} = \frac{S_o \sin\alpha_o}{1+x}\sqrt{2gH_o(1+\eta)(1+\epsilon)}$$

ou en remplacant $1 - \epsilon$ par sa valeur (27)

(28) $$Q = \frac{S_o\xi K \sin\beta_o \,\mathrm{siu}\,\alpha_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)}\sqrt{\frac{2gH_o m}{pK^2 + q\mu^2}} \cot\frac{\varphi}{2}$$

Dans le cas, très fréquent à l'heure présente où le réglage se fait par directrices mobiles, où par suite α'_o est variable et par contre $S = S_o$, on a

(29) $$1 + x = \frac{\sin\alpha_o}{\sin\alpha'_o}.$$

La valeur de p peut se mettre sous une forme qui rend son calcul plus simple et qui peut être utile pour résoudre certains problèmes, en remplaçant $(1+x)$ par sa valeur (29) la valeur de p pourra s'écrira

$$p = \frac{(1+a)\sin^2\beta_o\sin^2\alpha_o}{\sin^2(\beta_o-\alpha_o)}(1+\cot^2\alpha'_o) + \frac{(1+c)\sin^2\alpha_o}{\sin^2(\beta_o-\alpha_o)} -$$

$$-2\frac{\sin\beta_o\sin^2\alpha_o}{\sin^2(\beta_o-\alpha_o)\sin\alpha'_o}(\cos\beta_o\cos\alpha'_o+\sin\beta_o\sin\alpha'_o)$$

$$=(1+a)\frac{\sin^2\beta_o\sin^2\alpha_o}{\sin^2(\beta_o-\alpha_o)}\cot^2\alpha'_o - 2\frac{\sin\beta_o\sin^2\alpha_o\cos\beta_o}{\sin^2(\beta_o-\alpha_o)}\cot\alpha'_o +$$

$$+\frac{\sin^2\alpha_o(c+a\sin^2\beta_o)}{\sin^2(\beta_o-\alpha_o)} + \frac{\sin^2\alpha_o\cos^2\beta_o}{\sin^2(\beta_o-\alpha_o)}$$

D'ailleurs en tenant compte de (29) la valeur (19) de l s'écrira

$$(30) \qquad l = \frac{\sin\beta_o\sin\alpha_o}{\sin(\beta_o-\alpha_o)}\cot\alpha'_o$$

mais, si l_o désigne la valeur de l pour le travail à pleine charge, donc pour $\alpha'_o = \alpha_o$, on aura

$$(30') \qquad l = l_o\frac{\operatorname{tg}\alpha_o}{\operatorname{tg}\alpha'_o}$$

alors en tenant compte de la valeur de n,

$$n = -\frac{\sin\alpha_o\cos\beta_o}{\sin(\beta_o-\alpha_o)}$$

et la valeur (30) de l on aura

$$(31) \quad p = (1+a)l^2 + 2nl + n^2 + \frac{\sin^2\alpha_o(a\sin^2\beta_o+c)}{\sin^2(\beta_o-\alpha_o)}$$

II

Je suppose d'abord que la turbine travaille à pleine charge, mais sous une hauteur de chute variable, et que par suite on ait $x=0$ ou $\alpha'_o=\alpha_o$ et $H = H_o(1+\eta)$, η pouvant être positif ou négatif.

En traitant ce problème on traite en même temps, celui où pour une turbine donnée, on modifie la vitesse relative ξ sans modifier la turbine. En effet u_o et η n'entrent dans les formules que par le terme $\frac{u^2_o}{2gH} = \frac{\xi^2}{1+\eta}$ et on voit qu'en posant

$$\xi'^2 = \frac{\xi^2}{1+\eta}$$

si on étudie ce qui se passe pour une valeur donnée de η on étudie par là ce qui arrive lorsqu'on remplace ξ par ξ' sans rien changer à la turbine.

Pour $x = 0$ ou $\alpha'_o = \alpha_o$ les équations (21') et (19') donnent

$$(32) \qquad p = 1 + \frac{a \sin^2 \beta_o + c \sin \alpha_o}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)} \qquad l = 1 - n$$

les valeurs de m et q restent sans changement et les formules (24) à (28) donnent, z, ρ, ϵ et Q.

Dans le cas que nous supposons d'une turbine travaillant à pleine charge sous une hauteur de chute variable, cette hauteur de chute variera d'un minimum H_1 à un maximum H_2 et il s'agit de déterminer la hauteur de chute normale H_o de façon que la variation du rendement lorsque H varie de H_1 à H_2 soit comprise dans des limites aussi rapprochées que possible.

Pour cela nous nous proposerons de déterminer H_o de façon que le rendement ait la même valeur pour H égal H_1 et pour H égal H_2.

Pour arriver à ce résultat, on tire d'abord de (18')

$$(33) \qquad \frac{1+\eta}{\xi^2} = \frac{2}{\rho}\left(z - \frac{r^2_1}{r^2_o}\right).$$

La valeur (21) de m devient alors :

$$m = \frac{2}{\rho}\left(z - \frac{r^2_1}{r^2_o}\right) + \frac{r^2_1}{r^2_o} - 1,$$

et en portant cette valeur dans (22) on aura :

$$(34) \qquad (pK^2 + q\mu^2)z^2 - 2(i\mu + Kl)\left(Kn + \frac{\mu i + Kl}{\rho}\right)z$$
$$+ (i\mu + Kl)^2\left[\frac{r^2_1}{r^2_o}\left(\frac{2}{\rho} - 1\right) + 1\right] = 0.$$

Si on suppose ρ donné, cette équation fournira deux valeurs correspondantes de z et par suite au moyen de (33) de η on tire de (34)

$$z = \frac{(\mu i + Kl)\left(nK + \frac{\mu i + Kl}{\rho}\right)}{pK^2 + q\mu^2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{(pK^2 + q\mu^2)\left[\frac{r^2_1}{r^2_0}\left(\frac{2}{\rho} - 1\right) + 1\right]}{\left(nK + \frac{\mu i + Kl}{\rho}\right)^2}}\right]$$

mais en posant

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{(pK^2 + q\mu^2)\left[\frac{r^2_1}{r^2_0}\left(\frac{2}{\rho} - 1\right) + 1\right]}}{nK + \frac{1}{\rho}(\mu i + Kl)}$$

on aura pour les deux racines :

$$(35)\qquad \begin{aligned} z_1 &= (Kl + \mu i)\sqrt{\frac{\frac{r^2_1}{r^2_0}\left(\frac{2}{\rho} - 1\right) + 1}{pK^2 + q\mu^2}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}, \\ z_2 &= (Kl + \mu i)\sqrt{\frac{\frac{r^2_1}{r^2_0}\left(\frac{2}{\rho} - 1\right) + 1}{pK^2 + q\mu^2}}\,\cot\frac{\psi}{2}. \end{aligned}$$

Nous nous proposerons alors de déterminer H_0 de telle façon que si l'on a

$$H_1 = H_0(1 + \eta_1) \qquad \text{et} \qquad H_2 = H_0(1 + \eta_2)$$

η_1 et η_2 correspondent aux racines z_1 et z_2 de l'équation (34) et que l'on ait donc :

$$z_1 = \frac{1 + \eta_1}{2\xi^2}\rho + \frac{r^2_1}{r^2_0} \quad , \quad z_2 = \frac{1 + \eta_2}{2\xi^2}\rho + \frac{r^2_1}{r^2_0}.$$

On tire de là :

$$(36)\qquad \begin{aligned} z_1 + z_2 &= \frac{\rho}{\xi^2}\left(1 + \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) + 2\frac{r^2_1}{r^2_0} = \frac{\rho}{2\xi^2}\,\frac{H_1 + H_2}{H_0} + 2\frac{r^2_1}{r^2_0}, \\ z_2 - z_1 &= \frac{\rho}{2\xi^2}(\eta_2 - \eta_1) = \frac{\rho}{2\xi^2}\,\frac{H_2 - H_1}{H_0}; \end{aligned}$$

d'où

$$\text{(37)} \qquad \frac{z_1 + z_2 - 2\frac{r_1^2}{r_0^2}}{z_2 - z_1} = \frac{\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2}{\mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_1} = \mathrm{R}.$$

R est connu, puisque nous supposons H_1 et H_2 donnés. Il s'agit de trouver la valeur correspondante de ρ.

Or, on déduit de la relation entre les coefficients et les racines de l'équation (31) et des équations (36)

$$\mathrm{R}(l\mathrm{K}+\mu i)\sqrt{\left[\mathrm{K}n + \frac{1}{\rho}(\mu i + \mathrm{K}l)\right]^2 - (p\mathrm{K}^2 + q\mu^2)\left[\frac{r_1^2}{r_0^2}\left(\frac{2}{\rho} - 1\right) + 1\right]}$$
$$= (\mu i + \mathrm{K}l)\left[\mathrm{K}n + \frac{1}{\rho}(\mu i + \mathrm{K}l)\right] - \frac{r_1^2}{r_0^2}(p\mathrm{K}^2 + q\mu^2).$$

Nous supposerons toutefois pour l'instant, que l'on ne fait pas agir la valve et que par suite $\mathrm{K} = 1$. On déduira alors de l'équation précédente, en supprimant le facteur $l + \mu i$ et l'élevant au carré

$$\mathrm{R}^2 \left\{ n^2 + \frac{2n}{\rho}(\mu i + l) + \frac{1}{\rho^2}(\mu i + l)^2 - \frac{2}{\rho}(p + q\mu^2)\frac{r_1^2}{r_0^2} - (p + q\mu^2)\left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right)\right\}$$
$$= n^2 + \frac{2n}{\rho}(\mu i + l) + \frac{1}{\rho^2}(\mu i + l)^2 - \frac{2}{\rho}(p + q\mu^2)\frac{r_1^2}{r_0^2} - 2n\frac{r_1^2}{r_0^2}\frac{p + q\mu^2}{\mu i + l}$$
$$+ \frac{r_1^4}{r_0^4}\left(\frac{p + q\mu^2}{\mu i + l}\right)^2,$$

ou

$$\frac{1}{\rho^2}(\mu i + l)^2(\mathrm{R}^2 - 1) + \frac{2}{\rho}(\mu i + l)\left[n(\mathrm{R}^2 - 1) - \frac{r_1^2}{r_0^2}\frac{p + q\mu^2}{\mu i + l}(\mathrm{R}^2 - 1)\right]$$
$$- \left[n - \frac{r_1^2}{r_0^2}\frac{p + q\mu^2}{\mu i + l}\right]^2 + \mathrm{R}^2 n^2 - \mathrm{R}^2(p + q\mu^2)\left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right) = 0.$$

Si on pose alors

$$\text{(38)} \qquad \mathrm{X} = \frac{\mu i + l}{\rho} \quad , \qquad \mathrm{A} = \frac{r_1^2}{r_0^2}\frac{p + q\mu^2}{\mu i + l} - n,$$

cette équation devient :

$$\text{(39)} \quad (\mathrm{R}^2 - 1)\mathrm{X}^2 - 2(\mathrm{R}^2 - 1)\mathrm{A}\mathrm{X} - \mathrm{A}^2 - \mathrm{R}^2(p + q\mu^2)\left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right) + n^2\mathrm{R}^2 = 0.$$

On prendra pour X la plus grande racine de (30) qui répond seule à la question (¹).

En remarquant que

$$A + n = \frac{p + q\mu^2}{l + \mu i} \frac{r^2{}_1}{r^2{}_0},$$

on aura par suite :

$$(40) \qquad X = A + R\sqrt{\frac{p + q\mu^2}{R^2 - 1}\left(\frac{r^2{}_1}{r^2{}_0}\frac{A - n}{l + \mu i} + 1 - \frac{r^2{}_1}{r^2{}_0}\right)}$$

X étant fourni par cette relation, on en déduira ρ par la première des relations (38) et on aura ensuite pour calculer H_0 en vertu des relations (36) et de l'équation (34), où $K = 1$

$$\frac{\rho}{4\xi^2}\frac{H_1 + H_2}{H_0} = \frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{r^2{}_1}{r^2{}_0} =$$

$$= \frac{l + \mu i}{p + q\mu^2}\left(X + n - \frac{r^2{}_1}{r^2{}_0}\frac{p + q\mu^2}{l + \mu i}\right) = \frac{l + \mu i}{p + q\mu^2}(X - A),$$

d'où on déduit en tenant compte de (38)

$$(41) \qquad H_0 = \frac{H_1 + H_2}{4\xi^2 X}\frac{p + q\mu^2}{X - A}.$$

On doit remarquer que dans les conditions actuelles le rendement sera maximum pour une valeur de H différente de H_0.

En effet, pour que les racines de l'équation (34) (²) soient réelles, il faut, en tenant compte de (38)

$$(n + X)^2 - 2\frac{p + q\mu^2}{l + \mu i}\frac{r^2{}_1}{r^2{}_0}X - (p + q\mu^2)\left(1 - \frac{r^2{}_1}{r^2{}_0}\right) > 0,$$

(¹) On déduit en effet de l'équation (34) et des relations (38) et (36)

$$\frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{r^2{}_1}{r^2{}_0} = \frac{l + \mu i}{p + q\mu^2}\left(X + n - \frac{r^2{}_1}{r^2{}_0}\frac{p + q\mu^2}{l + \mu i}\right) = \frac{l + \mu i}{p + q\mu^2}(X - A)$$

$$= \frac{\rho}{4\xi^2}\frac{H_1 + H_2}{H_0} > 0$$

On doit donc avoir $X > A$ et A est compris entre les racines si ces racines sont réelles.

(²) Nous supposons toujours $K = 1$.

ou

$$X^2 - 2AX - (p + q\mu^2)\left(1 - \frac{r^2_1}{r^2_0}\right) + n^2 > 0\,;$$

donc il faut :

$$X \geqslant X_1$$

X_1 étant la plus grande racine de l'équation

$$(42) \qquad X^2 - 2AX - (p + q\mu^2)\left(1 - \frac{r^2_1}{r^2_0}\right) + n^2 = 0.$$

On aura donc (¹)

$$(43) \qquad X_1 = A + \sqrt{(p + q\mu^2)\left(\frac{r^2_1}{r^2_0}\,\frac{A - n}{l + \mu i} + 1 - \frac{r^2_1}{r^2_0}\right)}.$$

On aura par suite pour le maximum ρ_m de ρ

$$(44) \qquad \rho_m = \frac{l + \mu i}{X_1}.$$

Pour cette valeur de X les racines de (34) sont égales et on a par suite, en vertu de (18′)

$$(45) \qquad z = \frac{1 + \eta}{2\xi^2}\,\rho_m + \frac{r^2_1}{r^2_0} = \frac{l + \mu i}{p + q\mu^2}\,(n + X_1).$$

D'où on déduit la valeur correspondante de η et, par suite, de la hauteur de chute correspondante H_m (²) de H.

Considérons d'abord l'exemple, traité dans la première partie, d'une turbine centripète pour laquelle $\alpha_0 = \beta_1 = 20°$ et $r_1 = 0{,}8r_0$ et pour laquelle on suppose $\xi = 1$ en prenant $a = b = 0{,}06$, $c = 0{,}225$. Turbine pour laquelle nous avons trouvé $\rho_1 = 0{,}8159$, $\beta_0 = 156°\,44'$ $\mu = 0{,}842$

et pour cette turbine supposons $H_1 = 20^m$, $H_2 = 40^m$,

d'où

$$R = 3$$

(¹) En tenant compte de

$$A + n = \frac{r + q\mu^2}{l + \mu i}\,\frac{r^2_1}{r^2_0}$$

(²) On trouve :

$$H_m = \frac{H_1 + H_2}{2}\,\frac{X_1(X_1 - A)}{X(X - A} \qquad (46')$$

Nous obtiendrons par la formule (40)

$$X = 1,3091$$

et nous en déduirons par la formule (38)

$$\rho = 0,8005\,;$$

puis par la formule (4)

$$H_0 = 21^m,844.$$

Si nous cherchons ensuite, par les formules précédentes, quel sera le maximum ρ_m du rendement lorsque H varie de H_1 à H_2, nous obtenons par la formule (43)

$$X_1 = 1,2624$$

et nous en déduirons $\rho_m = 0,8302$ et $H_m = 27,276$ (¹).

Considérons ensuite l'exemple, aussi traité dans la première partie, d'une turbine centripète pour laquelle $\alpha_0 = \beta_1 = 20°$ $r_1 = 0,8 r_0$, avec $a = b = 0,06$, $c = 0,225$ et de plus $\beta_0 = 84°3'$ $\xi = 0,6739$, ce qui correspond au maximum du rendement

$$\rho_m = 0,9005,$$

et supposons comme dans le cas précédent $H_1 = 20^m$, $H_2 = 40^m$ d'où

$$R = 3.$$

Nous obtiendrons par la formule (40)

$$X = 1,8775,$$

et nous en déduirons par la formule (38)

$$\rho = 0,8690$$

(¹) Il peut à première vue paraître extraordinaire que nous trouvions ici pour ρ_m une valeur supérieure à la valeur ρ_1 obtenue dans la première partie, puisque ρ_1 est la valeur maxima de ρ correspondant à $\xi = 1$. Mais on doit remarquer que si l'on avait $H_0 = H_m$, la valeur ξ correspondante de ξ serait $\xi' = \dfrac{u_0}{\sqrt{2gH_m}} = \sqrt{\dfrac{H_0}{H_m}} = 0,8949$, puisque $\dfrac{u_0}{\sqrt{2gH_0}} = 1$.

et par la formule (41)

$$H_0 = 27{,}065.$$

Dans ce cas, le maximum du rendement correspond très sensiblement, ainsi qu'il était facile de le prévoir, à $H = H_0$ et sa valeur est $\rho_m = 0{,}9005$.

On voit que, dans ces deux exemples, bien que la hauteur de chute varie du simple au double, le rendement varie seulement d'environ 3 pour cent.

Si le rendement varie, dans les conditions indiquées, dans des limites assez restreintes avec la hauteur de chute, il n'en est pas de même du travail fourni.

Désignons par T le travail fourni pendant l'unité de temps ; on a d'abord pour le débit Q par la formule (27′)

$$Q = \frac{S_0 \sin \alpha_0}{1+x} \sqrt{2gH_0(1+\eta)(1-\epsilon)},$$

et par suite

$$T = 2gH\rho Q = 2gH_0(1+\eta)\rho \frac{S_0 \sin \alpha_0}{1+x} \sqrt{2gH_0(1+\eta)(1-\epsilon)}$$

Mais (26′) donne en tenant compte de (20)

$$(46) \quad 1-\epsilon = \frac{K^2(1+x)^2\xi^2 \sin^2 \beta_0}{(1+\eta)\lambda^2\mu^2 \sin^2(\beta_0-\alpha_0)} = \frac{K^2(1+x)^2 z^2 \xi^2 \sin^2 \beta_0}{(1+\eta)(\mu i+Kl)^2 \sin^2(\beta_0-\alpha_0)}$$

et on aura par suite

$$(47) \qquad T = (2gH_0)^{\frac{3}{2}} \rho \frac{S_0 \sin \alpha_0 K z \xi (1+\eta) \sin \beta_0}{(\mu i + Kl) \sin(\beta_0 - \alpha_0)}$$

Si nous considérons les deux exemples donnés plus haut où $K = 1$, $x = 0$ et où ρ, μ, i, l ont la même valeur pour $H = H_1$ et $H = H_2$, on aura en désignant par T_1 et T_2 les valeurs de T pour $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{z_1(1+\eta_1)}{z_2(1+\eta_2)}$$

On trouve alors que le premier cas où $\xi = 1$, $\beta_0 = 156°44'$

$$\frac{T_1}{T_2} = 0{,}3665,$$

et pour la deuxième où $\xi = 0{,}6739$, $\beta_0 = 84°3'$

$$\frac{T_1}{T_2} = 0{,}3169.$$

Si le travail à fournir est le même dans les deux cas, on pourra, s'il s'agit d'une installation considérable et que l'on dispose d'un débit suffisant, avoir une ou plusieurs turbines supplémentaires qui ne fonctionneront que lorsque la hauteur de chute est réduite; on pourra aussi, lorsque la hauteur de chute augmente, faire travailler la turbine sous une charge réduite, mais il y a alors à se préoccuper des conditions à remplir pour que le rendement ne diminue pas trop lorsque la turbine travaille sous une charge réduite, c'est la question que nous allons examiner.

III

Je suppose d'abord, dans ce qui va suivre, que le réglage se fait au moyen de directrices mobiles du distributeur ; alors α_0 étant l'inclinaison des directrices pour le travail à pleine charge et α'_0 cette inclinaison à un instant quelconque, on a les formules établies plus haut :

$$(29) \qquad 1 + x = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha'_0}$$

$$(30') \qquad l = l_0 \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha'_0}$$

$$(31) \quad p = (1 + a)\, l^2 + 2nl + n^2 + \frac{\sin^2 \alpha_0 (a \sin^2 \beta_0 + c)}{\sin^2 (\beta_0 - \alpha_0)}.$$

Nous poserons d'ailleurs dans cette dernière formule :

$$(48) \qquad f = n^2 + \frac{\sin^2 \alpha_0 (a \sin^2 \beta_0 + c)}{\sin^2 (\beta_0 - \alpha_0)},$$

de sorte qu'elle s'écrira :

$$(49) \qquad p = (1 + a) l^2 + 2nl + f.$$

On a d'ailleurs, ainsi que nous l'avons vu,

$$l_0 = \frac{\sin \beta_0 \cos \alpha_0}{\sin (\beta_0 - \alpha_0)} = 1 - n. \tag{50}$$

Si on fait alors $K = 1$ dans l'équation (23) qui devient

$$(p + q\mu^2)z^2 - 2n(i\mu + l)z - m(\mu i + l)^2 = 0, \tag{23'}$$

cette équation nous fera connaître z et par suite le rendement (1) pour une ouverture quelconque du distributeur. Si ce rendement conserve pour la valeur minima de α'_0 que l'on a à envisager une valeur acceptable, il n'y aura pas à modifier les conditions dans lesquelles on a calculé la turbine conformément aux indications de la première partie.

Pour résoudre l'équation (23') on posera :

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{m(p + q\mu^2)}{n}}. \tag{51}$$

On aura :

$$z = (i\mu + l)\sqrt{\frac{m}{p + q\mu^2}} \cot \frac{\varphi}{2}, \tag{52}$$

et on en déduira :

$$\rho = \frac{2\xi^2}{1 + \eta}\left(z - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right) \tag{53}$$

Il arrivera toutefois souvent que la valeur ainsi obtenue pour ρ sera trop faible ; on pourra alors modifier de la façon suivante les conditions d'établissement de la turbine.

On déterminera d'abord, comme il a été dit dans la première partie pour la valeur de la vitesse relative ξ que l'on a choisie, les conditions d'établissement de la turbine, pour le rendement maximum correspondant à cette valeur donnée de ξ, les valeurs correspondantes l_0 et z_0 de l et de z, et par suite du rendement, valeurs qui vérifient l'équation (23').

En conservant ensuite la valeur l_0 de l on prendra pour le rendement une valeur ρ_1 légèrement inférieure (¹), et la valeur correspondante de z. Pour ces valeurs de l et de z l'équation (23) qui, si on remplace p par sa valeur, et si on pose

---

(1) ρ se déduit par (24) de z et p et l se déduisent des formules (49) et (30').

$$(54)\qquad A = (1 + a)z^2 - m,$$

s'écrira

$$(55)\qquad [Al^2 + 2nz(z-1)l + fz^2]K^2 - 2\mu i(ml + nz)K + (qz^2 - mi^2)\mu^2 = 0$$

admettra deux racines, l'une supérieure, l'autre inférieure à 1. En effet, les valeurs z_0 et l_0 de z et de l vérifient l'équation (23′) et par suite, si on donne à z, ainsi que nous le supposons une valeur inférieure à z_0, le premier membre de (23′) sera négatif, ce qui revient à dire que le premier membre de (55) est négatif pour $K = 1$ et par suite que 1 est compris entre les racines de cette équation.

On prendra alors la racine K_1 de l'équation (55) inférieure à 1.

Pour résoudre l'équation (55) posons

$$(56)\qquad A_1 = Al_0^2 + 2nz(z-1)l_0 + fz^2, \quad B_1 = \mu i(ml_0 + nz),$$
$$C_1 = \mu^2(qz^2 - mi^2)$$

$$(57)\qquad \sin\psi = \frac{\sqrt{A_1 C_1}}{B_1}$$

et on aura alors :

$$(58)\qquad K_1 = \sqrt{\frac{C_1}{A_1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}.$$

On modifiera alors la construction de la turbine, en réduisant la surface de sortie de façon que cette surface de sortie soit K_1S_1 au lieu de S_1.

Si nous ordonnons l'équation (55) par rapport à l, elle pourra s'écrire :

$$(59)\qquad Al^2 - 2\left[\frac{m\mu i}{K} - nz(z-1)\right]l + fz^2 - 2\,\frac{n\mu iz}{K}$$
$$+ \mu^2\,\frac{qz^2 - mi^2}{K^2} = 0,$$

(¹) De 2 à 4 pour cent par exemple.

et si, dans cette équation, nous donnons à K la valeur K_1, elle admettra deux racines dont l'une, K_1, étant racine de (55) pour $l = l_0$, sera l_0 et dont l'autre l_1 sera donnée par la formule

$$(60) \qquad l_1 = 2\left[\frac{m\mu i}{K_1 A} - \frac{nz(z-1)}{A}\right] - l_0.$$

On aura alors la valeur correspondante α'_1 de l'inclinaison α'_0 des directrices du distributeur par la formule (30') qui donne :

$$(61) \qquad \operatorname{tg} \alpha'_1 = \frac{l_0}{l_1} \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Alors pour l'inclinaison α'_0 des directrices variant de α_0 à α'_1 le rendement ρ restera supérieur à ρ_1, et il sera égal à cette limite pour $\alpha'_0 = \alpha_0$ et $\alpha'_0 = \alpha'_1$.

Lorsque l'inclinaison des directrices varie de α_0 à α'_1 le rendement passe par un maximum, dont on obtient de la façon suivante la valeur ainsi que la valeur correspondante de α'_0. En effet, pour que les racines de l'équation (59) soient réelles, il faut en remplaçant A par sa valeur (54)

$$\left[\frac{m\mu i}{K} - n(z-1)z\right]^2 - [(1+a)z^2 - m]\left[fz^2 - 2\frac{n\mu iz}{K} + \mu^2\frac{qz^2 - mi^2}{K^2}\right] > 0,$$

ou

$$z^2 \left\{ \left[n^2 - (1+a)f - (1+a)\frac{q\mu^2}{K^2}\right]z^2 - 2\left[n^2 - \frac{n\mu i(1+a)}{K}\right]z + n^2 + fm + \frac{m\mu^2 q}{K^2} - \frac{2nm\mu i}{K} + \frac{(1+a)mi^2\mu_0}{K^2} \right\} > 0.$$

Ce qui exprime :

$$z \leqslant z_1$$

z_1 étant la plus grande racine de l'équation (1).

---

(1) Dans laquelle on doit, d'après ce que nous avons dit, donner à K la valeur K_1.

$$(62)\quad \left[(1+a)\left(f+\frac{q\mu^2}{K^2_1}\right)-n^2\right]z^2-2n\left[\frac{\mu i(1+a)}{K_1}-n\right]z$$

$$-n^2-fm-\frac{m\mu^2 q}{K^2_1}+\frac{2nm\mu i}{K_1}-\frac{(1+a)mi^2\mu^2}{K^2_1}=0$$

Nous résoudrons cette équation en posant :

$$(63)\quad \begin{cases} A'=(1+a)\left(f+\dfrac{q\mu^2}{K^2_1}\right)-n^2, \quad B'=n\left[\dfrac{\mu i(1+a)}{K_1}-n\right], \\ C'=n^2+fm+\dfrac{m\mu^2 q}{K^2_1}-\dfrac{2nm\mu i}{K_1}+\dfrac{(1+a)mi^2\mu^2}{K^2_1}, \\ \operatorname{tg}\varphi'=\dfrac{\sqrt{A'C'}}{B'}\,; \end{cases}$$

ce qui donnera :

$$(64)\qquad z_1=\sqrt{\frac{C'}{A'}}\cot\frac{\varphi'}{2}.$$

On en déduira le maximum du rendement ρ par la formule (18′), qui donne :

$$(18')\qquad \rho=\frac{2\xi^2}{1+\eta}\left(z_1-\frac{r^2_1}{r^2_0}\right).$$

Pour cette valeur z_1 de z, les racines de l'équation (59) sont égales et on a par suite pour la valeur correspondante l''_1 de l

$$(60)\qquad l''_1=\frac{m\mu i}{K_1 A}-\frac{n(z_1-1)z_1}{A},$$

et ensuite pour l'inclinaison correspondante α''_1 des directrices du distributeur par la formule (61)

$$(61')\qquad \operatorname{tg}\alpha''_1=\frac{l_0}{l''_1}\operatorname{tg}\alpha_0.$$

La valeur du travail correspondant sera fournie par la formule (47).

Nous allons appliquer ces formules à quelques exemples.

Soit d'abord la turbine centripète citée dans la 1^{re} partie, pour laquelle

$\alpha_0=\beta_1=20_0$, $r_1=0{,}8r_0$, $\xi=1$, $a=b=0{,}06$, $c=0{,}225$, pour laquelle nous avons trouvé pour le rendement maximum (¹) $\rho_1 = 0,8159$, correspondant aux valeurs

$$\beta_0 = 156^\circ 44', \quad \mu = 0,8420, \quad \epsilon_0 = 0,6678.$$

Supposons que nous sacrifions 2 pour cent sur le rendement dans le travail à pleine charge, en prenant $\rho = 0,795$, pour obtenir une turbine dont le rendement varie moins avec la charge. Nous supposons de plus $\eta = 0$, donc la hauteur de chute normale et constante.

Dans ces conditions nous trouverons :

par les formules (56) à (58) $K_1 = 0,6704$,

puis par les formules (60) et (61) $\alpha'_1 = 8^\circ 30',7$.

Donc en réduisant la surface de sortie à être $K_1 S_1$, le rendement restera au moins égal à 0,795 pour l'inclinaison des directrices variant de 20° à 8°30',7. On aura d'ailleurs pour le rapport $\frac{T_1}{T_0}$ des travaux développés pendant l'unité de temps lorsque l'inclinaison est de 8°30',7 et de 20° par la formule (47)

$$\frac{T_1}{T_0} = 0,6257$$

Lorsque l'inclinaison des directrices varie de 20° à 8°30',7 le rendement passe par un maximum pour $\alpha'_0 = 12^\circ 58'$, maximum qui est égal à 0,8243 (²).

Si on prenait $K = 1$, donc la surface de sortie égale à S_1, on aurait pour le rendement pour $\alpha'_0 = 8^\circ 30',7 \quad \rho = 0,7214$.

On voit donc que, dans ce cas, on gagne plus de 7 pour cent sur le rendement par la disposition indiquée.

Soit ensuite la turbine centripète, également envisagée dans la première partie, pour laquelle

$\alpha_0 = \beta_1 = 20^\circ \quad r_1 = 0,8 r_0, \quad \xi = 0,6739, \quad a = b = 0,06, \quad c = 0,225,$ turbine pour laquelle nous avons trouvé dans le travail à pleine charge

$$\rho = 0,9005, \quad \beta_0 = 84^\circ 3' \quad \epsilon_0 = 0,4444, \quad \mu = 0,9845.$$

(¹) Non corrigé de l'influence des fuites, comme dans tous les autres exemples que nous donnerons.

(²) Donc légèrement supérieur à ce qu'il est pour le travail à pleine charge lorsqu'on suppose $K = 1$.

Nous sacrifierons 2 pour cent sur le rendement, dans le travail à pleine charge, en prenant $\rho = 0{,}88$, pour obtenir une turbine dont le rendement varie moins avec la charge, nous obtiendrons alors (¹) par les formules (56) à (58) $K_1 = 0{,}7186$
puis par les formules (60) et (61) $\alpha'_1 = 8°54',8$.

Donc en réduisant la surface de sortie à être $K_1 S_1$, le rendement restera égal au moins à 0,88, pour l'inclinaison des directrices variant de 20° à 8°54',8. On aura d'ailleurs pour le rapport des travaux T_1 et T_o développés pendant l'unité de temps lorsque l'inclinaison des directrices du distributeur est de 8°54',8 et de 20° (²).

$$\frac{T_1}{T_o} \quad 0{,}5758$$

Lorsque l'inclinaison des directrices varie de 20° à 8°54',8, le rendement passe par un maximum pour $\alpha'_o = 13°48',3$, maximum qui est égal à 0,9092.

Si on prend $K = 1$, donc la surface de sortie égale à S_1, le rendement pour $\alpha'_o = 8°54',8$ serait de 0,8276 ; on gagne donc dans ce cas un peu plus de 5 pour cent sur le rendement par la disposition indiquée.

Les rendements qui figurent dans ce qui précède, ne sont pas corrigés de l'influence des fuites. Si on voulait faire cette correction, il faudrait calculer le degré de réaction par la formule (46) qui, si on tient compte de la relation $1 + x = \frac{\sin \alpha_o}{\sin \alpha'_o}$, devient

$$(46') \quad 1 - \epsilon = \frac{K^2 z^2 \xi^2 \sin^2 \beta_o \sin^2 \alpha_o}{(1 + \eta)(\mu i + K l)^2 \sin^2 (\beta_o - \alpha_o) \sin^2 \alpha'_o};$$

et calculer ensuite le rendement corrigé ρ' par la formule

$$(65) \qquad \rho' = \rho - e\epsilon$$

donnée dans la première partie.

(¹) En supposant $\eta = 0$, donc le travail sous hauteur de chute normale.
(²) Au moyen de la formule (47).

IV

Dans ce qui précède nous avons supposé la hauteur de chute constante et égale à la hauteur de chute normale, donc $\eta = 0$. Supposons maintenant que la hauteur de chute en même temps que la charge sous laquelle travaille la turbine, soient appelées à varier dans une large mesure.

On aura d'abord à déterminer la hauteur H_o à admettre comme hauteur de chute normale.

On pourrait opérer comme nous l'avons indiqué plus haut en déterminant cette hauteur de chute normale H_0 de façon que le rendement soit le même pour $H = H_1$ et $H = H_0$ dans l'hypothèse où nous nous étions placé que la vitesse relative de l'eau à son entrée dans la roue est tangente à l'aube pour le travail à pleine charge. Toutefois, le plus souvent, ou tout au moins si la charge est appelée à varier dans une large mesure, on sera amené à modifier les conditions d'établissement de la turbine comme nous venons de l'indiquer dans le chapitre précédent, en déterminant une valeur K_1 de K telle que le rendement ait pour le travail à pleine charge une valeur légèrement inférieure à la valeur maxima.

Nous nous proposerons alors de déterminer H_o de telle façon que, K ayant une valeur donnée quelconque, le rendement ait la même valeur pour les valeurs $H_1 = H_0(1 + \eta_1)$ et $H_2 = H_0(1 + \eta_2)$ de H.

Pour cela nous remarquerons que K, p, l et n ne figurent dans les formules (34) et (35) que par les termes pK^2, lK et nK de telle sorte que pour déduire des formules obtenues en supposant $K = 1$ celles relatives au cas où K a une valeur quelconque, il suffit de remplacer dans les premières p par pK^2, l par Kl et n par Kn.

Les formules (38), (40) et (41) deviendront alors pour le cas où K a une valeur donnée quelconque :

$$(38') \qquad X = \frac{\mu i + Kl}{\rho} \quad , \quad A = \frac{r^2_1}{r^2_0} \frac{pK^2 + q\mu^2}{\mu i + Kl} - Kn,$$

$$(40') \qquad X = A + R\sqrt{\frac{pK^2 + q\mu^2}{R^2 - 1}\left(\frac{r^2_1}{r^2_0}\frac{A - Kn}{Kl + \mu i} + 1 - \frac{r^2_1}{r^2_o}\right)},$$

$$(41') \qquad H_0 = \frac{H_1 + H_2}{4\xi^2 X}\frac{pK^2 + q\mu^2}{X - A};$$

et on en déduira (38′)

$$\rho = \frac{\mu i + Kl}{X}.$$

On déduira de même, dans l'hypothèse où K a une valeur quelconque, des formules (43), (44) et (45) où on fait le même changement, pour le maximum du rendement lorsque H varie de H_1 à H_2

$$(43') \qquad X_1 = A + \sqrt{(pK^2_1 + q\mu^2)\left(\frac{r^2_1}{r^2_0}\frac{A - Kn}{lK + \mu i} + 1 - \frac{r^2_1}{r^2_0}\right)},$$

$$(44') \qquad \rho_m = \frac{lK + \mu i}{X_1},$$

$$(45') \qquad z = \frac{1 + \eta}{2\xi^2}\rho_m + \frac{r^2_1}{r^2_0} = \frac{lK + \mu i}{pK^2 + q\mu^2}(Kn + X_1);$$

d'où on déduira le rendement maximum ainsi que la valeur de η et par suite celle de H correspondant au rendement maximum. On obtiendra d'ailleurs pour cette valeur H_m de H correspondant au rendement maximum (¹)

$$(46') \qquad H_m = \frac{H_1 + H_2}{2}\frac{X_1(X_1 - A)}{X(X - A)}.$$

On doit remarquer de plus que les formules s'appliquent non seulement pour une valeur quelconque de K, mais aussi pour une valeur quelconque de *l*.

Nous supposons que l'on a pour une valeur donnée de ξ déterminé une valeur K_1 de K telle que le rendement soit le même pour l'inclinaison des directrices égale à α_0 ou α'_1, et dans ce cas le rendement est maximum pour $\alpha'_0 = \alpha''_1$.

On pourra alors calculer H_0 pour α'_0 égal à α_0, à α'_1 ou à α''_1.

On devra d'ailleurs, quelle que soit la valeur de α'_0 pour laquelle on fait le calcul de H_0, déterminer les valeurs du rendement pour $H = H_1$ dans le cas du travail à pleine charge et pour la valeur minima de l'inclinaison des directrices que l'on se propose d'envisager, en déterminant également le maximum du rendement pour

---

(¹) C'est la même formule que dans l'hypothèse de $K = 1$, mais la valeur X_1 est déduite de (43′) au lieu de l'être de (43).

$H = H_1$ et la valeur correspondante de l'inclinaison des directrices. On fera ensuite le même calcul pour $H = H_2$.

Les rendements ainsi obtenus ne sont pas corrigés de l'influence des fuites.

Si on veut les corriger de cette influence, on calculera le degré de réaction par la formule (46')

$$(46') \qquad 1 - \epsilon = \frac{K^2 z^2 \xi^2 \sin^2 \beta_0 \sin^2 \alpha_0}{(1+\eta)(\mu i + Kl)^2 \sin^2(\beta_0 - \alpha_0) \sin^2 \alpha'_0},$$

qui, en tenant compte de la valeur (19) l et de la valeur (29) de $(1 + x)$, peut s'écrire :

$$(47') \qquad 1 - \epsilon = \frac{K z^2 \xi^2}{(1+\eta)(\mu i + Kl)^2} \, \frac{l^2}{\cos^2 \alpha'_0}.$$

On aura ensuite le rendement ρ' corrigé de l'influence des fuites par la formule

$$(65) \qquad \rho' = \rho - e\epsilon.$$

Nous allons appliquer ce qui précède à un exemple :

Considérons la turbine centripète envisagée dans le paragraphe précédent pour laquelle

$$\alpha_0 = \beta_1 = 20°, \quad r_1 = 0{,}8\, r_1, \quad \xi = 0{,}6739, \quad \beta_0 = 84°3' \quad (^1).$$

Nous avons trouvé que, pour cette turbine, pour le travail sous la hauteur de chute normale H_0, si on prend pour K la valeur $K_1 = 0{,}7186$ le rendement ρ, non corrigé de l'influence des fuites, est égal à 0,88 lorsque l'inclinaison des directrices varie de 20° à 8°54',8 et que ce rendement passe par un maximum égal à 0,9092 pour une inclinaison α'_0 des directrices égale à 13°48',3.

Nous allons alors déterminer la hauteur normale H_0 telle que le rendement ait la même valeur pour $H = H_1 = 20^m$ et $H = H_2 = 40^m$, en prenant donc pour R la valeur 3, pour l'inclinaison de 13°48',3 que nous venons d'indiquer, dans les formules (38'), (40'), (41'), nous trouverons $H_0 = 27^m{,}55$ et pour la valeur correspondante du rendement pour $H = H_1$ et $H = H_2$ (²), $\rho = 0{,}8775$.

(¹) Où nous supposons toujours $a = b = 0{,}06$, $c = 0{,}225$.

(²) La valeur étant la même pour ces deux valeurs de H.

Si dans le cas actuel on déterminait par les formules (43′), (44′) et (46′) les valeurs de ρ_m et de H_m, on trouverait que H_m est sensiblement égal à H_0 et ρ_m à 0,909.

Nous allons ensuite pour $H = H_1 = 20^m$ chercher la valeur du rendement pour $\alpha'_0 = \alpha_0 = 20°$ et $\alpha'_0 = 9°$.

Pour $\alpha_0 = 20°$ nous trouverons par les formules (25), (26) et (24) $\rho = 0{,}8430$.

Nous trouverons ensuite par les mêmes formules pour $\alpha'_0 = 9°$, $\rho = 0{,}8473$.

De plus, toujours pour $H = H_1 = 20°$ lorsque α'_0 varie de 20° à 9° nous trouverons par les formules (63), (64), (18′), (60′) et (61′) que le rendement ρ passe par un maximum pour $\alpha'_0 = 14°59',3$, maximum égal à 0,907.

Si nous faisons ensuite le même calcul pour $H = H_2 = 40^m$, nous trouverons pour $\alpha'_0 = 20°$ (¹), $\rho = 0{,}8533$ et pour $\alpha'_0 = 9°$, $\rho = 0{,}8524$.

De plus, pour cette même valeur de H, nous trouverons que lorsque α'_0 varie de 20° à 9° le rendement passe par un maximum égal à 0,8775 pour $\alpha'_0 = 13°55',1$.

Il s'agit ici des rendements non corrigés de l'influence des fuites. Si on voulait tenir compte de cette dernière cause, on calculerait dans les différents cas le degré de réaction par la formule (47′) et on en déduirait le rendement corrigé par la formule (65′).

En opérant ainsi on aurait en prenant $e = 0{,}08$, pour $H = 20^m$, $\rho' = 0{,}7934$ pour $\alpha' = 20°$ et $\rho' = 0{,}8154$ pour $\alpha' = 9°$, le maximum de ρ' pour cette valeur de H étant de 0,87 environ.

Pour $H = 40^m$ on trouverait, d'une façon semblable, pour $\alpha'_0 = 20°$, $\rho' = 0{,}8086$, et pour $\alpha'_0 = 9°$, $\rho' = 0{,}8293$, le maximum de ρ' pour cette valeur de H étant de 0,84 environ.

On voit qu'avec les dispositions indiquées on arrive à avoir une turbine dont le rendement varie dans une faible mesure lorsque la hauteur de chute varie du simple au double et l'inclinaison des directrices de 20° à 9°, donc la charge dans une mesure encore assez large. On doit remarquer toutefois que lorsque l'inclinaison des directrices varie de 20° à 9°, le travail fourni par la turbine n'est pas réduit, ainsi qu'on pourrait le croire, de plus de 50 pour

---

(¹) **Pour le travail à pleine charge.**

cent; cette réduction ne serait, par suite de la variation du degré de réaction qui augmente la vitesse de l'eau à la sortie du distributeur, que de 40 pour cent environ dans l'exemple que nous avons choisi. Pour faire ce calcul il n'y aurait qu'à se servir de l'expression du travail que donne la formule (47).

De même, quoique le rendement maximum ait lieu dans le cas actuel pour une inclinaison de directrices de 15° environ pour $H = 20^{\circ}$ et de 14° environ pour $H = 40^{m}$, on constaterait, par l'emploi de la même formule, que le travail n'est inférieur que de 6 pour cent dans le premier cas et de 16 pour cent dans le second à celui de la pleine charge.

V

Il peut se faire que l'on ait pratiquement à envisager le cas où la charge devrait descendre au-dessous de la limite pour laquelle la disposition précédente maintient le rendement dans des conditions acceptables; on pourrait alors opérer de la façon suivante.

Dans l'équation (55) nous conserverons pour z la valeur adoptée dans le paragraphe précédent (¹) et nous donnerons à l la valeur l_1 déduite précédemment de l'équation (60). Pour ces valeurs l'équation (55) admettra deux racines dont l'une sera K_1 et dont l'autre sera donnée par la formule

$$K_2 = 2\mu i \frac{ml_1 + nz}{Al_1^2 + 2\,nz(z-1)l_1 + fz^2} - K_1. \tag{52}$$

En prenant pour K cette valeur K_2 l'équation (59) aura deux racines dont l'une sera l_1 (²), et dont l'autre l_2 sera donnée par la formule

$$l_2 = \frac{2}{A}\left[\frac{m\mu i}{K_2} - nz(z-1)\right] - l_1. \tag{67}$$

On calculera alors l'inclinaison correspondante des directrices par la formule

$$\operatorname{tg} \alpha'_2 = \frac{l_0}{l_2} \operatorname{tg} \alpha_0. \tag{68}$$

(¹) Qui correspond à la valeur ρ_1 choisie pour ρ.

(²) (55) et (59) sont en effet la même équation ordonnée seulement par rapport à une lettre différente.

On devra alors adopter un dispositif tel que lorsque l'inclinaison des directrices du distributeur dépasse α'_1 un obturateur vienne réduire la surface de sortie de la roue, de façon que cette surface qui était précédemment K_1 S_1 soit réduite à K_2 S_1 et, dans ces conditions, le rendement ne sera pas inférieur à ρ_1 tant que l'inclinaison des directrices du distributeur ne descendra pas au-dessous de α'_2.

Dans ces conditions, le rendement reste au moins égal à ρ_1 lorsque l'inclinaison des directrices du distributeur décroît de α_o à α'_2. Comme nous l'avons dit, ce rendement passe d'abord par un maximum déterminé par les formules (63), (64) et (18′) lorsque α'_o décroît de α_o à α'_1.

Avec la disposition indiquée, il passera également par un second maximum lorsque α'_o décroît de α'_1 à α'_2, maximum déterminé également par les formules (63), (64) et (18′) où on remplacera seulement K_1 par K_2.

Nous allons maintenant appliquer ce qui précède à l'exemple des deux turbines déjà considérées précédemment. Soit d'abord la turbine centripète déjà envisagée pour laquelle

$$\alpha_o=\beta_1=20^\circ,\ r_1=0{,}8r_o,\ \xi=1,\ a=b=0{,}06,\ c=0{,}225,\ \beta_o=156^\circ 44'.$$

Nous supposons qu'en adoptant pour le rendement ρ la valeur $\rho = 0{,}795$ et réduisant la surface de sortie à être K_1S_1 où $K_1 = 0{,}6704$ on ait, ainsi que nous l'avons indiqué, fait en sorte que le rendement soit au moins égal à 0,795 lorsque l'inclinaison des directrices du distributeur varie de 20° à 8°30′,7.

Nous calculerons maintenant par la formule (66) la valeur du facteur K_2 tel que, la surface de sortie étant réduite à K_2S_1, le rendement ne soit pas inférieur à la valeur $\rho = 0{,}795$ lorsque l'inclinaison des directrices devient inférieure à 8°30′,7. Nous trouverons ainsi $K_2 = 0{,}4376$. Le rendement restera alors au moins égal à 0,795 jusqu'à ce que l atteigne la valeur l_2 fournie par la formule (67). Nous trouverons ainsi $l_2 = 1{,}5681$ et nous en conclurons par la formule (68) pour l'inclinaison correspondante des directrices $\alpha'_2 = 7^\circ 9',9$.

Lorsque l'inclinaison des directrices du distributeur varie de 8°30′,7 à 7°9′,9, le rendement passe par un maximum, peu différent d'ailleurs de 0,795 pour $\alpha'_o = 7^\circ 48',5$.

On a, de plus, pour le rapport des travaux T_2 et T_o développés pendant l'unité de temps lorsque l'inclinaison des directrices du distributeur est 7°9',9 et 20°

$$\frac{T_2}{T_o} = 0,4759.$$

Si on prenait $K = 1$, donc la surface de sortie égale à S_1, le rendement pour $\alpha'_o = 7°9'9$ serait $\rho = 0,6838$; on gagne donc 11 pour cent sur le rendement par la disposition indiquée.

Soit ensuite la turbine centripète, aussi envisagée plus haut, pour laquelle

$$\alpha_o = \beta_1 = 20°, \; r_1 = 0,8 r_o, \; \xi = 0,6739, \; a = b = 0,06, \; c = 0,225, \; \beta_o = 84°3'.$$

Nous supposons qu'en adoptant pour ρ la valeur $\rho = 0,88$ et réduisant la surface de sortie à être K_1S_1 où $K_1 = 0,7186$ on ait fait en sorte que le rendement soit au moins égal à 0,88, lorsque l'inclinaison des directrices du distributeur varie de 20° à 8°54',8.

Nous calculerons alors par la formule (66) la valeur du facteur K_2 telle que, la surface de sortie étant réduite par l'obturateur à K_2S_1, le rendement ne soit pas inférieur à 0,88 lorsque l'inclinaison des directrices devient inférieure à 8°54',8. Nous trouverons ainsi $K_2 = 0,2801$. Le rendement (¹) restera alors au moins égal à 0,88 jusqu'à ce que l atteigne la valeur fournie par la relation (67). Nous trouvons ainsi $l_2 = 6,3087$ et par la formule (68) pour l'inclinaison correspondante des directrices 3°25'9.

Lorsque l'inclinaison des directrices du distributeur varie de 8°54',8 à 3°25',9, le rendement passe par un maximum, voisin de 0,9 pour $\alpha'_o = 5°41'8$.

On a, de plus, pour le rapport $\frac{T_2}{T_o}$ des travaux développés pendant l'unité de temps lorsque l'inclinaison des directrices du distributeur est 3°25',9 et 20°

$$\frac{T_2}{T_o} = 0,2212.$$

Si on prenait $K = 1$, donc la surface de sortie égale à S_1, le

---

(¹) Il s'agit ici toujours du rendement non corrigé de l'influence des fuites.

rendement pour $\alpha'_0 = 3°25°,9$ serait $\rho = 0,7195$; on gagne donc par la disposition indiquée 16 pour cent environ.

Remarque. Dans le cas de $K = 1$, donc si on n'a pas recours à la disposition indiquée, le rendement pour la première turbine indiquée, pour laquelle $\xi = 1$, serait pour $\alpha'_0 = 3°225'9$ seulement $\rho = 0,3012$.

On voit que pour une diminution considérable de la charge la diminution du rendement est beaucoup plus considérable que pour la turbine moins rapide pour laquelle $\xi = 0,6739$.

VI

Nous supposerons maintenant que la valve qui réduit l'orifice de sortie S_1 de la roue puisse se fermer progressivement (¹), de telle sorte qu'à chaque valeur de α'_0 ou de x et de η on puisse faire correspondre une valeur de K faisant prendre au rendement ρ la valeur maxima.

Nous déterminerons alors comme il suit la valeur de K, qui rend ρ maximum pour des valeurs données de α'_0 ou x et de η.

Si dans l'équation (55) on remplace A par sa valeur, (54) elle s'écrira :

$$\left\{[(1+a)l^2+2nl+f]z^2-2nlz-ml^2\right\}K^2-2\mu i(ml+nz)K \\ +(qz^2-mi^2)\mu^2=0,$$

ou en tenant compte de (49)

$$(69)\quad (pz^2-2nlz-ml^2)K^2-2\mu i(ml+nz)K+(qz^2-mi^2)\mu^2=0.$$

Si on suppose ρ et par suite z donné, pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut

$$\mu^2 i^2(ml+nz)^2-\mu^2(qz^2-mi^2)(pz^2-2nlz-ml^2)>0,$$

ou

$$\mu^2 z^2[i^2n^2+pmi^2+qml^2+2qnlz-pqz^2]>0$$

donc

$$z \leqslant z_1,$$

(¹) Cette condition paraît difficilement réalisable pour une turbine centripète, mais elle pourrait se réaliser pour une turbine centrifuge.

z_1 étant la racine positive de l'équation

$$(70) \qquad pqz^2 - 2nqlz - (n^2i^2 + pmi^2 + qml^2) = 0.$$

On tire de là, en prenant le signe + si $n > 0$ et le signe — si $n < 0$,

$$z_1 = \frac{nl}{p}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{p}{q}\left(\frac{i^2}{l^2} + \frac{mpi^2}{n^2l^2} + \frac{qm}{n^2}\right)}\right];$$

ou si on pose

$$(71) \qquad \operatorname{tg}\psi = \pm\sqrt{\frac{p}{q}\left(\frac{i^2}{l^2} + \frac{mpi^2}{n^2l^2} + \frac{qm}{n^2}\right)},$$

$$(72) \qquad z_1 = \frac{nl}{p}\operatorname{tg}\psi\cot\frac{\psi}{2},$$

où

$$\text{si } n > 0 \quad , \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2} \qquad \text{si } n < 0 \quad , \quad \frac{\pi}{2} < \psi < \pi.$$

Pour cette valeur de z les racines de l'équation (69) sont égales et on a par suite :

$$K = \mu i\,\frac{ml + nz_1}{pz_1^2 - 2nlz_1 - ml^2}.$$

Mais z_1 étant racine de l'équation (70), on a :

$$pz_1^2 - 2nlz_1 - ml^2 = (n^2 + pm)\frac{i^2}{q},$$

et par suite

$$(73) \qquad K = \mu\,\frac{q}{i}\,\frac{nz_1 + ml}{n^2 + pm}.$$

z_1 étant connu, on en déduira ρ par la formule (53), puis le degré de réaction par la formule (46) et le travail fourni pendant l'unité de temps par la formule (47) (¹).

La disposition dont il s'agit pourrait probablement s'appliquer à une turbine centrifuge à laquelle on peut adapter une valve qui ferme progressivement l'orifice de sortie à mesure que le distri-

---

(¹) On tiendrait compte ensuite de l'influence des fuites sur le rendement par la formule

$$\rho' = \rho - e\epsilon.$$

buteur se ferme lui-même, mais cela ne sera en général pas possible pour les turbines centripètes qui, par suite de l'évasement des aubes, se transforment plus ou moins en turbines mixtes.

J'appliquerai ces formules à des exemples de turbines citées dans la première partie.

Soit d'abord une turbine centrifuge pour laquelle

$$r_1 = 1{,}25\, r_0,\quad \alpha_0 = 20^\circ,\quad \beta_1 = 14^\circ,\quad a = b = 0{,}06,\quad c = 0{,}225,\quad \xi = 1,$$

turbine pour laquelle nous avons trouvé

$$\rho_0 = 0{,}7523,\quad \beta_0 = 151^\circ 45',\quad \mu = 0{,}8855.$$

Supposons que pour cette turbine nous prenions $\alpha'_0 = 7^\circ$.

On a dans le cas du travail à pleine charge :

$$l_0 = 0{,}5962,\quad n = 1 - l_0 = 0{,}4038,$$

et nous en déduirons pour $\alpha'_0 = 7^\circ$ par la formule (30′) $l = 1{,}7672$; puis par les formules (48) et (49) $p = 4{,}9511$, m, i et q étant d'ailleurs toujours déterminés par les formules (19′) et (21) on obtiendra par les formules (71), (72) et (24)

$$z_1 = 1{,}9387,\quad \rho = 0{,}7524,$$

et par la formule (73)

$$K = 0{,}4499.$$

On voit qu'avec cette disposition le rendement reste sensiblement constant lorsque la charge varie.

S'il n'y avait pas de valve, et si par suite on avait $K = 1$, on trouverait, par les formules (19) à (26), pour le rendement $\rho = 0{,}3776$. On voit que, par suite de la valve, on gagne plus de 37 pour cent sur le rendement, dans le cas qui nous occupe.

Soit ensuite la turbine centrifuge pour laquelle $r_1 = 1{,}25\, r_0$,

$$\alpha_0 = 20^\circ,\quad \beta_1 = 15^\circ,\quad \xi = 0{,}6057,\quad a = b = 0{,}06,\quad c = 0{,}225,$$

pour laquelle nous avons trouvé dans la première partie,

$$\rho_0 = 0{,}8690,\quad \beta_0 = 68^\circ 49',\quad \mu = 1{,}0486.$$

Supposons que pour cette turbine nous prenions $\alpha'_0 = 4^\circ$.

On a alors dans le cas du travail à pleine charge :

$$l_0 = 1{,}1642,\quad n = 1 - l_0 = -0{,}1642.$$

Nous en déduirons alors par la formule (30′) pour $\alpha'_0 = 4°$, $l = 6{,}0600$, puis par les formules (48) et (49), $p = 37{,}0213$, m, i q étant toujours déterminés par les formules (19′) et (21), on obtiendra par les formules (71), (72) et (24)

$$z_1 = 2{,}7633, \quad \rho = 0{,}8811$$

et par la formule (73)

$$K = 0{,}1840.$$

On voit qu'avec cette disposition le rendement reste sensiblement constant lorsque la charge varie (¹).

S'il n'y avait pas de valve et si par suite on faisait $K = 1$, on trouverait par les formules (19) à (26) pour le rendement $\rho = 0{,}4615$. On voit que, par suite de la valve, on gagnerait dans le cas présent près de 42 pour cent sur le rendement.

VII

Je vais, pour terminer, dire quelques mots du calcul du maximum de rendement dans les turbines à libre déviation.

Dans ce cas, la turbine n'étant pas à veine moulée, les conditions du travail sont les mêmes, que la turbine travaille à pleine charge ou à charge réduite ; on se trouve en réalité dans le cas examiné dans la première partie et on doit supposer la vitesse relative à l'entrée de la roue sensiblement tangente à l'aube, tout au moins lorsque la turbine travaille sous hauteur de chute normale, ce que nous supposons dans ce qui suit.

Puisque nous supposons qu'il n'y pas de réaction, on a :

$$h_1 = h',$$

et par suite

$$h - h_1 = H_0,$$

puisque nous supposons que la hauteur de chute est la hauteur normale, donc $\eta = 0$ et l'équation (5) donne par suite

$$(1 + a)v_0^2 = 2gH_0. \tag{74}$$

(¹) Il s'agit, bien entendu, du rendement hydraulique et, ainsi que je l'ai déjà dit, non corrigé de l'influence des fuites.

Nous supposons la vitesse relative initiale tangente à l'aube ; nous avons par suite [1] toujours

$$\frac{u_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)} = \frac{w_o}{\sin\alpha_o} = \frac{v_o}{\sin\beta_o},$$

et par le théorème des forces vives appliqué au mouvement de l'eau dans la roue

$$w^2_1 = w^2_o + u^2_1 - u^2_o - bw^2_1 - cw^2_o.$$

Comme d'ailleurs

$$w^2_o = u^2_o + v^2_o - 2u_o v_o \cos\alpha_o$$

et que nous posons toujours

$$\mu = \frac{w_1}{u_1} = \frac{w_1}{u_o}\frac{r_o}{r_1},$$

et de plus

(75) $$x = \frac{v_o}{u_o} = \frac{\sin\beta_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)} \quad [2]$$

les équations précédentes donnent :

(76) $$(1+b)\mu^2 = 1 + (1-c)\frac{r^2_o}{r^2_1}(x^2 - 2x\cos\alpha_o) - c\frac{r^2_o}{r^2_1}.$$

D'ailleurs la valeur (18) du rendement est applicable dans le cas actuel, à condition d'y faire

$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad K = 1, \quad x = 0, \quad \alpha'_o = \alpha_o, \quad H = H_o.$$

On aura par suite

$$\rho = \frac{u^2_o}{gH_o}\left[\frac{r^2_1}{r^2_o}(\mu\cos\beta_1 - 1) + x\cos\alpha_o\right].$$

---

(1) Équation (8) où nous supprimons les accents, puisque nous supposons le travail normal.

(2) On a en vertu de (74)

$$x^2 = \frac{v^2_o}{u^2_o} = \frac{2gH_o}{(1+a)u^2_o} = \frac{1}{(1+a)\xi^2} \quad \text{donc} \quad \xi = \frac{1}{x\sqrt{1+u}}.$$

Mais

$$\frac{u^2_o}{gH_o} = \frac{u^2_o}{v^2_o}\frac{v^2_o}{gH_o} = \frac{2}{(1+a)x^2}.$$

On a donc en définitive

$$(77) \qquad (1+a)\rho = \frac{2}{x^2}\left[x\cos\alpha_o - \frac{r^2_1}{r^2_o}(1-\mu\cos\beta_1)\right]\cdot$$

Si on suppose ρ donné en éliminant μ entre les équations (76) et (77), on aurait pour déterminer x une équation du quatrième degré, mais on peut résoudre le problème avec une approximation suffisante comme il suit :

Si on négligeait les pertes de charge et que l'on prenne $\mu = 1$, l'équation (76) donnerait $x^2 - 2x\cos\alpha_o = 0$. De plus, pour être dans des conditions acceptables le rendement ne doit pas être trop inférieur à 1. Nous poserons alors,

$$(78) \qquad x^2 - 2x\cos\alpha_o = y,$$

$$(79) \qquad \rho = 1 - R,$$

$$(80) \qquad j = (1+a)R - a.$$

R, y et j étant des quantités assez petites, les équations (76) et (77) pourront alors s'écrire :

$$(81) \qquad (1+b)\mu^2 - 1 + \frac{cr^2_o}{r^2_1} - \frac{r^2_o}{r^2_1}(1-c)y = 0,$$

$$(82) \qquad y - jx^2 + \frac{2r^2_1}{r^2_o}(1-\mu\cos\beta_1) = 0.$$

Or on tire de l'équation (78)

$$x = \cos\alpha_o\left(1 + \sqrt{1 + \frac{y}{\cos^2\alpha_o}}\right),$$

ou, en négligeant les termes en y^2

$$x = 2\cos\alpha_o\left(1 + \frac{y}{4\cos^2\alpha_o}\right),$$

d'où on déduit avec la même approximation

$$x^2 = 4 \cos^2 \alpha_0 + 2y.$$

En remplaçant x^2 par cette valeur dans l'équation (82) on aura :

$$y(1 - 2j) - 4j \cos^2 \alpha_0 + \frac{2r^2_1}{r^2_0}(1 - \mu \cos \beta_1) = 0.$$

En tirant y de l'équation (81) et portant sa valeur dans cette dernière relation, on aura :

$$(83) \qquad (1 - 2j)(1 + b)\mu^2 - 2(1 - c) \cos \beta_1 \mu + 1 - c\left(2 - \frac{r^2_0}{r^2_1}\right)$$
$$- 2j\left[2\frac{r^2_0}{r^2_1}(1 - c) \cos^2 \alpha_0 - 1 + c\,\frac{r^2_0}{r^2_1}\right] = 0.$$

Pour que les racines de cette équation en μ soient réelles, il faut

$$j \geqslant j_1$$

j_1 étant la plus petite racine de l'équation

$$(84) \qquad Mj^2 - 2Nj + P = 0,$$

où

$$M = 4\left(2\,\frac{r^2_0}{r^2_1} \cos^2 \alpha_0 - \frac{1 - c\,\dfrac{r^2_0}{r^2_1}}{1 - c}\right),$$

$$N = 2\left[\frac{r^2_0}{r^2_1} \cos^2 \alpha_0 + \frac{c\left(\dfrac{r^2_0}{r^2_1} - 1\right)}{1 - c}\right],$$

$$P = 1 + \frac{c\left(\dfrac{r^2_0}{r^2_1} - 1\right)}{1 - c} - \frac{(1 - c) \cos^2 \beta_1}{1 + b}.$$

Si on prend pour j la valeur j_1 déduite de l'équation (84), les racines de (83) sont égales et on aura pour la valeur correspondante de μ

$$(85) \qquad \mu_1 = \frac{(1 - c) \cos \beta_1}{(1 + b)(1 - 2j_1)},$$

et on déduit de (79) et (80) pour le maximum du rendement

$$(86) \qquad \rho_m = \frac{1 - j_1}{1 + a}.$$

(81) fera connaître ensuite y, d'où on déduira x par (78) et on aura enfin β_0 et ξ par les relations

$$(87) \qquad \cot(\beta_0 - \alpha_0) = \frac{x - \cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}, \quad \xi = \frac{1}{x\sqrt{1+a}}.$$

que l'on déduit de (75) et de (74).

Si nous supposons, par exemple, une turbine centripète pour laquelle on a

$$a = b = 0{,}06, \quad c = 0{,}225, \quad \alpha_0 = \beta_1 = 20^\circ, \quad r_1 = 0{,}8\, r_0,$$

on trouve :

$$j_1 = 0{,}0952, \quad \rho_m = 0{,}8536, \quad \mu = 0{,}8486, \quad y = 0{,}0949$$

$$x = 1{,}9287, \quad \xi = \frac{1}{x\sqrt{1+a}} = 0{,}5036, \quad \beta_0 = 39^\circ 5'.$$

On voit que le rendement maximum est un peu plus faible que pour une turbine à réaction ; la différence serait toutefois diminuée par l'influence des fuites, qui n'intervient pas dans la turbine à libre déviation. Par contre, la vitesse relative est notablement plus faible que pour la turbine à réaction pour laquelle on avait dans le cas du rendement maximum $\xi = 0{,}6739$, donc une valeur de 17 pour cent plus élevée.

Si on fait un certain sacrifice sur le rendement pour obtenir une turbine plus rapide, on arrive à un résultat moins avantageux que pour la turbine à réaction.

Si par exemple on prenait $\rho = 0{,}83$ en sacrifiant donc 0,0231 sur le rendement, on trouverait seulement $\xi = 0{,}5687$.

On calculera d'ailleurs dans ce cas, la valeur de ρ étant donnée, j par les formules (79) et (80), puis μ par l'équation (83).

Si au lieu de supposer ρ donné on se donnait la vitesse relative ξ et par suite $x = \dfrac{1}{\xi\sqrt{1+a}}$, on calculera μ par la formule (76) et on en déduira ρ par l'équation (77).

On doit remarquer toutefois que pour les turbines à libre déviation, dont nous nous occupons en ce moment, on est, s'il s'agit d'une *turbine centripète,* limité pour la valeur qu'on peut donner à ξ.

En effet, si ξ et par suite x sont donnés, la valeur de μ est fournie, ainsi que nous venons de le dire, par l'équation (76). Or, pour que la valeur de μ, que l'on déduit de là, soit réelle, il faut

$$1 + (1 - c)\frac{r^2_0}{r^2_1}(x^2 - 2x\cos\alpha_0) - c\frac{r^2_0}{r^2_1} \geqslant 0,$$

ou

$$x \geqslant x_1,$$

x_1 étant la plus grande racine de l'équation.

$$x^2 - 2x\cos\alpha_0 + \frac{\frac{r^2_1}{r^2_0} - c}{1 - c} = 0, \tag{88}$$

d'où on tire :

$$x_1 = \cos\alpha_0\left[1 + \sqrt{1 - \frac{\frac{r^2_1}{r^2_0} - c}{(1 - c)\cos^2\alpha_0}}\right],$$

ou en posant

$$\sin\varphi = \frac{1}{\cos\alpha_0}\sqrt{\frac{\frac{r^2_1}{r^2_0} - c}{1 - c}},$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{\frac{r^2_1}{r^2_0} - c}{1 - c}}\cot\frac{\varphi}{2}.$$

On en conclut pour le maximum que l'on peut prendre pour ξ

$$\xi_1 = \frac{1}{x_1\sqrt{1 + a}}.$$

Comme pour cette valeur μ est nul, on a en vertu de (77) pour la valeur correspondante de ρ

$$\rho = 2\frac{x\cos\alpha_0 - \frac{r^2_1}{r^2_0}}{(1 + a)x^2}.$$

Si en particulier on prend, comme précédemment,

$$a = 0{,}06, \quad c = 0{,}225, \quad \alpha_0 = 20^\circ, \quad r_1 = 0{,}8\, r_0$$

on trouve :

$$x_1 = 1{,}5292.$$

D'où pour le maximum que l'on puisse prendre pour ξ

$$\xi_1 = 0{,}6351$$

et pour la valeur correspondante de ρ

$$\rho = 0{,}6430$$

On voit que dans le cas considéré, quel que soit le sacrifice que l'on fasse sur le rendement, la vitesse relative ne pourra pas dépasser 0,6351, valeur inférieure à celle qui, pour une turbine à réaction, correspond au rendement maximum pour lequel nous avons trouvé, dans la première partie, $\xi = 0{,}6739$.

Pour que l'on puisse pour une turbine à libre déviation prendre pour ξ une valeur quelconque, il faudrait que les racines de l'équation (88) soient imaginaires, car alors la valeur de μ sera toujours réelle.

Il faudrait donc que l'on ait :

$$\cos^2 \alpha_0 < \frac{\frac{r^2_1}{r^2_0} - c}{1 - c},$$

ou

$$r_1 > r_0 \cos \alpha_0 \sqrt{1 + c \operatorname{tg}^2 \alpha_0}.$$

Si on suppose par exemple $\alpha_0 = 20^\circ$, il faudrait que l'on ait :

$$r_1 > 0{,}9536\, r_0.$$

TABLE DES MATIÈRES

ET

RESUMÉ DES QUESTIONS TRAITÉES

I. — Pour une turbine donnée dont on connaît le rendement et les autres conditions de fonctionnement pour le travail à pleine charge et sous la hauteur de chute normale, calcul du rendement et des autres conditions de fonctionnement dans le cas du travail sous charge restreinte et hauteur de chute quelconque. p. 1

II. — Pour une turbine qui travaille sous une hauteur de chute variant entre des limites données, détermination de la hauteur de chute normale H_0 devant servir de base au calcul de la turbine de façon à réduire au minimum la variation du rendement, pour le travail à pleine charge, lorsque la hauteur de chute varie dans les limites indiquées. p. 9

III. — Pour une turbine dont la charge est appelée à varier dans une large mesure et qui peut avoir à travailler souvent sous charge réduite, modifications à introduire dans sa construction de façon à réduire, par un faible sacrifice sur le rendement pour le travail à pleine charge, la variation du rendement avec la charge. p. 17

IV. — Même question lorsque la hauteur de chute varie en même temps. p. 24

V. — Suite de la même question et dispositif en vue d'atteindre le même but, lorsque la turbine doit travailler sous une charge très réduite. p. 28

VI. — Suite de la même question et solution spéciale applicable aux turbines centrifuges. p. 31

VII. — Maximum de rendement des turbines à libre déviation dans le cas du travail sous hauteur de chute normale, et comparaison avec les turbines à réaction. p. 34

Une lacune dans l'assistance aux anormaux délinquants

PAR

le Docteur **V. DEROITTE**
Inspecteur adjoint des asiles et colonies d'aliénés du Royaume,
Médecin expert près des Tribunaux

Un grand mouvement s'est produit dans les derniers temps dans le but de préserver d'abord et d'améliorer ensuite les facultés mentales de nos populations.

Car, il faut bien le reconnaître, de nombreuses ligues existent pour des buts de protection et de préservation les plus variés ; le côté hygiène de la race, et, plus spécialement, l'hygiène du système nerveux avait été singulièrement oublié. Depuis longtemps les aliénistes de carrière ont travaillé à remuer l'opinion publique afin d'obtenir un traitement médical pour les maladies mentales, dans la société,au même titre que pour les autres maladies. Nous n'en sommes pas encore là, malheureusement.

Mais en revanche, dans le régime pénitentiaire, de grands et louables efforts sont faits dans le but de dépister les anormaux. Des quartiers spéciaux sont en voie de formation pour les délinquants.

C'est par là qu'il fallait commencer : d'abord les dépister, puis les soigner à part. Et si, au début, les services des médecins aliénistes de carrière, les seuls compétents en cette matière, il faut le reconnaître, avaient paru ne pas être requis, nous voyons que de plus en plus on fait appel à leur expérience. C'est d'un heureux présage.

Mais il reste une question importante à résoudre, la plus importante de loin, capitale même. Cette question inquiète également depuis longtemps les chefs de nos établissements d'aliénés. Il s'agit de savoir à quoi aboutissent, au point de vue pratique, tous ces efforts, tous ces soins dévoués : l'aliéné en convalescence, ou guéri, le délinquant anormal, une fois rendus à la liberté, que deviennent-ils ?

Nous ne nous occuperons pas, dans le cadre de la présente communication, des malades mentaux ordinaires. Ce sera matière pour un autre travail.

Mais les délinquants anormaux une fois libérés ? Il existe bien une tentative dans cette voie : pendant un temps déterminé, ils sont placés sous la surveillance de la police. Cependant, il faut bien le dire, l'effet est absolument nul.

L'anormal rentre dans son milieu, est soumis aux mêmes influences, aux mêmes sollicitations, aux mêmes causes d'énervement, de contagion morale et de sollicitations malsaines et cela sans aucune guide. Bien plus, dans les prisons ou dans les écoles de Bienfaisance, ces individus ont lié connaissance et, se retrouvant dans la vie, gardent des relations ensemble. Car c'est une chose d'expérience qui frappe tous les aliénistes : les anormaux, les déséquilibrés ont l'un pour l'autre une attirance spéciale. Or il en est du contact des anormaux comme du croisement des races humaines : ce ne sont pas les qualités qui se transmettent mais surtout les tares et les défauts qui s'ajoutent l'un à l'autre ; ce n'est pas la persévérance et la régularité du travail et de la conduite qui résultera, pour eux, du contact de deux anormaux, mais la recherche des jouissances faciles, du gain immédiat et l'entraînement à de nouveaux délits.

Du reste on hésite souvent avant d'envoyer un anormal dans un établissement. Les méthodes qu'on y applique sont excellentes : le régime de sélection, l'instinct de propreté développés, ainsi que le sens de la responsabilité personnelle, la discipline du silence, l'éducation morale et la politesse.

Mais on ne peut supprimer le contact ; on ne peut empêcher les enfants de jouer ensemble, de se communiquer leurs impressions, et de subir inconsciemment l'influence des plus pervers.

Des renseignements individuels pris après la sortie des établissements sont édifiants à ce sujet.

C'est ainsi que des magistrats, instruits par l'expérience, préconisent actuellement l'envoi chez des nourriciers honnêtes, travailleurs et avertis, d'un seul anormal à la fois. Tant ils redoutent pour leurs protégés le contact de certains camarades.

Ce ne sont pas des théories, ceci, mais le résultat d'une expérience journalière.

Le séjour en prison ou à l'école de Bienfaisance, pas plus que le séjour à l'asile ne sont que de simples incidents, des parenthèses, dans la vie de ces anormaux, si, après cela, ils sont rendus à eux-mêmes.

Que de fois n'a-t-on pas vu des jeunes gens simplement indisciplinés, ayant commis des larcins de gamins, vols de pommes dans des vergers et autres méfaits de ce genre, devenir, au contact d'autres camarades de séquestration, des malfaiteurs retors et adroits !

Il suffit pour s'en convaincre d'interroger les nourriciers de la province de Luxembourg, ou de consulter des casiers judiciaires.

Est-ce à dire que le système n'est pas bon ? Au contraire, cela prouve qu'il doit être complété par une tutelle efficace, tutelle exercée par ceux qui ont la connaissance de cette branche si difficile, les maladies mentales qui ne s'apprennent que dans les asiles et les colonies d'aliénés, par l'étude de nombreux cas.

De bien tristes expériences, ayant abouti à des suicides et à des drames, en sont la preuve.

L'anormal est bien plus difficile à diriger que le normal et, autant il y a d'individus, autant il y aura de règles de conduite différentes.

Que de fois ne voit-on pas des malades agités, signalés comme furieux, amenés dans les asiles, ligotés et soumis à des moyens de contrainte excessivement puissants, devenir instantanément calmes, dociles, contents même à peine arrivés au pavillon d'observation ! C'est que la manière est différente et qu'ici se retrouve l'expérience des maladies mentales.

C'est un fait d'expérience journalière, il n'en n'est pas autrement dans la vie sociale.

Déjà en 1913, je signalais que nombre de délinquants anormaux, laissés dans la société sans guide expérimenté, se livraient à des méfaits sous l'influence de maladies mentales périodiques, alors que, soignés à temps, même à domicile, ils eussent fait leur crise sans aucun inconvénient pour la société.

Et, comme illustration, je rapportais un cas que j'avais eu l'honneur de signaler dans des congrès internationaux de médecine mentale.

Un malade, ancien colonial, chaque printemps, sous l'influence probable de fièvres contractées aux colonies, était sujet à des crises d'agitation avec obnubilation intellectuelle, tendance au vagabondage et à la fabulation. Au bout de quelques jours l'accès était passé, le malade redevenu absolument normal, conscient de ses actes et ahuri de ce qui s'était passé. Malheureusement, n'ayant pas été surveillé, et la famille ignorant ce dont il s'agissait, ne sachant que faire, il s'était, dans l'entretemps livré à des actes désordonnés, allant à l'occasion jusqu'à la rébellion contre la police : c'était un malade et il passait pour un bandit !

On voit d'ici les scènes pénibles qui peuvent en résulter quand le délinquant est un aliéné complètement obnubilé, en état d'agitation et sans la moindre conscience de ses actes !

Plusieurs fois il avait encouru de ce fait des condamnations, pour escroquerie par exemple, lorsque, s'étant rempli les poches de montres dans un magasin où il était employé, il était allé les distribuer à des inconnus.

Je fus étonné lorsque, dans le but d'un examen mental ordonné par le tribunal, je consultai le dossier de ses condamnations et son casier judiciaire, lui, un homme en temps normal si calme et si rangé.

Il me fut facile alors de refaire l'histoire de son affection mentale avec accès périodiques coïncidant avec les moments d'excitation mentale incohérente et de délits.

Le début de la maladie remontait à son séjour dans les colonies lorsque de forts accès de malaria nécessitèrent son admission à l'hôpital de Saïda, puis d'Oran et, les troubles mentaux de la fièvre prédominant, son entrée à l'asile d'aliénés de Marseille.

Jusqu'à l'âge de quarante et un ans, la durée totale des accès de maladie mentale additionnés s'élève à quelques mois seulement.

C'est peu et cela ne justifiait nullement la collocation.

J'en conclus qu'il n'y avait pas lieu de le colloquer, mais qu'il devait être soumis à un comité de patronage.

Ce comité n'existant pas, je me chargeai moi-même de la tutelle, et, afin que la famille n'hésitât pas à me prévenir à la première alerte, je le fis absolument à titre gratuit.

L'avenir prouva la justesse de mes prévisions.

Chaque année, notre homme eut encore une crise à peu près à la même époque.

J'instituais alors immédiatement un traitement approprié et, au bout de dix à quinze jours, tout était passé à la grande satisfaction de tous et sans le moindre inconvénient au point de vue social.

De temps en temps, je faisais une visite au malade et m'employais par la suggestion, à développer sa force de volonté, à diminuer l'hypertrophie de l'imagination et la tendance à l'exagération des penchants émotifs.

Le cas suivant est des plus tristes : il concerne un malheureux qui se sentait lui-même malade, se croyait persécuté par sa femme et cherchait partout aide et protection.

Comme la famille voulait le faire soigner dans un établissement spécial, la commune, un des grands faubourgs de la capitale, le fit examiner par un médecin communal.

Celui-ci, quoique non spécialiste en maladies mentales, n'hésita cependant pas à déclarer le malheureux sain d'esprit.

Quelques jours après, le malade, dans le but d'échapper à des persécutions imaginaires, se noya dans la Senne.

J'avais eu à l'examiner comme médecin-légiste. Au cours de sa maladie, il avait commis des irrégularités qui avaient motivé une plainte en justice. Le magistrat, soupçonnant une maladie chez cet homme qui avait déjà auparavant été soigné dans un établissement d'aliénés, m'avait chargé de son examen mental avec un de mes collègues.

M'étant rendu compte de son état mental, j'avais averti la famille de prendre des mesures, mais on me fit part de l'opposition de l'administration communale.

J'insistai encore en ce sens. Deux ou trois jours après, venant au domicile du prévenu pour continuer mon examen mental, je me trouvai au milieu de la famille en deuil : le drame redouté s'était produit.

Voilà ce qui peut arriver quand des anormaux sont laissés sans assistance.

Voici une autre observation :

Elle concerne un jeune homme de dix-huit ans que nous eûmes à examiner pour les tribunaux.

De bonne éducation et de bonne famille, ayant fréquenté avec succès deux collèges, il était apprenti chez des parents et se distinguait par sa conduite rangée et son application au travail. Mais, physiquement autant qu'au point de vue mental, il pouvait être comparé à un garçon de quatorze ans.

A deux reprises, il s'était laissé aller à des manières répréhensibles avec des fillettes, signalées d'ailleurs comme très précoces. Sur une plainte des parents, il avait été arrêté.

J'en étais arrivé, après une observation prolongée, à conclure à une forte atténuation de la responsabilité pénale, tout, dans sa conduite, son habitus extérieur, sa formation corporelle indiquant un état encore infantile malgré une bonne formation des facultés intellectuelles proprement dites.

Comme il avait déjà subi une forte punition du fait de la détention préventive, il fut acquitté par le tribunal ; le ministère public estimant, à juste titre, que, vu cet état, il devait, dans un but de préservation sociale, être surveillé pendant un certain temps, désirait le placer dans un institut.

Mais il était évident que ce jeune homme n'était pas un aliéné et aucun établissement d'aliénés ne l'aurait admis. Les dangers qu'il faisait courir à la société n'étaient du reste pas assez grands pour justifier pareille mesure.

D'un autre côté, pour un établissement pour anormaux, il n'était pas assez anormal et surtout, comme il était de famille honorable et de bonne éducation, tout était à craindre du contact d'enfants pervertis. Car trop souvent, dans le séjour en commun, ce sont les plus pervertis qui, étant les plus hardis et les plus retors, pervertissent les autres.

Le seul remède, le plus efficace et le seul approprié à ce cas, aurait été de le confier à une surveillance locale ; de charger un spécialiste de voir si, en famille, il jouit d'une surveillance suffisante et en même temps de contribuer par un traitement spécial à développer son caractère et à fortifier sa volonté.

Nous en revenons donc toujours au même point : pour les anormaux, pour les invalides moraux qui ne sont pas des aliénés proprement dits, qu'ils soient des instables, ou bien atteints à un léger degré d'atrophie morale, de perversion morale ou d'inversion morale — et ces cas sont légion — afin d'éviter le retour des actes qui les ont amenés devant la justice, il ne faut pas qu'ils soient abandonnés dans leur milieu sans aide et sans guide.

La famille ne suffit pas ; il faut qu'ils soient soumis à un traitement mental : bien des méfaits seront ainsi évités et bien des rechutes seront épargnées.

Les spécialistes en aliénation mentale ne manquent pas et ne demanderaient pas mieux que de rendre ainsi un service signalé à la société.

Conclusion

Pour porter tous ses fruits, le système d'isolement et de traitement des anormaux délinquants dans les annexes psychiâtriques des prisons, et dans les écoles de bienfaisance de l'État, doit être complété par un traitement médical approprié consistant en observation discrète, mais prolongée, dans le milieu où ils sont rentrés et au besoin par la visite régulière d'un centre d'hygiène mentale.

Il ne faut pas les rendre d'un seul coup à la liberté sans surveillance : la transition est trop brusque, d'autant que le milieu d'où ils sortent n'est pas précisément fait pour les amender.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Lettre de S. S. le Pape Benoît XV au Président et aux membres de la Société scientifique de Bruxelles 5
Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles (année 1922) 7
Liste des membres fondateurs 7
— des membres honoraires 8
— générale 10
— géographique 40
— des membres décédés 46
— des membres inscrits dans les sections 47
Membres du Conseil (1920-1921) 54
— — (1921-1922) 55
Bureaux des sections (1921-1922) 56

Session du 27 octobre 1921, à Tournai.

Séances des sections : Première section 58
Deuxième section 81
Troisième section 88
Quatrième section 137
Cinquième section 160

Assemblée générale.

Conférence de M. le Dr Guermonprez 164

Session du 9 février 1922, à Bruxelles.

Séances des sections : Première section 165
Deuxième section 207
Troisième section 219
Quatrième section 256
Cinquième section 287

Pages

Assemblée générale.
Conférence de M. D. Damas 289
Session des 26 et 27 avril 1922, à Bruxelles.
Séances des sections : Première section 291
Deuxième section 334
Troisième section 340
Quatrième section 391
Assemblée générale du 26 avril 1922.
Rapport sur la *Société Bibliographique* de Paris 397
Conférence de M. M. D'Halluin 400
Assemblée générale du 27 avril 1922.
Adresse à Sa Sainteté Pie XI 400
Résultats des élections au Conseil général 401
Rapport du Secrétaire général 402
Recettes et dépenses de la Société en 1921 407
Nouveaux statuts 408
Conférence de M. Paul Debaisieux 410
Liste des ouvrages offerts à la Société scientifique de Bruxelles, du 1er mai 1921 au 1er mai 1922 411

COMMUNICATIONS DIVERSES

Les *Œuvres complètes d'Archimède,* traduites par M. Paul Ver Eecke, par le R. P. Bosmans, S. J. 58
Rapport de M. Lecat sur le mémoire de M. Bertrand : La théorie des marées et le calcul des variations 63
Rapport de M. Alliaume sur le mémoire de M. De Neyer : La loi des densités à l'intérieur de la terre 65
Notes mathématiques, par M. Neuberg 67
Solution d'un problème relatif au mouvement d'un point pesant sur une courbe fixe, par M. Simonart 78
Sur le rôle des ions et des électrons dans les réactions chimiques, par M. de Hemptinne 81
A propos du rayon vert, par le R. P. Lange, S. J. 81
Dilatations et changements d'état, par le R. P. Schaffers, S. J. . . . 84
La structure atomique du nitrate de strontium cubique, par M. l'abbé De Smedt 86
Un campement gaulois en Flandre, par M. le curé Claerhout 88
Sur quelques Grewia (Tiliacées) du Congo belge, par M. É. De Wildeman 92
Nouveaux représentants du genre Polypedilum, par M. Kieffer . . . 97
Observations sur les insectes fossiles du houiller belge : Mégasécopteris, par M. P. Pruvost 101

PAGE

Sur une empreinte de patte d'Arthropleura trouvée au Charbonnage de Courcelles-Nord, par M. P. Pruvost 104
Le Famennien du bord nord du bassin de Namur, par M. X. Stainier. . 107
La sécheresse et la migration des oiseaux, par M. A. Proost. 113
Les formations supérieures du Calcaire carbonifère de Visé, par M. l'abbé G. Delépine 113
Description de Lamellicornes coprophages indo-malais, par M. J. Gillet. 123
Sur des névroptères nouveaux ou critiques, par le R. P. Navas, S. J. . 130
Traitement de l'Anthrax par l'ablation, par M. le D^r^ Delassus 137
Structure de l'axis humain, par M. le D^r^ Delattre 139
Trois observations cliniques, par M. le D^r^ Dubois-Verbrugghen . . . 144
Les applications thérapeutiques de l'Émanation du Radium, par M. le D^r^ Matagne 152
Examen critique de la notion de valeur dans ses rapports avec les systèmes monétaires, par M. Hauptmann 160
A propos des notes mathématiques de M. Neuberg, par M. d'Ocagne . 165
Rapport de M. le comte de Sparre sur le mémoire de M. Pasquier : Sur le mouvement gyroscopique 166
Contribution à la théorie du niveau à bulle, par M. Alliaume 167
Contributions à la géométrie du tétraèdre, par M. Thébault. 173
Rapport de M. Lecat sur le mémoire de M. Bertrand : Figures d'équilibre d'une masse sphéroïdale hétérogène en repos. 182
Sur diverses formes remarquables des produits et puissances de trois codéterminants cubiques (première communication), par M. Lecat . 186
Notes mathématiques, par M. Neuberg 198
Sur un exemplaire du Cosmographicus liber de Pierre Apian, par le R. P. Bosmans, S. J. 203
Sur une transformation homographique, par M. Simonart 207
Sur les fonctions semi-analytiques et l'ordre d'approximation qui les caractérise, par M. de la Vallée Poussin 207
Note sur le réglage des goniomètres, par M. Biot 207
L'action, sur la plaque photographique, d'un conducteur médiocre sous courant, par le R. P. Schaffers, S. J. 213
A propos d'un appareil pour illustrer la théorie cinétique, par le R. P. Schaffers, S. J. 217
L'ethnogénie de l'Europe, par M. le curé Claerhout. 219
Notes sur la flore du Katanga, par M. É. De Wildeman 224
Nouveaux Chironomides piqueurs habitant le Sleswig-Holstein, par M. Kieffer 230
Contribution à la faune diptérologique de Belgique, par M. l'abbé Parent. 238
Sur le rôle de l'anticlinal de Fraipont, par M. Renier 248
Névroptères nouveaux ou critiques, par le R. P. Navas, S. J. 250
Quelques considérations sur le cancer de la langue et son traitement, par M. le D^r^ Matagne 257

PAGES

L'importance de l'alimentation au point de vue hygiénique et thérapeutique, par M. le Dr L. Goedseels 271
Les méthodes d'exploration du système sympathique, par M. le docteur Houdmont 278
La Belgique et les réparations, par M. F. Baudhuin 287
Sur la substitution d'une fonction linéaire à une fonction quelconque d'une variable dans les mathématiques appliquées et spécialement en astronomie, par M. Alliaume 291
Sur le centre de courbure des podaires, par M. d'Ocagne 301
Communications sur la nomographie, l'analyse infinitésimale et la relativité, par M. É. Goedseels 302
Sur diverses formes remarquables des produits et puissances de trois codéterminants cubiques (deuxième communication), par M. Lecat . 305
Sur le quadrangle complet, par M. Thébault 316
Sur les polygones podaires d'un quadrilatère plan, par M. Neuberg . . 326
L'ionomètre du Dr Solomon, par M. le Dr Ét. Henrard 334
Deuxième note sur le Bouillant de Franklin, par le R. P. Schaffers, S. J. 335
Les figures d'interférences des rayons X produites par les liquides, par M. l'abbé De Smedt 338
Contribution à la faune diptérologique de Belgique, par M. l'abbé Parent. 340
Sur l'origine des Slaves, par M. le curé Claerhout 346
Les arachnides fossiles du houiller de Belgique, par M. P. Pruvost . . 348
Nouveaux chironomides à larves aquatiques, par M. Kieffer. 355
Glanes de paléontologie houillère, par M. Renier 367
Sur quelques espèces du genre Garcinia, par M. É. De Wildeman. . . 373
Nouvelles observations sur la faune des calcaires à Daviesiella llangollensis à Florennes et à Sovet, par M. l'abbé Delépine 379
Le synclinal de l'Eifel dans la vallée de la Meuse, par M. Asselberghs . 387
Note sur l'homme des cavernes, par M. Proost 390
De l'action de la chaleur sur la liaison présure-antiprésure, par MM. Briot et Gur 392
Les seuils d'excrétion du rein, par M. le Dr Houdmont 393

CONFÉRENCES

La science et la résurrection de la Pologne, par M. le Dr Guermonprez. 164
Deux zoologistes. Un savant allemand : Ernest Haeckel, et un savant belge : Édouard Van Beneden, par M. D. Damas. 289
Le radium, par M. M. D'Halluin 400
Les Protozoaires, par M. P. Debaisieux. 410

QUESTIONS DE CONCOURS

PAGES
Première section 291
Deuxième — 334
Troisième — 373
Quatrième — 397

AUTEURS

Alliaume, 65, 167, 291. — Asselberghs, 387. — Baudhuin, 287. — Bertrand, 63, 182. — Biot, 207. — Bosmans, 58, 203. — Briot, 392. — Claerhout, 88, 219, 346. — Damas, 289. — Debaisieux, 410. — Delassus, 137. — Delattre, 139. — Delépine, 113, 379. — De Neyer, 65. — De Smedt, 86, 338. — De Wildeman, 92, 224, 373. — D'Halluin, 400. — Dubois-Verbrugghen, 144. — Gillet, 123. — Goedseels, É., 302. — Goedseels, L., 271. — Guermonprez, 164. — Gur, 392. — Hauptmann, 160. — de Hemptinne, 81. — Henrard, 334. — Houdmont, 278, 393. — Kieffer, 97, 230, 355. — Lange, 81. — Lecat, 63, 182, 186, 305. — Matagne, 152, 257. — Navas, 130, 250. — Neuberg, 67, 198, 326. — d'Ocagne, 165, 301. — Parent, 238, 340. — Pasquier, 166. — Proost, 113, 390. — Pruvost, 101, 104, 348. — Renier, 248, 367. — Schaffers, 84, 213, 217, 335. — Simonart, 78, 207. — de Sparre, 166. — Stainier, 107. — Thébault, 173, 316. — de la Vallée Poussin, 207.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

PAGES
La loi des densités à l'intérieur de la terre, par M. l'abbé L. De Neyer . 1
Notes sur la Flore du Katanga (suite), par É. De Wildeman. 14
Examen critique de la notion de valeur dans ses rapports avec les systèmes monétaires, par M. M. Hauptmann 89
La théorie des marées et le calcul des variations, par M. G. Bertrand . 109
Contributions à la géométrie du triangle et du tétraèdre, par V. Thébault 121
Nouveau procédé pour la fabrication de la céruse en écailles dures, par M. E. Lenoble 135
Thermodynamique. Sur les propriétés des fluides au voisinage de l'état critique, par M. E. Ariès 165
Théorie analytique des turbines centripètes et centrifuges à réaction, par M. le comte de Sparre (deuxième partie) 197
Une lacune dans l'assistance aux anormaux délinquants, par M. le docteur Deroitte. 238

AUTEURS

E. Ariès, 165. — G. Bertrand, 109. — L. De Neyer, 1. — Dr Deroitte, 238. — É. De Wildeman, 14. — M. Hauptmann, 89. — E. Lenoble, 135. — de Sparre, 197. — Thébault, 121.

DATES DE PUBLICATION

1er fascicule : pages **1-164**, 1-108, 12 décembre 1921.
2me fascicule : pages **165-290**, 109-164, 10 avril 1922.
3me et 4me fascicules : pages **291-424**, 165-244, 6 juillet 1922.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
XL^e Année. — 4^me Fascicule

Théorie analytique des turbines centripètes et centrifuges à réaction

par M. le COMTE DE SPARRE

ERRATA

Page	ligne	lire	au lieu de
10	2	$\alpha_o = 20^\circ$	$\alpha_o = 29^\circ$
10	7	$\frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = 1{,}5427$	$\frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = 1{,}5247$
13	11	$P_1 = 4A \frac{r_o^2}{r_1^2} \cos^2 \alpha_o \left(\frac{2}{\rho_o} \right.$	$P_1 = 4A \frac{r_o^2}{r_1^2} \frac{2}{\rho_o}$
14	11	$Y_1 = 4{,}2792$	$Y_1 = 0{,}8262$
19	17	le débit	le rendement
23	14	$M_1 = \frac{2r_o^2}{r_1^2} \left(\right.$	$M_1 = \frac{2r_o^2}{i_1^2} \left(\right.$
23	15	$P_1 = 4A \cos^2 \alpha_o \left(\right.$	$P_1 = 4 \cos^2 \alpha_o \left(\right.$
25	6	$B_1 = 4 \frac{r_o^2}{r_1^2} A \cos^2 \alpha_o \left(\right.$	$B_1 = 4 \frac{r_o^2}{r_1^2} A \left(\right.$